

Analisi Matematica 1B - Lezione 7

Somme di Darboux

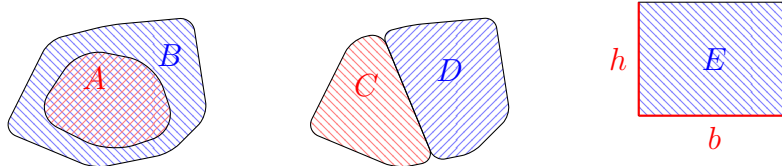
Damiano Foschi

(versione aggiornata il 18 giugno 2020)

Cominciamo ora un nuovo argomento, quello relativo alla teoria dell'integrale di Riemann. Il problema da cui partiamo è quello trovare un modo per misurare aree di regioni del piano, in particolare aree di regioni delimitate da grafici di funzioni. Costruiremo uno strumento matematico, l'integrale di Riemann, che ci permetterà di calcolare l'area della regione sottesa al grafico di una funzione definita su un intervallo. Scopriremo poi tra qualche lezione che il calcolo di questi integrali è intimamente collegato alla teoria del calcolo differenziale.

1 Il problema della misura di aree

Il problema del calcolo dell'area di regioni del piano consiste nell'individuare un modo per assegnare ad un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ del piano un numero non negativo $\mathcal{A}(D) \geq 0$ che rappresenti la misura della sua estensione. È ragionevole richiedere che questa misura rispetti alcuni principi fondamentali:



- principio di *monotonia*: se un insieme A è contenuto in un altro insieme B allora l'area di A non potrà essere più grande dell'area di B :

$$A \subseteq B \implies \mathcal{A}(A) \leq \mathcal{A}(B).$$

- principio di *additività*: se due insiemi sono disgiunti (ovvero hanno intersezione vuota) allora l'area della loro unione sarà la somma delle due aree:

$$C \cap D = \emptyset \implies \mathcal{A}(C \cup D) = \mathcal{A}(C) + \mathcal{A}(D).$$

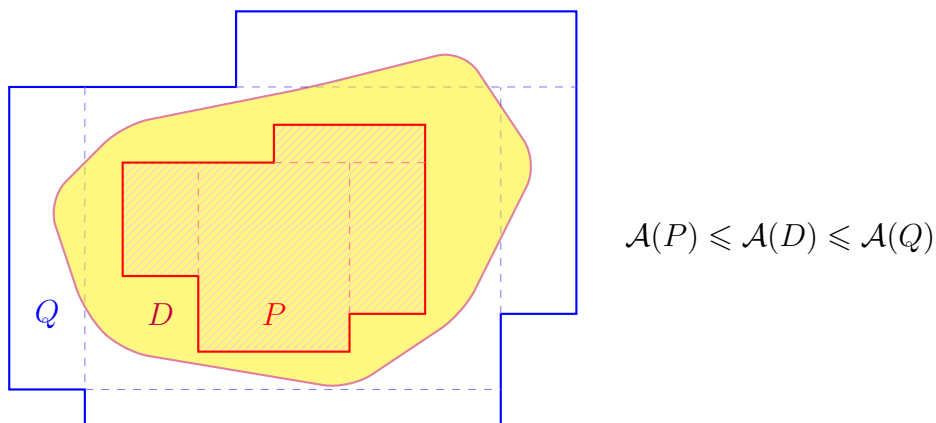
- principio di *uniformità*: se E è un qualsiasi rettangolo con base di lunghezza b e altezza di lunghezza h allora la sua area sarà $\mathcal{A}(E) = b \cdot h$:

