Analisi Matematica 1B - Lezione 8

Criteri di integrabilità

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 3 aprile 2020)

Nella scorsa lezione abbiamo definito l'integrale di Riemann. Data una funzione **limitata** $f(x)$ definita su un intervallo **limitato** $[a, b]$ abbiamo visto che è sempre possibile definire l'integrale inferiore e l'integrale superiore di f su $[a, b]$,

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a,b]}} \underline{S}(f, \sigma), \qquad \overline{\int_a^b} f := \inf_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a,b]}} \overline{S}(f, \sigma),$$

dove le somme inferiori, $\underline{S}(f, \sigma)$, e le somme superiori, $\overline{S}(f, \sigma)$, sono definite come

$$\underline{S}(f, \sigma) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \qquad \overline{S}(f, \sigma) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

con $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ suddivisione che scompone $[a, b]$ in n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$, e i valori m_k e M_k dati da

$$m_k := \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \qquad M_k := \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Quando l'integrale inferiore coincide con l'integrale superiore la funzione f si dice integrabile secondo Riemann su $[a, b]$, e in tal caso definiamo l'integrale di Riemann di f su $[a, b]$ ponendo

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Abbiamo visto che non tutte le funzioni limitate definite su intervalli limitati sono integrabili. In questa lezione discutiamo alcuni criteri che ci aiutino a stabilire quando una funzione è integrabile.

1 Criteri di integrabilità

Per come abbiamo definito l'integrale di Riemann una funzione è integrabile quando il valore che riusciamo ad approssimare per difetto con le somme inferiori va a coincidere con il valore che riusciamo ad approssimare per eccesso con le somme superiori. Dunque abbiamo integrabilità quando è possibile avere una somma inferiore e una somma superiore arbitrariamente vicine.

Teorema 1.1. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata definita sull'intervallo limitato $[a,b]$. Le seguenti proposizioni sono tra loro equivalenti:*

(A) la funzione f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$;

(B) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione σ di $[a,b]$ per la quale si ha

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) < \varepsilon;$$

(C) esiste una successione $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[a,b]$ per la quale si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,\sigma_n) - \underline{S}(f,\sigma_n) = 0.$$

Dimostrazione. Vediamo l'implicazione (A) $\Longrightarrow$ (B). Supponiamo che f sia integrabile e sia $I := \int_a^b f$. Sia $\varepsilon > 0$. Siccome I coincide con l'integrale superiore di f, ovvero con il massimo dei minoranti delle somme superiori, avremo che $I + \frac{\varepsilon}{2}$ non è un minorante delle somme superiori, dunque esisterà una suddivisione σ_1 di $[a,b]$ tale che

$$\overline{S}(f,\sigma_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siccome I coincide anche con l'integrale inferiore di f, ovvero con il minimo dei maggioranti delle somme inferiori, avremo che $I - \frac{\varepsilon}{2}$ non è un maggiorante delle somme inferiori, dunque esisterà una suddivisione σ_2 di $[a,b]$ tale che

$$\underline{S}(f,\sigma_2) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo ora la suddivisione $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$; siccome σ è un raffinamento sia di σ_1 che di σ_2 abbiamo

$$\overline{S}(f,\sigma) \leqslant \overline{S}(f,\sigma_1), \qquad \underline{S}(f,\sigma) \geqslant \underline{S}(f,\sigma_2).$$

Mettendo insieme tutte queste disuguaglianze otteniamo

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) \leqslant \overline{S}(f,\sigma_1) - \underline{S}(f,\sigma_2) < \Big(I + \frac{\varepsilon}{2}\Big) - \Big(I - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon.$$

Vediamo l'implicazione (B) $\Longrightarrow$ (C). Per ogni $n \in \mathbb{N}$, scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ l'ipotesi (B) ci dice che esiste una suddivisione σ_n tale che

$$0 \leqslant \overline{S}(f,\sigma_n) - \underline{S}(f,\sigma_n) < \frac{1}{n}.$$

Quando $n \to +\infty$ abbiamo che $\frac{1}{n} \to 0$ e per il confronto a sandwich ne segue la tesi (C).

