

Analisi Matematica 1b - Ing. Elettronica e Informatica - (Foschi) - 10.9.2019

nome e cognome:

matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (7 punti) Calcola la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (1+x)y'' + y' = x^2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

[Suggerimento: osserva che l'equazione differenziale può essere vista come un'equazione del primo ordine per y' .]

2. (7 punti) Dato un numero complesso $z \neq 0$, indichiamo con $\text{Log}(z)$ il suo logaritmo principale, ovvero $\text{Log}(z)$ è la funzione che associa al numero complesso z l'unica soluzione w dell'equazione esponenziale $e^w = z$ tale che $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$. Determina tutte le soluzioni z in campo complesso dell'equazione

$$(\text{Log}(z))^2 = 4i.$$

3. (7 punti) Considera la funzione $F(x, y) = \frac{1}{y} - e^{-x/y}$ e il punto $P = (0, 2)$.

- Verifica che F è differenziabile intorno al punto P .
- Calcola il gradiente di F nel punto P .
- Scrivi l'equazione del piano tangente al grafico di F nel punto $(P, F(P))$.
- Calcola la derivata direzionale di F nel punto P nella direzione del vettore $v = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. (7 punti) Siano $L > \varepsilon > 0$. Sia $D_{\varepsilon, L}$ la regione (limitata) del piano cartesiano delimitata dalle rette di equazione $x = 0$, $y = \varepsilon$, $y = L$ e dalla parabola $x = y^2$. Calcola il valore dell'integrale doppio

$$I(\varepsilon, L) := \iint_{D_{\varepsilon, L}} \left(\frac{1}{y} - e^{-x/y}\right) dx dy.$$

Come si comporta $I(\varepsilon, L)$ quando $L \rightarrow +\infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0^+$?

5. (7 punti) Determina per quali valori del parametro $p > 0$ il seguente integrale generalizzato risulta essere convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{2p} + x^{p/2}} dx.$$