Analisi Matematica 1B - Lezione 9

Classi di funzioni integrabili

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 9 aprile 2020)

In questa lezione vedremo come applicare i criteri di integrabilità visti nella scorsa lezione per verificare come quasiasi funzione limitata che possieda un minimo di regolarità sia effettivamente integrabile su intervalli limitati.

1 Integrabilità delle funzioni monotone

Teorema 1.1. *Ogni funzione monotona definita su un intervallo limitato è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso di funzioni non decrescenti (il caso per funzioni non crescenti è del tutto analogo). Supponiamo che $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sia una funzione non decrescente,

$$x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2), \qquad x_1, x_2 \in [a,b].$$

Consideriamo la suddivisione uniforme $\sigma_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, che scompone $[a,b]$ in n intervalli di uguale lunghezza,

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad \mathcal{L}(I_k) = |\sigma_n| = \frac{b-a}{n}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Siccome la funzione è non decrescente, su ciascun intervallo essa assume il suo valore minimo nell'estremo inferiore dell'intervallo e assume il suo valore massimo nell'estremo superiore dell'intervallo,

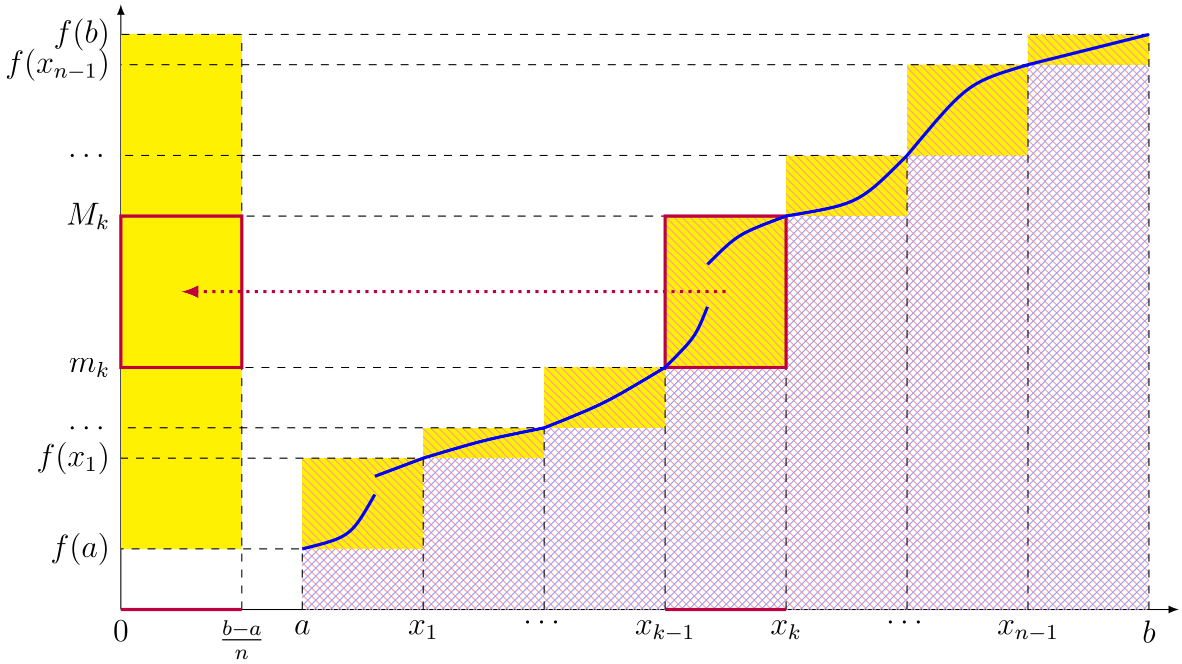
$$m_k = \inf_{I_k} f = f(x_{k-1}), \qquad M_k = \sup_{I_k} f = f(x_k).$$

La differenza tra la somma superiore e la somma inferiore relative a σ_n si riduce ad una somma telescopica facilmente calcolabile,

$$\overline{S}(f,\sigma_n) - \underline{S}(f,\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\mathcal{L}(I_k) = |\sigma_n| \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{n}.$$

Quando facciamo tendere $n \to +\infty$ otteniamo che questa differenza è infinitesima e dunque per uno dei criteri di integrabilità visti la scorsa lezione ne segue che f è integrabile su $[a, b]$.