$$\mathcal{A}(I \times J) = \mathcal{L}(I) \cdot \mathcal{L}(J),$$

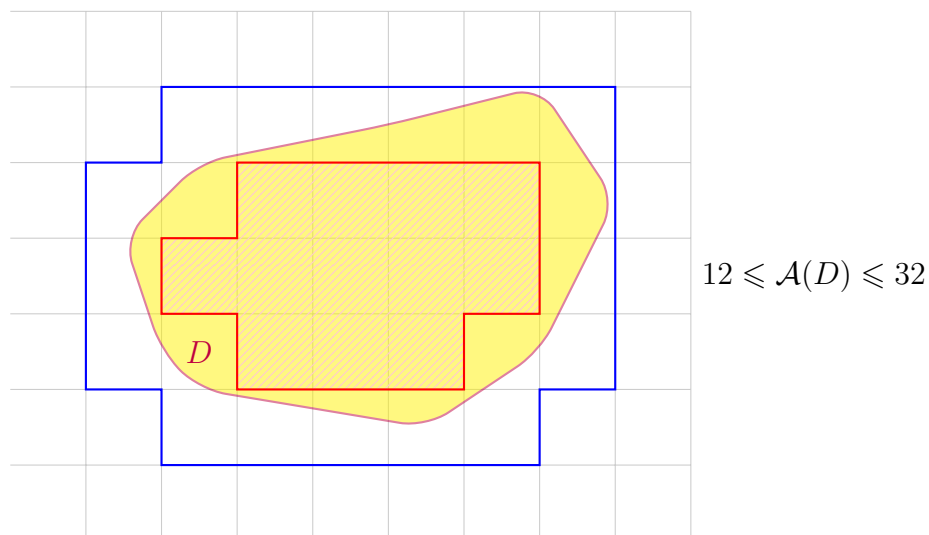
dove I e J sono intervalli di $\mathbb{R}$ e con $\mathcal{L}(I)$ e $\mathcal{L}(J)$ indichiamo la loro lunghezza.

Chiamiamo *plurirettangolo* una regione del piano ottenuta come unione di un numero finito di rettangoli. Come conseguenza di questi principi avremo che:

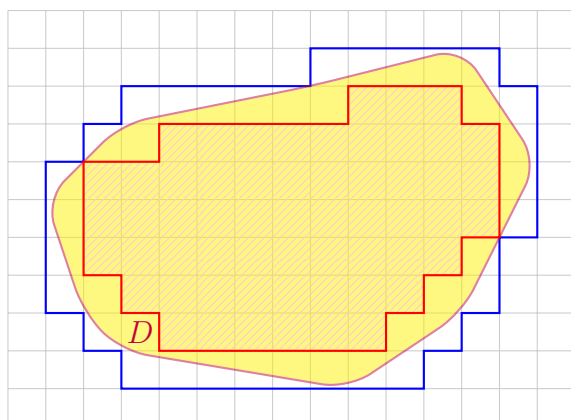
- calcolare l'area di un plurirettangolo è sempre possibile, basta decomporlo come unione di un numero finito di rettangoli disgiunti e fare la somma delle aree dei singoli rettangoli;
- se una certa regione D contiene un plurirettangolo P ed è contenuta in un plurirettangolo Q , anche se non sappiamo calcolare l'area di D , possiamo calcolare l'area di P che ci fornisce una stima per difetto e l'area di Q che ci fornisce una stima per eccesso.



Usando un foglio con una quadrettatura da 1 cm cerchiamo una stima dell'area della regione gialla. Utilizzando la quadrettatura costruiamo il più piccolo plurirettangolo che contenga la regione gialla e il più grande plurirettangolo contenuto nella regione gialla.