Vediamo l'implicazione (C) $\Longrightarrow$ (A). Dalla definizione di integrale inferiore e superiore abbiamo che

$$\underline{S}(f, \sigma_n) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{S}(f, \sigma_n),$$

e dunque

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{S}(f, \sigma_n) - \underline{S}(f, \sigma_n).$$

Per l'ipotesi (C) la quantità a destra tende a zero per $n \to +\infty$, per il confronto a sandwich ne segue che la quantità al centro è nulla, dunque $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ che significa che f è integrabile. $\square$

Nella situazione del punto (C) del teorema 1.1 possiamo dire anche qualche cosa di più.

Proposizione 1.2. *Sia f integrabile su $[a, b]$. Se $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di suddivisioni di $[a, b]$ per la quale si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f, \sigma_n) - \underline{S}(f, \sigma_n) = 0,$$

allora abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f, \sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f, \sigma_n) = \int_a^b f.$$

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo $\overline{S}_n := \overline{S}(f, \sigma_n)$ e $\underline{S}_n := \underline{S}(f, \sigma_n)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &\leqslant \overline{S}_n && \text{(integrale $\leqslant$ somme superiori)} \\
&= \big(\overline{S}_n - \underline{S}_n\big) + \underline{S}_n && \text{(aggiungo e tolgo $\underline{S}_n$)} \\
&\leqslant \big(\overline{S}_n - \underline{S}_n\big) + \int_a^b f, && \text{(somme inferiori $\leqslant$ integrale)}
\end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ e utilizzando il confronto a sandwich otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \int_a^b f,$$

e poi ricaviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n - \big(\overline{S}_n - \underline{S}_n\big) = \int_a^b f - 0 = \int_a^b f.$$

$\square$

Possiamo dare un'esempio di applicazione di quest'ultima proposizione riprendendo in mano alcune somme di Darboux che abbiamo calcolato nella scorsa lezione.

Esempio 1.3. Siano $L > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) := \mathrm{e}^x$ sull'intervallo $[0, L]$. Abbiamo calcolato nella scorsa lezione la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla suddivisione uniforme σ_n che decompone di $[0, L]$ in n intervalli di uguale lunghezza. Abbiamo ottenuto

$$\underline{S}_n := \underline{S}(f, \sigma_n) = \frac{L}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^L - 1}{\mathrm{e}^{\frac{L}{n}} - 1}, \qquad \overline{S}_n := \overline{S}(f, \sigma_n) = \mathrm{e}^{\frac{L}{n}} \cdot \frac{L}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^L - 1}{\mathrm{e}^{\frac{L}{n}} - 1} = \mathrm{e}^{\frac{L}{n}} \underline{S}(f, \sigma_n).$$

Se calcoliamo la differenza otteniamo

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \big(\mathrm{e}^{\frac{L}{n}} - 1\big)\underline{S}_n.$$

Il fattore $\mathrm{e}^{\frac{L}{n}} - 1$ è infinitesimo per $n \to +\infty$. La successione delle somme inferiori converge ad un limite finito,

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{S}_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{L}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{L}{n}} - 1}(\mathrm{e}^L - 1) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}(\mathrm{e}^L - 1) = \mathrm{e}^L - 1.$$

Ne segue che $\lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n - \underline{S}_n = 0$ e quindi per la proposizione 1.2 abbiamo

$$\int_0^L \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \underline{S}_n = \mathrm{e}^L - 1.$$

Esempio 1.4. Siano $L > 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione $f(x) := \frac{1}{x}$ sull'intervallo $[1, L]$. Abbiamo calcolato nella scorsa lezione la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla suddivisione σ_n che decompone di $[1, L]$ in n intervalli tramite punti che formano una progressione geometrica. Abbiamo ottenuto

$$\overline{S}_n := \overline{S}(f, \sigma_n) = n\left(L^{\frac{1}{n}} - 1\right), \qquad \underline{S}_n := \underline{S}(f, \sigma_n) = n\left(1 - L^{-\frac{1}{n}}\right) = L^{-\frac{1}{n}} \overline{S}_n.$$