□

Ad esempio, essendo monotone sono dunque integrabili:

- tutte le funzioni esponenziali, $x \mapsto b^x$, su ogni intervallo limitato;
- la funzione logaritmo, $\log(x)$, e le funzioni potenza, $x \mapsto x^p$, su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $]0, +\infty[$;
- la funzione seno su $[-\pi/2, \pi/2]$ e la funzione coseno su $[0, \pi]$;
- la funzione tangente su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $]-\pi/2, \pi/2[$;
- le funzioni arcoseno e arcocoseno su $[-1, 1]$;
- la funzione arcotangente su ogni intervallo limitato;
- la funzione segno, la funzione parte intera, le funzioni parte positiva e parte negativa, su ogni intervallo limitato.

2 Integrabilità di funzioni continue

Abbiamo visto (durante le leioni del primo semestre) che una funzione $f(x)$ si dice continua quando per ogni punto $x_\star$ del suo dominio si ha che

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom}(f), \quad |x - x_\star| < \delta \implies |f(x) - f(x_\star)| < \varepsilon.$$

Il valore di δ che appare in questa definizione, dipende dalla scelta di ε, ma può dipendere anche dal punto $x_\star$; quando il valore di δ può essere scelto in modo indipendente dalla scelta del punto $x_\star$ allora si dice che la continuità di f è uniforme.

Definizione 2.1. Una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ definita sul dominio $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice che è *uniformemente continua* su E quando

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E, \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Ovviamente ogni funzione uniformemente continua è continua, ma non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue.

Esempio 2.2.

- La funzione $f(x) = x^2$ è uniformemente continua su $[0, 1]$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, se scegliamo $\delta := \frac{1}{2}\varepsilon$, allora per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in [0, 1]$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ abbiamo
$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| = (x_1 + x_2) \cdot |x_1 - x_2| < 2 \cdot \delta = \varepsilon.$$
- La funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $[1, +\infty[$. Infatti, scegliamo ad esempio $\varepsilon = 1$, se supponiamo che esista un $\delta > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \geqslant 1$ si abbia
$$|x_1 - x_2| < \delta \implies \left|x_1^2 - x_2^2\right| < 1,$$
prendendo $x_1 = 1 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}\delta$ e $x_2 = 1 + \frac{1}{\delta}$, avremmo che dovrebbe essere
$$1 > \left(1 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}\delta\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^2 = 1 + \delta + \frac{1}{4}\delta^2,$$
ma ciò è impossibile.
- La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua su $[0, +\infty[$. Infatti, dato un $\varepsilon > 0$ scegliamo $\delta = \varepsilon^2$, se $0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 < x_2 + \delta$ allora quando $x_1 < \varepsilon^2$ abbiamo
$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \leqslant \sqrt{x_1} < \varepsilon,$$
mentre quando $x_1 \geqslant \varepsilon^2$ abbiamo
$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leqslant \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1}} < \frac{\delta}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Su intervalli chiusi e limitati i due concetti, continuità e uniforme continuità, coincidono.

Lemma 2.3. *Ogni funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.*

La dimostrazione di questo lemma si basa sulle proprietà di compattezza degli intervalli chiusi e limitati (come il fatto che ogni successione in un intervallo chiuso e limitato possiede una sottosuccessione convergente). Non riportiamo qui i dettagli. Vediamo invece come con altre ipotesi di regolarità, leggermente più forti della sola continuità, si può comunque recuperare l'uniforme continuità.

