

Analisi Matematica 1b - Ing. Elettronica e Informatica - (Foschi) - 8.9.2020

1. (5 punti) Determina due numeri complessi la cui somma è $2i$ e il cui prodotto è $\sqrt{3}i$.
2. (5 punti) Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) := \sqrt{x}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\sigma_n = \{x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}\}$ la suddivisione di $[0, 1]$ formata dai punti $x_{n,k} := \left(\frac{k}{n}\right)^2$, con $k = 0, 1, \dots, n$. (σ_n suddivide $[0, 1]$ in n intervalli.)
 - Calcola la somma superiore di Darboux $S(n) := \bar{S}(f, \sigma_n)$.
 - Calcola il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)$.

[Può essere utile ricordare le formule: $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$.]

3. (5 punti) Determina per quale valore di k risulta essere nullo il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (1 - kx) \log(1 + x^2) dx.$$

4. (5 punti) Considera la funzione $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{x^4 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

- Determina per quali valori di α si ha che g è continua in $(0, 0)$.
 - Determina per quali valori di α si ha che g è differenziabile in $(0, 0)$.
5. (5 punti) Sia $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ il primo quadrante del piano cartesiano. La funzione $\Phi: Q \rightarrow Q$ definita da $\Phi(x, y) := (xy, y + \frac{1}{x})$ è biettiva.
 - Calcola esplicitamente la funzione inversa di Φ .
 - Calcola le matrici Jacobiane sia della funzione Φ che della sua inversa.

6. (5 punti) Calcola l'integrale doppio $\iint_{\Omega} x^2 y dx dy$ dove Ω è la regione nel primo quadrante del piano cartesiano delimitata dai grafici delle funzioni $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 3 - \frac{1}{x}$, $y = 4 - \frac{1}{x}$. [Può essere utile considerare un cambio di coordinate basato sulle trasformazioni studiate nell'esercizio precedente.]