Se calcoliamo la differenza otteniamo

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \big(1 - L^{-\frac{1}{n}}\big)\overline{S}_n.$$

Il fattore $1 - L^{-\frac{1}{n}}$ è infinitesimo per $n \to +\infty$. La successione delle somme superiori converge ad un limite finito,

$$\lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{L^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{L^x - 1}{x} = \log(L).$$

Ne segue che $\lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n - \underline{S}_n = 0$ e quindi per la proposizione 1.2 abbiamo

$$\int_1^L \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n = \log(L).$$

In questi ultimi due esempi siamo riusciti a calcolare il valore di integrali di Riemann tramite limiti di somme di Darboux. Ciò è stato possibile perché abbiamo considerato funzioni abbastanza semplici e scegliendo opportunamente le suddivisioni siamo riusciti a semplificare le sommatorie che definiscono le somme di Darboux. Si tratta di un procedimento piuttosto elaborato che richiede diversi calcoli ed è faticoso implementarlo per casi più generali. Vedremo più avanti, quando parleremo del teorema fondamentale del calcolo, che il calcolo degli integrali di Riemann si può semplificare notevolmente utilizzando la teoria del calcolo differenziale che abbiamo studiato nel corso del primo semestre. Per il momento è comunque istruttivo provare ad esercitarsi a calcolare alcuni integrali non troppo complicati basandoci sulla approssimazione con somme di Darboux.

Esercizio 1.5. Utilizzando i risultati ottenuti nell'esercizio proposto nella scorsa lezione, calcola i seguenti integrali di Riemann come limite di successioni di somme di Darboux:

$$\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 x^{-2} \,\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi/2} \cos(x) \,\mathrm{d}x.$$

Quando una funzione è integrabile per ottenere buone approssimazioni dell'integrale di Riemann è sufficiente prendere suddivisioni con ampiezza sufficientemente piccola.

Proposizione 1.6. *Sia f integrabile su $[a,b]$. Allora le somme inferiori $\underline{S}(f,\sigma)$ e le somme superiori $\overline{S}(f,\sigma)$ tendono al valore dell'integrale $\int_a^b f$ quando l'ampiezza della suddivisione σ di $[a,b]$ tende a zero,*

$$\lim_{|\sigma|\to 0^+} \underline{S}(f,\sigma) = \lim_{|\sigma|\to 0^+} \overline{S}(f,\sigma) = \int_a^b f,$$

dove il significato di questi limiti è equivalente a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni suddivisione σ di $[a,b]$ con ampiezza $|\sigma| < \delta$ si ha che

$$\int_a^b f - \underline{S}(f,\sigma) < \varepsilon, \qquad \overline{S}(f,\sigma) - \int_a^b f < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Siccome le quantità non negative $\int_a^b f - \underline{S}(f,\sigma)$ e $\overline{S}(f,\sigma) - \int_a^b f$ sono entrambe minori o uguali di $\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma)$ è sufficiente dimostrare che

$$\lim_{|\sigma|\to 0^+} \overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) = 0.$$

Se f è una funzione costante allora le somme superiori coincidono con le somme inferiori e il risultato sarebbe immediato. Poniamo $m := \inf_{[a,b]} f$ e $M := \sup_{[a,b]} f$; se f non è una funzione costante allora $M > m$. Sia $\varepsilon > 0$. Per il punto (B) del teorema 1.1 sappiamo che esiste una suddivisione σ_ε tale che

$$\overline{S}(f,\sigma_\varepsilon) - \underline{S}(f,\sigma_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia n_ε il numero di intervalli in cui viene decomposto l'intervallo $[a,b]$ dai punti di σ_ε; indichiamo con $p_0, p_1, \ldots, p_{n_\varepsilon}$ tali punti e con $J_1, \ldots, J_{n_\varepsilon}$ gli intervalli,

$$a = p_0 < p_1 < \cdots < p_{n_\varepsilon} = b, \qquad J_k := [p_{k-1}, p_k], \quad k = 1, \ldots, n_\varepsilon.$$