Il plurirettangolo rosso contenuto dentro alla regione gialla è formato da 12 quadrati di 1 cm di lato. Il plurirettangolo blu che contiene la regione gialla è formato da 32 quadrati di 1 cm di lato. Ne deduciamo che la regione gialla ha un'area compresa tra 12 e 32 cm². Possiamo migliorare le nostre stime per approssimare il valore dell'area gialla utilizzando una quadrettatura più fine. Ripetiamo l'operazione con una quadrettatura da 0.5 cm.



$$14.5 \leq \mathcal{A}(D) \leq 24$$

Il plurirettangolo rosso contenuto dentro alla regione gialla ora è formato da 58 quadrati di 0.5 cm di lato. Il plurirettangolo blu che contiene la regione gialla è formato da 96 quadrati di 0.5 cm di lato. Possiamo concludere che la regione gialla ha un'area compresa tra $58 \cdot 0.25 = 14.5$ cm² e $96 \cdot 0.25 = 24$ cm². Raffinando ulteriormente la quadrettatura prendendo quadratini con lato sempre più piccolo, la differenza tra la stima in eccesso e la stima in difetto si può ridurre ulteriormente. In questo modo possiamo produrre una successione decrescente di approssimazioni per eccesso e una successione crescente di approssimazioni per difetto; nel caso in cui le due successioni convergano ad un limite comune, il valore di tale limite indicherà il valore cercato per l'area della regione che si stiamo misurando.

L'idea di usare approssimazioni per eccesso e per difetto con aree di plurirettangoli sempre più fini sta alla base della costruzione del cosiddetto integrale di Riemann per la misura di aree di regioni sottostanti il grafico di funzioni (di cui parleremo in questa e nelle seguenti lezioni), o più in generale la cosiddetta misura di Peano-Jordan per la misura di aree di regioni del piano (a cui accenneremo più avanti quando parleremo di integrali doppi).

2 Suddivisioni di intervalli

Definizione 2.1. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, chiameremo *suddivisione* dell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ogni sottoinsieme di $[a, b]$ composto da un numero finito i punti che contenga anche gli estremi a e b . Quando $a < b$, ogni suddivisione σ di $[a, b]$, ordinando i suoi punti in modo crescente, può essere scritta nella forma

$$\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b;$$

tale suddivisione permette di scomporre l'intervallo $[a, b]$ nell'unione di n intervalli essenzialmente disgiunti (ovvero senza che due di essi abbiano punti interni in comune):

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k, \quad I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n.$$

Chiameremo *ampiezza* (o *passo*) della suddivisione σ la massima lunghezza degli intervalli di tale scomposizione, e la indicheremo con $|\sigma|$,

$$|\sigma| := \max_{k=1, \dots, n} \mathcal{L}(I_k) = \max_{k=1, \dots, n} x_k - x_{k-1}.$$

Date due suddivisioni σ_1 e σ_2 dello stesso intervallo $[a, b]$, diremo che σ_2 è un *raffinamento* di σ_1 quando $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$, ovvero quando ogni punto di σ_1 è anche un punto di σ_2 .

Osservazione 2.2. Ovviamente la somma totale delle lunghezze degli intervalli di una suddivisione coincide con la lunghezza dell'intervallo da cui si è partiti. Si tratta di una somma telescopica,

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a = \mathcal{L}([a, b]).$$

Esercizio 2.3. Spiega perché se σ_2 è un raffinamento di σ_1 allora l'ampiezza di σ_2 è minore o uguale all'ampiezza di σ_1 .

Esempio 2.4. Gli insiemi

$$\sigma_1 := \{1, 4, 5\}, \quad \sigma_2 := \{1, e, \pi, 5\}, \quad \sigma_3 := \{1, 2, e, 3, \pi, 4, 5\},$$

sono tutti e tre suddivisioni dell'intervallo $[1, 5]$, σ_1 non è un raffinamento di σ_2 perché non contiene π , σ_2 non è un raffinamento di σ_1 perché non contiene 4, σ_3 è un raffinamento sia di σ_1 che di σ_2 . Le ampiezze delle tre suddivisioni sono

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &= \max \{4 - 1, 5 - 4\} = 3, \\ |\sigma_2| &= \max \{e - 1, \pi - e, 5 - \pi\} = 5 - \pi, \\ |\sigma_3| &= \max \{2 - 1, e - 2, 3 - e, \pi - 3, 4 - \pi, 5 - 4\} = 1. \end{aligned}$$

