

**Analisi Matematica 1b - Ing. Elettronica e Informatica - (Foschi) - 8.9.2020**

1. (5 punti) Determina due numeri complessi la cui somma è  $2i$  e il cui prodotto è  $\sqrt{3}i$ .
2. (5 punti) Sia  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x) := \sqrt{x}$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $\sigma_n = \{x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}\}$  la suddivisione di  $[0, 1]$  formata dai punti  $x_{n,k} := \left(\frac{k}{n}\right)^2$ , con  $k = 0, 1, \dots, n$ . ( $\sigma_n$  suddivide  $[0, 1]$  in  $n$  intervalli.)
  - Calcola la somma superiore di Darboux  $S(n) := \bar{S}(f, \sigma_n)$ .
  - Calcola il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)$ .

[Può essere utile ricordare le formule:  $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$ .]

3. (5 punti) Determina per quale valore di  $k$  risulta essere nullo il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (1 - kx) \log(1 + x^2) dx.$$

4. (5 punti) Considera la funzione  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{x^4 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

- Determina per quali valori di  $\alpha$  si ha che  $g$  è continua in  $(0, 0)$ .
  - Determina per quali valori di  $\alpha$  si ha che  $g$  è differenziabile in  $(0, 0)$ .
5. (5 punti) Sia  $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$  il primo quadrante del piano cartesiano. La funzione  $\Phi: Q \rightarrow Q$  definita da  $\Phi(x, y) := (xy, y + \frac{1}{x})$  è biettiva.
    - Calcola esplicitamente la funzione inversa di  $\Phi$ .
    - Calcola le matrici Jacobiane sia della funzione  $\Phi$  che della sua inversa.

6. (5 punti) Calcola l'integrale doppio  $\iint_{\Omega} x^2 y dx dy$  dove  $\Omega$  è la regione nel primo quadrante del piano cartesiano delimitata dai grafici delle funzioni  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{2}{x}$ ,  $y = 3 - \frac{1}{x}$ ,  $y = 4 - \frac{1}{x}$ . [Può essere utile considerare un cambio di coordinate basato sulle trasformazioni studiate nell'esercizio precedente.]