Poniamo

$$\widetilde{m}_k := \inf_{J_k} f, \qquad \widetilde{M}_k := \sup_{J_k} f, \qquad k = 1, 2, \dots, n_\varepsilon.$$

Scegliamo un $\delta > 0$ in funzione di ε ponendo

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon(M - m)}; \tag{1}$$

il motivo di questa scelta sarà chiarito più avanti. Sia ora σ una qualsiasi suddivisione di $[a, b]$ con ampiezza $|\sigma| < \delta$. Sia n il numero di intervalli in cui viene decomposto l'intervallo $[a, b]$ dai punti di σ; indichiamo con $x_0, x_1, \dots, x_n$ tali punti e con $I_1, \dots, I_n$ gli intervalli,

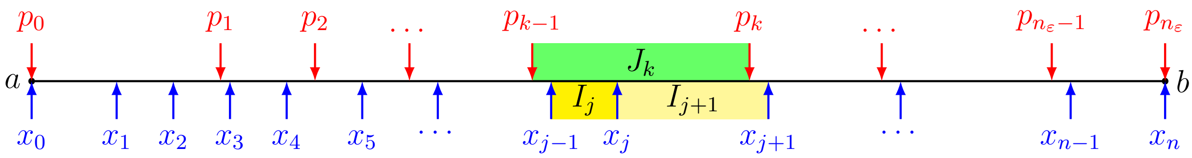
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad I_j := [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \dots, n.$$

Poniamo inoltre

$$m_j := \inf_{I_j} f, \qquad M_j := \sup_{I_j} f, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Alcuni degli intervalli I_j di σ possono essere contenuti interamente in uno degli intervalli J_k di σ_ε, sono quelli che non contengono alcun punto di σ_ε tra i propri punti interni; gli altri intervalli I_j di σ, quelli che hanno tra i propri punti interni contengono almeno un punto di σ_ε, si sovrappongono su più di uno degli intervalli J_k di σ_ε; suddividiamo gli indici j compresi tra 1 e n in due gruppi per distinguere tra queste due eventualità,

$$\begin{aligned} A &:= \big\{ j \in \{1, 2, \dots, n\} : \exists k \in \{1, 2, \dots, n_\varepsilon\} \text{ tale che } I_j \subseteq J_k \big\}, \\ B &:= \big\{ j \in \{1, 2, \dots, n\} : \exists k \in \{1, \dots, n_\varepsilon - 1\} \text{ tale che } p_k \text{ è interno a } I_j \big\}. \end{aligned}$$



$j \in A, \quad j+1 \in B$

Calcoliamo la differenza tra somma superiore e somma inferiore separando i contributi relativi agli intervalli corrispondenti agli indici in A da quelli relativi agli intervalli corrispondenti agli indici in B

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) &= \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) = S_A + S_B, \\ S_A &:= \sum_{j \in A} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}), \\ S_B &:= \sum_{j \in B} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}). \end{aligned}$$

Ad ogni $j \in A$ corrisponde un indice $k =: k(j)$ per il quale si ha $I_j \subseteq J_k$, e in tal caso avremo che $m_j \geqslant \widetilde{m}_k$ e $M_j \leqslant \widetilde{M}_k$ e dunque

$$M_j - m_j \leqslant \widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k.$$