Esempio 2.5. Dato un intervallo $[a, b]$ con $a < b$ e $n \in \mathbb{N}$, possiamo sempre individuare una suddivisione σ , che chiameremo *suddivisione uniforme*, che scompone l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza. Essa è formata da $n + 1$ punti che formano una progressione aritmetica con primo termine a e ultimo termine b , il passo di tale progressione, che coincide con l'ampiezza della suddivisione, sarà $\frac{b-a}{n}$ e dunque σ sarà formata dai punti

$$x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{n-k}{n} \cdot a + \frac{k}{n} \cdot b, \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n.$$

Ad esempio, la suddivisione uniforme di $[1, 5]$ in 5 intervalli avrà ampiezza $\frac{5-1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$ ed è data da

$$\sigma = \{1, 1.8, 2.6, 3.4, 4.2, 5\}.$$

Esercizio 2.6. Determina una suddivisione uniforme dell'intervallo $[1, 2]$ in 12 intervalli.

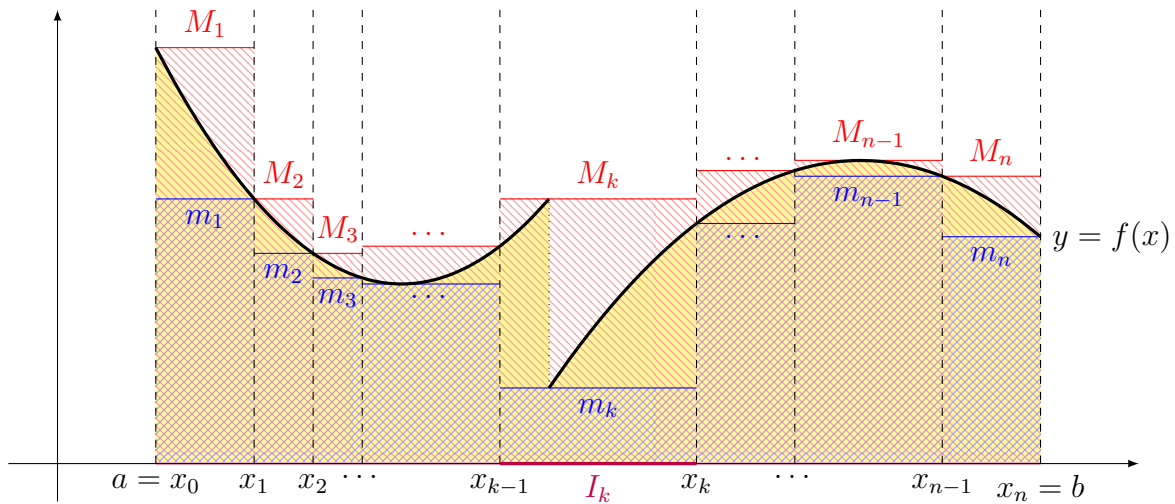
Esercizio 2.7. Determina una suddivisione dell'intervallo $[1, 2]$ in 12 intervalli in modo che i punti della suddivisione formino una progressione geometrica.

Esercizio 2.8. Verifica che l'insieme σ_n formato dalle parti reali delle radici n -esime (complesse) dell'unità è una suddivisione di $[-1, 1]$ se e solo se n è pari. Determina l'ampiezza di σ_n . Sotto quali condizioni su n_1 e n_2 si ha che σ_{n_1} è un raffinamento di σ_{n_2} ?

Date due suddivisioni di uno stesso intervallo, non è detto che una sia più fine dell'altra, ma è sempre possibile trovarne eventualmente un'altra che sia un raffinamento di entrambe.

Lemma 2.9. Se σ_1 e σ_2 sono due suddivisioni di $[a, b]$, la loro unione $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$ è ancora una suddivisione di $[a, b]$ ed è un raffinamento sia di σ_1 e sia di σ_2 .

