Ingegneria Elettronica e Informatica
Analisi Matematica 1b (Foschi)
Compito del 7.6.2018

1. Determina tutte le soluzioni in campo complesso dell'equazione

$$\mathrm{e}^{z-1} = \mathrm{e}^{1/(z-1)}.$$

Soluzione: In campo complesso abbiamo che $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ se e solo se $z_1 = z_2 + 2\pi\mathrm{i}k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Dunque l'equazione equivale allla condizione

$$z - 1 = \frac{1}{z-1} + 2\pi\mathrm{i}k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Moltiplicando per $z - 1$ otteniamo l'equazione

$$(z-1)^2 - 2\pi\mathrm{i}k(z-1) - 1 = 0.$$

Da essa ricaviamo che

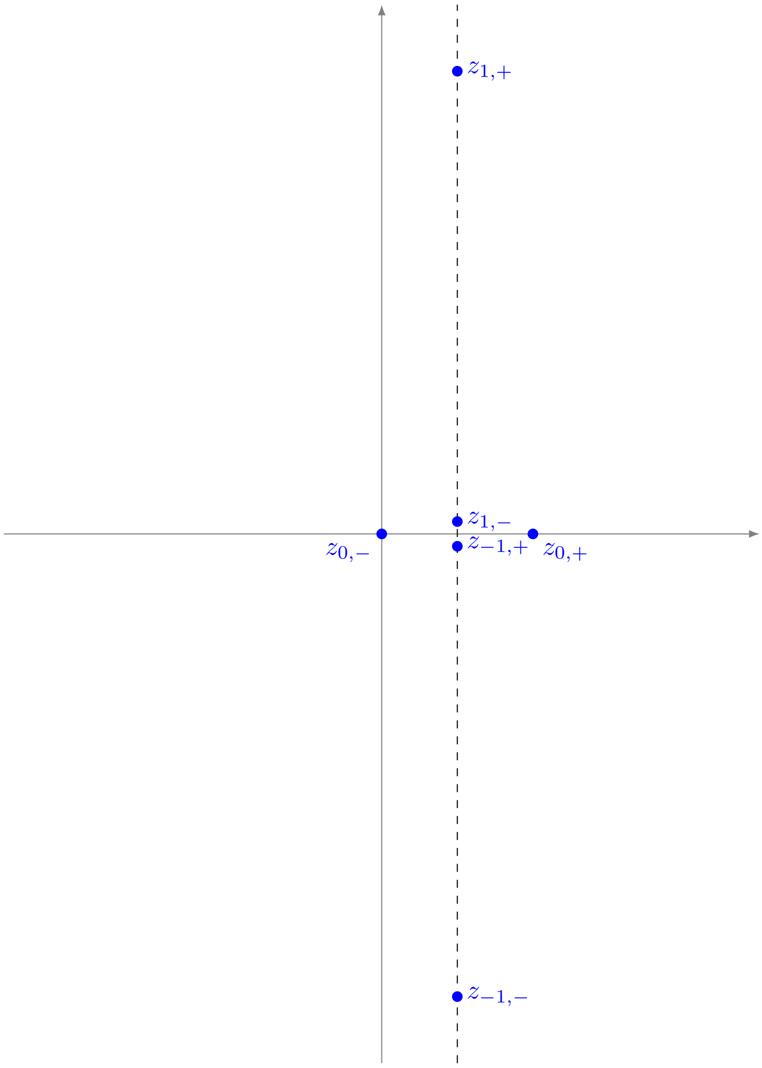
$$z - 1 = \pi\mathrm{i}k \pm \sqrt{(\pi\mathrm{i}k)^2 - (-1)} = k\pi\mathrm{i} \pm \sqrt{1 - \pi^2k^2}.$$