Inoltre la somma delle lunghezze di tutti gli intervalli I_j contenuti nello stesso intervallo J_k non supera la lungheza di J_k. Raggruppando tutti gli indici $j \in A$ a cui corrisponde lo stesso indice k e poi sommando rispetto a k otteniamo,

$$S_A = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k(j)=k}} (M_j - m_j)\,(x_j - x_{j-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \left(\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k\right) \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ k(j)=k}} (x_j - x_{j-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \left(\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k\right)(p_k - p_{k-1}) = \overline{S}(f, \sigma_\varepsilon) - \underline{S}(f, \sigma_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Il numero di indici contenuti nell'insieme B è al massimo $n_\varepsilon - 1$ in quanto ad ogni punto p_k di σ_ε può corrispondere al più un solo indice j tale che p_k sia interno a I_j, ed i punti estremi p_0 e p_{n_ε} non possono essere interni. Per ogni $j = 1, \dots, n$, e dunque anche per ogni $j \in B$, abbiamo che

$$M_j - m_j \leqslant M - m, \qquad x_j - x_{j-1} \leqslant |\sigma| < \delta.$$

Con queste stime e per la definizione (1) di δ (ed è qui che si capisce il motivo di tale scelta) otteniamo

$$S_B \leqslant (n_\varepsilon - 1)(M - m)\delta = \frac{(n_\varepsilon - 1)(M - n)\varepsilon}{2n_\varepsilon(M - n)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Mettendo insieme le disuguaglianze (2) ed (3) arriviamo a concludere che

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) = S_A + S_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

per ogni suddivisione σ con ampiezza $|\sigma| < \delta$. □

Come conseguenza di questa proposizione abbiamo ad esempio che per funzioni integrabili le somme di Darboux calcolate con suddivisioni uniformi convergono sempre all'integrale al tendere all'infinito del numero di punti della suddivisione.

Corollario 1.7. *Sia f integrabile su $[a, b]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia σ_n la suddivisione uniforme di $[a, b]$, ovvero la suddivisione che scompone $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza. Allora abbiamo*

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{S}(f, \sigma_n) = \lim_{n \to +\infty} \overline{S}(f, \sigma_n) = \int_a^b f.$$

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione 1.6 dopo aver osservato che

$$\lim_{n\to+\infty} |\sigma_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} = 0.$$

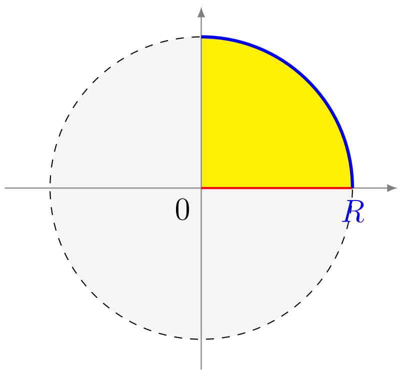
□

Si tenga presente comunque che le suddivisioni uniformi per essendo semplici da determinare, non è detto che siano sempre la scelta più conveniente o che renda più agevole il calcolo delle somme di Darboux.

2 Interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann

Per quanto possa apparire macchinosa la definizione di integrale di Riemann, ricordiamoci che esso ci fornisce uno strumento per il calcolo di aree di regioni del piano. Per alcune semplici tipologie di figure, ad esempio rettangoli, triangoli, trapezi, cerchi, sappiamo già calcolare l'area tramite formule semplici e dirette, lo abbiamo imparato alla scuola primaria. Proviamo a verificare tramite alcuni esempi che l'area calcolata con l'integrale di Riemann coincide effettivamente con quello che si ottiene applicando le note formule del calcolo di aree.

Esempio 2.1. Sappiamo che l'area di un cerchio di raggio R è πR^2. Sebbene un cerchio non sia identificabile con il sottografico di una funzione, possiamo considerare un quarto di cerchio ottenuto come intersezione tra un cerchio con centro nell'origine e il primo quadrante del piano cartesiano. Il settore circolare giallo è il sottografico della funzione che ha come grafico la curva blu nella figura qui sotto.



