

Analisi Matematica 1b - Ing. Elettronica e Informatica - (Foschi) - 15.6.2021

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai.

1. (5 punti) Determina, e rappresenta graficamente nel piano complesso, tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$z^2 + 1 = 2zi, \quad \cos(\bar{z}) = i.$$

2. (5 punti) Considera la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := \min \{x^2, y^2\}$.

- Descrivi come sono fatti gli insiemi di livello della funzione f .
- Discuti la differenziabilità di f nel punto $(0, 0)$.

3. (5 punti) Sia $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, y > 0\}$ il primo quadrante del piano cartesiano. Considera i campi vettoriali $\Phi, \Psi: Q \rightarrow Q$ definiti da

$$\Phi(x, y) := \Psi(\Psi(\Psi(x, y))), \quad \Psi(x, y) := \left(x^2 + y^2, \frac{x}{y}\right).$$

- Calcola la divergenza di Φ nel punto $(1, 1)$.
- Calcola il rotore di Φ nel punto $(1, 1)$.

4. (5 punti) Calcola il valore dei seguenti integrali

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin \theta)^2}{(\cos \theta)^4} d\theta, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin \theta)^3}{(\cos \theta)^4} d\theta, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin \theta)^3}{(\cos \theta)^5} d\theta.$$

5. (5 punti) Considera la regione D del piano cartesiano definita da

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, |y| \leq x^2\}.$$

- Descrivi D in coordinate polari.
- Calcola l'area della regione D .
- Calcola il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare la regione D intorno all'asse verticale passante per l'origine.

6. (5 punti) Determina la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+t^2)y' = y + \frac{1}{y}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Inoltre, determina il dominio massimale di definizione della soluzione e descrivi il comportamento della soluzione agli estremi del dominio.