Definizione 2.4. Una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ definita sul dominio $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice che è *lipschitziana* su E quando esiste una costante $L \geqslant 0$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2|\,, \qquad \forall x_1, x_2 \in E.$$

La costante L si dice *costante di lipschitzianità.*

Esempio 2.5.

- La funzione $f(x) = x^2$ è lipschitziana su $[0,1]$ con costante di lipschitzianità $L = 2$. Infatti, per ogni $x_1, x_2 \in [0,1]$ si ha
$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| = (x_1 + x_2) \cdot |x_1 - x_2| \leqslant 2 \cdot |x_1 - x_2|\,.$$
- La funzione $f(x) = x^2$ non è lipschitziana su $[1, +\infty[$. Infatti, se esistesse una costante L di lipschitzianità, per ogni $x_1, x_2 \geqslant 1$ si avrebbe
$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| \leqslant L\,|x_1 - x_2|\,,$$
prendendo $x_1 = L + 2$ e $x_2 = L + 1$, avremmo che dovrebbe essere
$$2L + 3 = (L+2)^2 - (L+1)^2 \leqslant L\big((L+2) - (L+1)\big) = L,$$
ma ciò è impossibile.
- La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è lipschitziana su $[1, +\infty[$. Infatti, quando $1 \leqslant x_2 \leqslant x_1$ abbiamo
$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}(x_1 - x_2) \leqslant \frac{1}{2}(x_1 - x_2),$$
e dunque possiamo prendere $\frac{1}{2}$ come costante di lipschitzianità.
- La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è lipschitziana su $[0,1]$. Infatti, se esistesse una costante L di lipschitzianità, quando $0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant 1$ avremmo
$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \leqslant L(x_1 - x_2),$$
e scegliendo $x_1 = (1 + 2L)^{-2}$e $x_2 = \frac{1}{4}(1+2L)^{-2}$ otteniamo
$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1+2L)} &= \sqrt{(1+2L)^{-2}} - \sqrt{\frac{1}{4}(1+2L)^{-2}} \leqslant \\ &\leqslant L\left((1+2L)^{-2} - \frac{1}{4}(1+2L)^{-2}\right) = \frac{3L}{4(1+2L)^2},\end{aligned}$$
che equivale a $2(1 + 2L) \leqslant 3L$, cosa che non può essere vera.

Lemma 2.6. *Ogni funzione lipschitziana è anche uniformemente continua.*

Dimostrazione. Sia L una costante di lipschitzianità per la funzione f. Per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, quando $|x_1 - x_2| < \delta$ abbiamo

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2| < L\delta = \varepsilon.$$

□

Dalla definizione si deduce che una funzione è lipschitziana quando i suoi rapporti incrementali sono tutti limitati in valore assoluto dalla una costante. Il teorema di Lagrange ci dice che per funzioni derivabili su intervalli i rapporti incrementali coincidono con valori assunti dalla derivata; dunque la limitatezza della derivata implica la lipschitzianità della funzione. Una funzione si dice di classe C^1 quando è derivabile e la derivata è continua.

Lemma 2.7. *Ogni funzione di classe C^1 definita su un intervallo chiuso e limitato è lipschitziana.*

Dimostrazione. Sia $f(x)$ una funzione di classe C^1 definita sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Il valore assoluto della sua derivata $|f'(x)|$ è una funzione continua su $[a, b]$. Per il teorema di Weierstrass abbiamo che $|f'(x)|$ è una funzione limitata su $[a, b]$, in quanto possiede un punto di massimo; poniamo $L := \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 \neq x_2$, per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste un punto ξ compreso tra x_1 e x_2 tale che

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi),$$

e dunque

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant L\,|x_1 - x_2|\,.$$

□

La regolarità di classe C^1 è una condizione più forte della lipschitzianità; esistono funzioni lipschitziane che non sono derivabili, come ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ che non è derivabile nel punto $x = 0$, ma è lipschitziana con costante di lipschitzianità uguale a 1, in quanto

$$\big||x_1| - |x_2|\big| \leqslant |x_1 - x_2|\,.$$

Riassumendo, per una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, definita sull'iintervallo chiuso e limitato $[a, b]$, abbiamo la seguente gerarchia di condizioni di regolarità:

$$\text{regolarità } C^1 \implies \text{lipschitzianità} \implies \text{uniforme continuità} \iff \text{continuità}. \tag{1}$$