3 Somme inferiori e superiori



Consideriamo ora una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita sull'intervallo limitato $[a, b]$ e richiediamo come unica ipotesi che f sia *limitata* (ovvero che assuma valori in un intervallo limitato di $\mathbb{R}$).

Definizione 3.1. Sia σ una suddivisione che scompone l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli,

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n.$$

Possiamo considerare un plurirettangolo formato dagli n rettangoli che hanno come base gli intervalli I_k e come altezza il valore m_k più grande possibile che rimanga al di sotto dei valori che la funzione assume su I_k , ovvero il massimo tra i minoranti dei valori di f su I_k , ovvero l'estremo inferiore di f su I_k ,

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x).$$

Misuriamo l'area di ciascuno di questi rettangoli in modo algebrico e non geometrico, ovvero considerando aree negative nel caso in cui l'altezza m_k sia negativa. Sommando algebricamente le aree di questi rettangoli otteniamo la *somma inferiore di Darboux* associata alla funzione f e alla suddivisione σ :

$$\underline{S}(f, \sigma) := \sum_{k=1}^n m_k \mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}).$$

Analogamente, possiamo costruire il plurirettangolo formato dagli n rettangoli che hanno come base gli intervalli I_k e come altezza il valore M_k più piccolo possibile che rimanga al di sopra dei valori che la funzione assume su I_k , ovvero il minimo tra i maggioranti dei valori di f su I_k , ovvero l'estremo superiore di f su I_k ,

$$M_k := \sup_{x \in I_k} f(x).$$

Sommando algebricamente le aree di questi rettangoli otteniamo la *somma superiore di Darboux* associata alla funzione f e alla suddivisione σ :

$$\overline{S}(f, \sigma) := \sum_{k=1}^n M_k \mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Osservazione 3.2. L'ipotesi che f sia limitata ci garantisce che esistano finiti i valori m_k e M_k che definiscono le altezze dei rettangoli che formano i plurirettangoli inferiore e superiore. Inoltre, se poniamo

$$m := \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M := \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

abbiamo che le altezze dei rettangoli costruiti per le somme inferiori e superiori sono contenute tutte nell'intervallo $[m, M]$,

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M, \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n,$$

ed inoltre anche i valori delle somme inferiori e delle somme superiori sono limitati dalle aree dei rettangoli che hanno come base $[a, b]$ e come altezze m e M ,

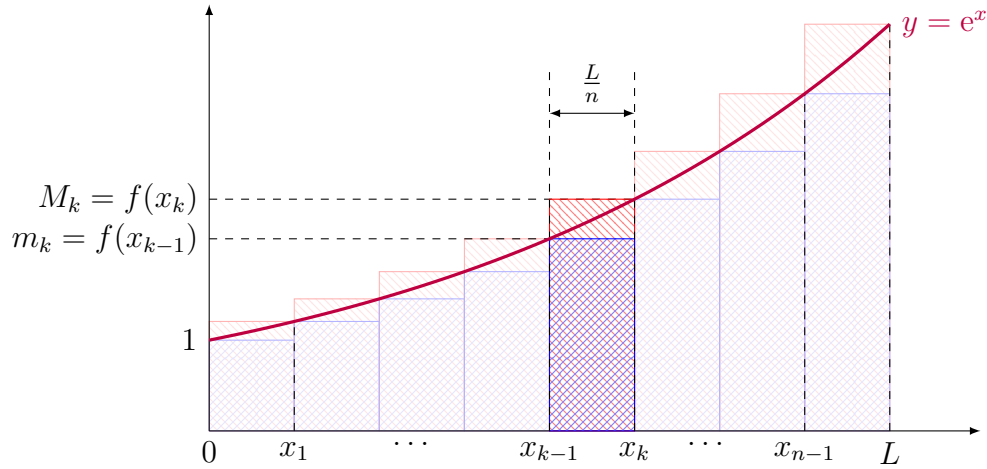
$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, \sigma) \leq \overline{S}(f, \sigma) \leq M(b-a).$$

Osservazione 3.3. Quando la funzione f è non negativa, le somme inferiori e delle somme superiori coincidono con l'area geometrica dei plurirettangoli inferiore e superiore, e dunque forniscono una stima per difetto e una stima per eccesso per il possibile valore dell'area del *sottografico* di f , ovvero della regione

$$S(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Vediamo qualche esempio di calcolo esplicito di somme inferiori e di somme superiori.