Dall'equazione cartesiana della circonferenza di centro l'origine e raggio R,

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

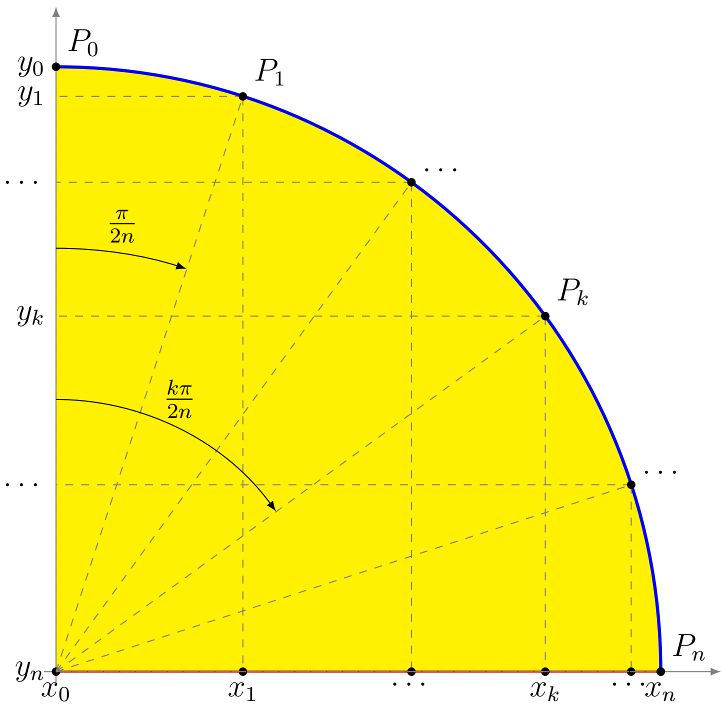
osservando che nel primo quadrante si ha $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, possiamo ricavare l'equazione in forma esplicita della curva blu in figura,

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant R.$$

La regione gialla coincide quindi con il sottografico della funzione $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$ definita per $x \in [0, R]$. L'area della regione gialla deve coincidere con il seguente integrale di Riemann,

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Proviamo a calcolarlo utilizzando approssimazioni con somme di Darboux. Cerchiamo un modo furbo per scegliere suddivisioni di $[0, R]$ in modo da rendere gestibile il calcolo. Dato $n \in \mathbb{N}$, suddividiamo prima l'arco di circonferenza blu in n archi di uguale ampiezza e poi proiettiamo i punti della suddivisione dell'arco ortogonalmente sull'asse delle ascisse in modo da ottenere una suddivisione dell'intervallo $[0, R]$. Per farlo ci basta dividere l'angolo retto in n angoli uguali di ampiezza $\frac{\pi}{2n}$.



Ordinando i punti sull'arco di circonferenza per ascissa crescente troviamo i punti

$$P_k = (x_k, y_k), \quad x_k := R \sin \frac{k\pi}{2n},\ y_k := R \cos \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Definiamo la suddivisione σ_n di $[0, R]$ prendendo le ascisse x_k dei punti P_k,

$$\sigma_n : 0 = x_0 < x_1 = R \sin \frac{\pi}{2n} < \cdots < x_k = R \sin \frac{k\pi}{2n} < \cdots < x_n = R.$$

Tale suddivisione scompone $[0, R]$ in n intervalli $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, con $k = 1, \ldots, n$. Utilizzando le formule di prostaferesi troviamo che la lunghezza di I_k è

$$\mathcal{L}(I_k) = x_k - x_{k-1} = R \left(\sin \frac{k\pi}{2n} - \sin \frac{(k-1)\pi}{2n} \right) = 2R \cos \frac{(2k-1)\pi}{4n} \sin \frac{\pi}{4n}.$$

Osserviamo che la lunghezza di questi intervalli decresce al crescere di k, pertanto il passo della suddivisione σ_n è dato dalla lunghezza del primo,

$$|\sigma_n| = \mathcal{L}(I_1) = \sin\frac{\pi}{2n},$$

e notiamo che si tratta di una quantità infinitesima per $n \to +\infty$. La funzione f è decrescente e dunque sull'intervallo I_k raggiunge il suo valore minimo in x_k,

$$m_k := \inf_{I_k} f = f(x_k) = y_k = R\cos\frac{k\pi}{2n}.$$

Siamo pronti per calcolare le somme inferiori (con l'aiuto delle formule di Werner),