Nel caso in cui $k = 0$ otteniamo $z = 1 \pm 1$, ovvero $z = z_{0,+} := 2$ oppure $z = z_{0,-} := 0$.
Nel caso in cui $k \neq 0$ abbiamo che la quantità sotto radice, $1 - \pi^2k^2$, risulta essere un numero reale negativo e dunque

$$\pm\sqrt{1-\pi^2k^2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\pi^2k^2-1};$$

otteniamo allora le soluzioni

$$z = z_{k,\pm} := 1 + \mathrm{i}\left(k\pi \pm \sqrt{\pi^2k^2 - 1}\right).$$



2. Considera l'equazione differenziale
$$y'' + y' = \mathrm{e}^{-t}. \tag{1}$$
   - Determina la soluzione $y_\star(t)$ dell'equazione che soddisfa le condizioni iniziali $y_\star(0) = 2$ e $y_\star'(0) = 1$.
   - Determina per quali parametri $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(t)\,\mathrm{d}t = 1$, dove $y(t)$ è la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = a$ e $y'(0) = b$.

Soluzione: Studiamo prima l'equazione omogenea
$$y'' + y' = 0. \tag{2}$$
La corrispondente equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda = 0$, e ha come soluzioni i due valori caratteristici $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Dunque due soluzioni di (2) linearmente indipendenti sono $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea (2) è della forma
$$y(t) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-t},$$
con c_1 e c_2 valori costanti.

Osserviamo che il termine non omogeneo e^{-t} che compare nell'equazione non omogenea (1) risulta essere anche una soluzione dell'equazione omogenea (2). Si tratta quindi di un caso risonante. Proviamo allora a cercare una soluzione di (1) della forma

$$y(t) = kt\mathrm{e}^{-t}.$$

Abbiamo

$$y'(t) = k(1-t)\mathrm{e}^{-t}, \qquad y''(t) = k(t-2)\mathrm{e}^{-t}.$$

Sostituendo in (1) otteniamo

$$k(t-2)\mathrm{e}^{-t} + k(1-t)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}.$$

Semplificando ricaviamo la condizione $k = -1$. Quindi $y(t) = -t\mathrm{e}^{-t}$ è una soluzione particolare di (1).

Tutte le soluzioni di (1) saranno allora della forma:

$$y(t) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t}; \tag{3}$$

con derivata

$$y(t) = -c_2\mathrm{e}^{-t} + (t-1)\mathrm{e}^{-t}.$$

In particolare avremo $y(0) = c_1 + c_2$ e $y'(0) = -c_2 - 1$.

Per ottenere la soluzione $y(t)$ di (1) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = a$ e $y'(0) = b$ basterà richiedere che

$$c_1 + c_2 = a, \qquad -c_2 - 1 = b,$$

ovvero $c_1 = 1 + a + b$ e $c_2 = -1 - b$.

- La soluzione $y_\star$ tale che $y_\star(0) = 2$ e $y_\star'(0) = 1$ corrisponde quindi ai valori $c_1 = 4$ e $c_2 = -2$, e dunque
$$y_\star(t) = 4 - 2\mathrm{e}{-t} - t\mathrm{e}^{-t}.$$
- Osserviamo che
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{L\to\infty}\int_0^L \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{L\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^L = \lim_{L\to\infty} -\mathrm{e}^{L} + 1 = 1.$$
Analogamente abbiamo
$$\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{L\to\infty}\int_0^L t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{L\to\infty}\left(\left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^L + \int_0^L \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$= \lim_{L\to\infty}\big(-(L+1)\mathrm{e}^{-L} + 1\big) = 1.$$
Invece, per ogni costante c abbiamo
$$\int_0^\infty c\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \text{se } c = 0, \\ \infty, & \text{se } c \neq 0. \end{cases}$$
Ne segue che integrando (3) otteniamo un valore finito se e solo se $c_1 = 0$ e in tal caso abbiamo
$$\int_0^\infty y(t)\,\mathrm{d}t = c_2 - 1.$$
Per avere l'integrale uguale a 1 dovrà essere $c_2 = 2$. Alle costanti $c_1 = 0$ e $c_2 = 2$ corrispondono i valori iniziali $a = 2$ e $b = -3$.

3. Considera l'integrale generalizzato
$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin(x)}{x^p(1+x^3)}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$
Determina per quali valori del parametro $p \in \mathbb{R}$ l'integrale converge ad un valore finito.

Soluzione: Spezziamo l'integrale in due parti: $\displaystyle\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ e studiamo la convergenza dei due integrali separatamente.

