

## Analisi Matematica 1b - Ing. Elettronica e Informatica - (Foschi) - 10.9.2019

nome e cognome:

matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (7 punti) Calcola la soluzione  $y(x)$  del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (1+x)y'' + y' = x^2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

[Suggerimento: osserva che l'equazione differenziale può essere vista come un'equazione del primo ordine per  $y'$ .]

2. (7 punti) Dato un numero complesso  $z \neq 0$ , indichiamo con  $\text{Log}(z)$  il suo logaritmo principale, ovvero  $\text{Log}(z)$  è la funzione che associa al numero complesso  $z$  l'unica soluzione  $w$  dell'equazione esponenziale  $e^w = z$  tale che  $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$ . Determina tutte le soluzioni  $z$  in campo complesso dell'equazione

$$(\text{Log}(z))^2 = 4i.$$

3. (7 punti) Considera la funzione  $F(x, y) = \frac{1}{y} - e^{-x/y}$  e il punto  $P = (0, 2)$ .

- Verifica che  $F$  è differenziabile intorno al punto  $P$ .
- Calcola il gradiente di  $F$  nel punto  $P$ .
- Scrivi l'equazione del piano tangente al grafico di  $F$  nel punto  $(P, F(P))$ .
- Calcola la derivata direzionale di  $F$  nel punto  $P$  nella direzione del vettore  $v = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

4. (7 punti) Siano  $L > \varepsilon > 0$ . Sia  $D_{\varepsilon, L}$  la regione (limitata) del piano cartesiano delimitata dalle rette di equazione  $x = 0$ ,  $y = \varepsilon$ ,  $y = L$  e dalla parabola  $x = y^2$ . Calcola il valore dell'integrale doppio

$$I(\varepsilon, L) := \iint_{D_{\varepsilon, L}} \left(\frac{1}{y} - e^{-x/y}\right) dx dy.$$

Come si comporta  $I(\varepsilon, L)$  quando  $L \rightarrow +\infty$  e  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ?

5. (7 punti) Determina per quali valori del parametro  $p > 0$  il seguente integrale generalizzato risulta essere convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{2p} + x^{p/2}} dx.$$