Esercizio 2.8. Verifica che le funzioni "parte positiva", $(x)_+ := \max\{x, 0\}$, e "parte negativa", $(x)_- := \max\{0, -x\}$, sono lipschitziane su $\mathbb{R}$. Qual'è la loro migliore costante di lipschitzianità?

Esercizio 2.9. Determina quali delle seguenti funzioni è di classe C^1, o lipschitziana, o uniformemente continua, o continua, sugli intervalli indicati.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$ su $]-\infty, 0]$ e su $[0, +\infty[$.

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (funzione parte intera) su $[0, 10]$.

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ su $]0, 1]$ e su $[1, +\infty[$.

4. $f(x) = \sqrt{\sin x}$ su $[0, \pi]$ e su $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

Lemma 2.10. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata definita sull'intervallo limitato I. Siano $M := \sup_I f$ e $m := \inf_I f$. Allora*

$$M - m = \sup_{x_1, x_2 \in I} |f(x_1) - f(x_2)| .$$

Dimostrazione. Sia $K := \sup_{x_1, x_2 \in I} |f(x_1) - f(x_2)|$.

Per ogni $x_1, x_2 \in I$ abbiamo $f(x_1) \leqslant M$ e $f(x_2) \geqslant m$, e dunque

$$f(x_1) - f(x_2) \leqslant M - m;$$

scambiando tra loro x_1 e x_2 abbiamo anche

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant M - m.$$

Quindi, per ogni $x_1, x_2 \in I$ abbiamo

$$\big| f(x_1) - f(x_2) \big| \leqslant M - m,$$

da cui segue che $K \leqslant M - m$.

Viceversa. Fissato $\varepsilon > 0$, siccome $M - \frac{1}{2}\varepsilon$ non è maggiorante dei valori di f esiste un $x_1 \in I$ tale che $f(x_1) > M - \frac{1}{2}\varepsilon$, e siccome $m + \frac{1}{2}\varepsilon$ non è minorante dei valori di f esiste un $x_2 \in I$ tale che $f(x_2) < m + \frac{1}{2}\varepsilon$. Allora

$$K \geqslant f(x_1) - f(x_2) > \Big(M - \frac{1}{2}\varepsilon\Big) - \big(m + \frac{1}{2}\varepsilon\big) = M - m - \varepsilon,$$

Dunque $K > M - m - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$; facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$ otteniamo che $K \geqslant M - m$. □

Teorema 2.11. *Ogni funzione uniformemente continua definita su un intervallo chiuso e limitato è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su $[a, b]$. Per la definizione di uniforme continuità, dato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}. \tag{2}$$

Consideriamo ora una suddivisione uniforme σ che scompone $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza,

$$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad [a, b] = \cup_{k=1}^n I_k, \quad I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad \mathcal{L}(I_k) = \frac{b - a}{n}.$$

Scegliamo n sufficientemente grande in modo che l'ampiezza della suddivisione sia minore di δ, ovvero

$$|\sigma| = \frac{b-a}{n} < \delta \iff n > \frac{b-a}{\delta}.$$

Su ciascun intervallo I_k poniamo $m_k := \inf_{I_k} f$ e $M_k := \sup_{I_k} f$. Siccome l'intervallo I_k ha una lunghezza minore di δ, due punti qualsiasi in I_k distano tra loro sempre meno di δ, quindi per il lemma 2.10 applicato ad f su I_k e utilizzando la condizione (2) di uniforme continuità, otteniamo che

$$M_k - m_k = \sup_{x_1, x_2 \in I_k} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Se ora calcoliamo la differenza tra la somma superiore e la somma inferiore troviamo

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, \mathcal{L}(I_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Per il criterio di integrabilità segue che f è integrabile. □

Per via delle implicazioni (1) sulle varie condizioni di regolarità, dal teorema segue come corollario che ogni funzione di classe C^1, o anche solo lipschitziana, o anche solo continua, definita su un intervallo chiuso e limitato, è integrabile secondo Riemann.