Siccome per $x > 0$ abbiamo $\sin(x) < x$, la funzione integranda è sempre positiva.

Per $x \to 0^+$, usando l'approssimazione di Taylor di ordine 3 abbiamo
$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$
da cui segue che $x - \sin(x) \approx \dfrac{1}{6}x^3$ e quindi la funzione integranda ha il seguente comportamento asintotico,
$$\frac{x-\sin(x)}{x^p(1+x^3)} \approx \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^p \cdot 1} = \frac{1}{6x^{p-3}}.$$
Per il criterio del confronto asintotico l'integrale
$$\int_0^1 \frac{x-\sin(x)}{x^p(1+x^3)}\,\mathrm{d}x$$
ha lo stesso carattere di convergenza dell'integrale
$$\int_0^1 \frac{1}{x^{p-3}}\,\mathrm{d}x,$$
il quale converge se e solo se $p - 3 < 1$, ovvero $p < 4$.

Per $x \to +\infty$, abbiamo che $x - \sin(x) \approx x$ e quindi la funzione integranda ha il seguente comportamento asintotico,
$$\frac{x-\sin(x)}{x^p(1+x^3)} \approx \frac{x}{x^p \cdot x^3} = \frac{1}{x^{p+2}}.$$
Per il criterio del confronto asintotico l'integrale
$$\int_1^\infty \frac{x-\sin(x)}{x^p(1+x^3)}\,\mathrm{d}x$$
ha lo stesso carattere di convergenza dell'integrale
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{p+2}}\,\mathrm{d}x,$$
il quale converge se e solo se $p + 2 > 1$, ovvero $p > -1$.

Mettendo insieme le due cose, troviamo che l'integrale (4) converge se e solo se $-1 < p < 4$.

4. Considera le funzioni $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da
$$f(x,y) := \left(x\cos(y), \frac{2y}{x^2+1}\right), \qquad g(s,t) := s - \int_0^t \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r.$$
- Calcola tutte le derivate parziali di f e di g.
- Calcola il gradiente della funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nel punto $(0,0)$.

Soluzione: Derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\cos(y), -\frac{4xy}{(x^2+1)^2}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(-x\sin(y), \frac{2}{x^2+1}\right).$$

Derivate parziali di g:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial t} = -\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Osserviamo che il calcolo dell'ultima derivata è una conseguenza del teorema fondamentale del calcolo: infatti la funzione $H(t) := \int_0^t \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$ è una primitiva della funzione $h(t) := \mathrm{e}^{-t^2}$.

Calcoliamo $f(0,0) = (0,0)$, il gradiente $\nabla g(0,0) = (1,-1)$ e la matrice Jacobiana

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}.$$

Per la regola della derivata di funzioni composte:

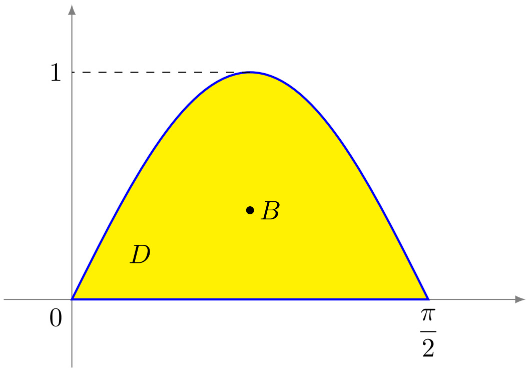
$$\nabla(g\circ f)(0,0) = (\nabla g)(f(0,0))J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Considera la regione del piano D definita da

$$D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin(2x)\right\}.$$

- Determina il baricentro di D.
- Calcola l'integrale $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Soluzione: La regione D è un dominio semplice rispetto ad y.



L'area di D è data da

$$A := \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin(2x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Sia $B = (x_B, y_B)$ il baricentro di D. siccome $x = \pi/4$ è un asse di simmetria per D avremo che $x_B = \pi/4$, mentre y_B è data da

$$y_B = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin(2x)} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\sin(2x)\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}.$$

Inoltre

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \int_0^{\sin(2x)} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{1}{2} \left(\sin(2x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32}.$$