Esempio 3.4. Siano $L > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) := e^x$ sull'intervallo $[0, L]$. Calcoliamo la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla suddivisione uniforme σ_n che scompone di $[0, L]$ in n intervalli di uguale lunghezza.



I punti della suddivisione σ_n formano una progressione aritmetica con passo L/n e sono dati da

$$x_k := k \cdot \frac{L}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Osserviamo che i valori della funzione $f(x_k)$ formano una progressione geometrica di ragione $e^{\frac{L}{n}}$,

$$f(x_k) = e^{k \frac{L}{n}} = \left(e^{\frac{L}{n}}\right)^k.$$

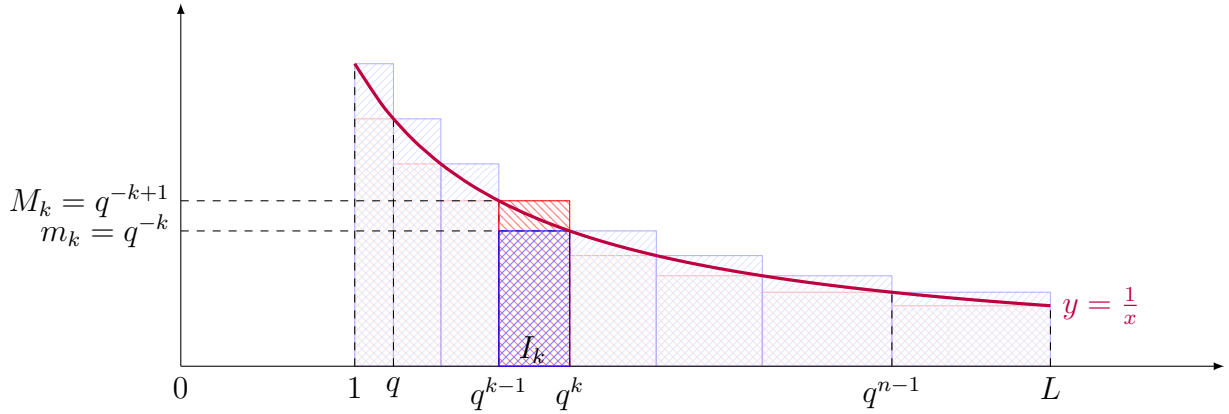
Essendo la funzione strettamente crescente abbiamo

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1}) = \left(e^{\frac{L}{n}}\right)^{k-1}, \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k) = e^{k \frac{L}{n}}.$$

Utilizzando le formule per le somme di progressioni geometriche possiamo semplificare il calcolo della somma inferiore e della somma superiore:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \sigma_n) &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{L}{n} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{L}{n}}\right)^{k-1} = \frac{L}{n} \cdot \frac{1 - e^L}{1 - e^{\frac{L}{n}}}, \\ \overline{S}(f, \sigma_n) &= \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \frac{L}{n} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{L}{n}}\right)^k = \frac{L}{n} \cdot e^{\frac{L}{n}} \cdot \frac{1 - e^L}{1 - e^{\frac{L}{n}}}. \end{aligned}$$

Esempio 3.5. Siano $L > 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione $f(x) := \frac{1}{x}$ sull'intervallo $[1, L]$. Calcoliamo la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla suddivisione σ_n che scompone di $[1, L]$ in n intervalli tramite punti che formano una progressione geometrica.