La continuità è quindi una condizione sufficiente per l'integrabilità, ma comunque non è una condizione necessaria. Ad esempio possiamo avere funzioni monotone che non sono continue, ma che sappiamo essere integrabili per via del teorema 1.1.

3 Integrabilità di funzioni composte

Teorema 3.1. *Sia $f\colon [a,b] \to [c,d]$ una funzione integrabile secondo Riemann definita sull'intervallo limitato $[a,b]$ che assume valori nell'intervallo limitato $[c,d]$. Sia $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora la funzione composta $g \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Sia $L > 0$ una costante di lipschitzianità della funzione g. Dato $\varepsilon > 0$, siccome f è integrabile, per i criteri di integrabilità sappiamo che esiste una suddivisione σ di $[a,b]$ tale che

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Indichiamo la suddivisione σ con la solita notazione

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad [a,b] = \cup_{k=1}^{n} I_k, \quad I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Vogliamo confrontare le somme di Darboux della funzione composta $g \circ f$ con quelle della funzione f. Per ogni intervallo I_k poniamo

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x), \quad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x), \qquad \widetilde{m}_k := \inf_{x \in I_k} g(f(x)), \quad \widetilde{M}_k := \sup_{x \in I_k} g(f(x)).$$

Per il lemma 2.10 e per la condizione di lipschitzianità di g abbiamo

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k = \sup_{x_1,x_2\in I_k} \big|g\big(f(x_1)\big) - g\big(f(x_2)\big)\big| \leqslant \sup_{x_1,x_2\in I_k} L\,|f(x_1) - f(x_2)| = \\ = L \sup_{x_1,x_2\in I_k} |f(x_1) - f(x_2)| = L(M_k - m_k).\end{aligned}$$

Otteniamo allora che

$$\begin{aligned}\overline{S}(g\circ f,\sigma) - \underline{S}(g\circ f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \left(\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k\right) \mathcal{L}(I_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} L\,(M_k - m_k)\,\mathcal{L}(I_k) = \\ = L \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\mathcal{L}(I_k) = L\left(\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma)\right) < L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Per il criterio di integrabilità segue che $g\circ f$ è integrabile. □

Corollario 3.2. *Se $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ allora sono integrabili anche le funzioni:*

- $|f(x)|$ *(valore assoluto di f),*
- $(f(x))_+$ *(parte positiva di f),*
- $(f(x))_-$ *(parte negativa di f).*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema 3.1 componendo f con le funzioni lipschitziane $g_1(t) := |t|$, $g_2(t) := (t)_+$, $g_3(t) := (t)_-$. □

Corollario 3.3. *Se $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ allora anche $(f(x))^2$ è integrabile.*

Dimostrazione. Se f è integrabile significa che è limitata; supponiamo che assuma valori compresi nel'intervallo $[m,M]$. Sull'intervallo chiuso e limitato $[m,M]$ la funzione $g(t) = t^2$ è lipschitziana (in quanto è di classe C^1). Per il teorema 3.1 la funzione composta di $g(f(x)) = (f(x))^2$ è integrabile. □

Esercizio 3.4. Spiega perché se $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ allora lo è anche $\mathrm{e}^{f(x)}$.

Esercizio 3.5. Sia $f(x)$ integrabile su $[a,b]$ e sia $m := \inf_{[a,b]} f$. Dimostra che se $m > 0$ allora $\frac{1}{f(x)}$ è integrabile su $[a,b]$.

Esercizio 3.6. Sia $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$. Sotto quali ipotesi su f puoi garantire che sia integrabile anche $\log(f(x))$?