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,\sigma_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k\mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} R\cos\frac{k\pi}{2n}\cdot 2R\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n} = \\
&= R^2\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n} 2\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n} = R^2\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n}\right) = \\
&= R^2\sin\frac{\pi}{4n}\left(n\cos\frac{\pi}{4n}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n}\right) = A_n + B_n,
\end{aligned}$$

dove

$$A_n := R^2 n\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n}, \qquad B_n := R^2\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n}.$$

Per la formula di duplicazione del seno abbiamo

$$A_n = \frac{R^2 n}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n} = \frac{R^2 n}{2}\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{R^2\pi}{4}, \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Per calcolare l'ultima sommatoria che definisce B_n ci riconduciamo alla somma di una progressione geometrica in campo complesso. Consideriamo la sequenza di numeri complessi z_k, con $k = 1,\dots,n$, definita da

$$z_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(4k-1)\pi}{4n}}.$$

Si tratta di una progressione geometrica in quanto i rapporti di termini consecutivi sono tutti uguali al variare di k,

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(4k+3)\pi}{4n}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(4k-1)\pi}{4n}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} = \omega,$$

dove la ragione ω non è altro che la radice fondamentale $2n$-esima dell'unità. Calcoliamo la somma dei z_k utilizzando la formula per le somme di progressioni geometriche,

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = z_1\cdot\frac{\omega^n-1}{\omega-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4n}}\cdot\frac{-1-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4n}}\cdot\frac{-2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Siccome abbiamo che $\mathrm{Re}(z_k) = \cos\frac{(4k-1)\pi}{4n}$ otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(4k-1)\pi}{4n} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big) = -\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$

e dunque ricaviamo

$$B_n = -R^2\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4n}\right)^2}{\sin\frac{\pi}{2n}} \approx -R^2\frac{\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = -\frac{R^2\pi}{8n}, \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Mettendo insieme le stime asintotiche per i due pezzi A_n e B_n e utilizzando la proposizione 1.6, arriviamo finalmente a calcolare il valore dell'integrale,

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f, \sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} A_n + \lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{\pi R^2}{4} + 0 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Il calcolo di questo integrale ci dice che un quarto del cerchio di raggio R ha area pari ad un quarto di πR^2, che è esattamente quello ci aspettavamo.

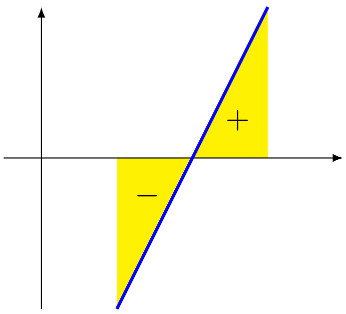
Esercizio 2.2. Considera la funzione $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ definita sull'intervallo $[0, 4]$. Il sottografico di f risulta essere un trapezio. Calcola l'area di tale trapezio utilizzando approssimazioni tramite somme di Darboux dell'integrale di Riemann

$$\int_0^4 \left(1 + \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x.$$

Verifica che il risultato ottenuto coincide con classica formula per l'area del trapezio:

$$\frac{\text{base maggiore} + \text{base minore}}{2} \cdot \text{altezza}.$$

Esercizio 2.3. Considera la funzione $f(x) = 2x - 4$ sull'intervallo $[1, 3]$. Il suo grafico è il segmento rettilineo che unisce i punti $(1, -2)$ e $(3, 2)$. La porzione di piano compresa tra il grafico e l'asse delle ascisse è formata da due triangoli congruenti, uno di essi si trova sotto l'asse delle ascisse, l'altro si trova sopra.



Sommando le loro aree in modo algebrico (con segno meno per la parte sotto l'asse delle ascisse e con il segno più sopra l'asse delle ascisse) si ottiene una somma nulla. Verifica, utilizzando approssimazioni tramite somme di Darboux, che risulta effettivamente

$$\int_1^3 (2x - 4)\,\mathrm{d}x = 0.$$