I punti della suddivisione σ_n formano una progressione geometrica di ragione

$$q := \sqrt[n]{\frac{L}{1}} = L^{\frac{1}{n}}$$

e sono dati da

$$x_k := L^{\frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Essendo la funzione strettamente decrescente abbiamo

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k) = L^{-\frac{k}{n}}, \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1}) = L^{-\frac{k-1}{n}}.$$

Con qualche semplificazione i calcoli della somma inferiore e della somma superiore diventano somme di n termini uguali:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \sigma_n) &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n L^{-\frac{k}{n}} \left(L^{\frac{k}{n}} - L^{\frac{k-1}{n}} \right) = \sum_{k=1}^n \left(1 - L^{-\frac{1}{n}} \right) = n \left(1 - L^{-\frac{1}{n}} \right), \\ \overline{S}(f, \sigma_n) &= \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n L^{-\frac{k-1}{n}} \left(L^{\frac{k}{n}} - L^{\frac{k-1}{n}} \right) = \sum_{k=1}^n \left(L^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = n \left(L^{\frac{1}{n}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Esercizio 3.6. Calcola, cercando di semplificare il più possibile i risultati, le somme inferiori $\underline{S}(f, \sigma)$ e le somme superiori $\overline{S}(f, \sigma)$ nei seguenti casi:

1. $f(x) = x$, $\sigma = \{0, 2, 6, 7\}$;
2. $f(x) = x^2$, σ partizione uniforme di $[1, 2]$ in n intervalli di uguale lunghezza;
3. $f(x) = x^2$, $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partizione di $[1, 2]$ in n intervalli in modo che i punti di σ formino una progressione geometrica;
4. $f(x) = x^{-2}$, $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partizione di $[1, 2]$ in n intervalli in modo che i punti di σ formino una progressione geometrica;
5. $f(x) = e^{-x}$, σ partizione uniforme di $[1, 2]$ in n intervalli di uguale lunghezza;

6. $f(x) = \cos(x)$, σ partizione uniforme di $[0, \pi/2]$ in n intervalli di uguale lunghezza. (I risultati ottenuti serviranno per calcolare alcuni integrali in un esercizio della prossima lezione.)

Raffinando le suddivisioni le somme inferiori possono solo crescere e le somme superiori possono solo decrescere.

Lemma 3.7. Siano σ_1 e σ_2 due suddivisioni di $[a, b]$. Se σ_2 è un raffinamento di σ_1 allora

$$\underline{S}(f, \sigma_1) \leq \underline{S}(f, \sigma_2) \leq \overline{S}(f, \sigma_2) \leq \overline{S}(f, \sigma_1).$$

Dimostrazione. Basta verificare cosa succede alle somme inferiori e superiori quando si aggiunge un punto alla suddivisione. Consideriamo un intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ e suddividiamolo in un due intervalli spezzandolo nel punto $x_\star \in I_k$,

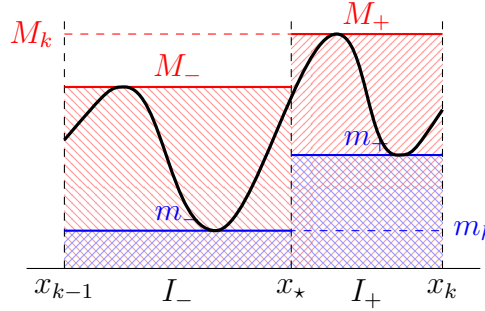
$$I_k = I_- \cup I_+, \quad I_- := [x_{k-1}, x_\star], \quad I_+ := [x_\star, x_k].$$

Poniamo

$$\begin{aligned} m_k &:= \inf_{x \in I_k} f(x), & m_- &:= \inf_{x \in I_-} f(x), & m_+ &:= \inf_{x \in I_+} f(x), \\ M_k &:= \sup_{x \in I_k} f(x), & M_- &:= \sup_{x \in I_-} f(x), & M_+ &:= \sup_{x \in I_+} f(x). \end{aligned}$$

Dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$, se $A \subseteq B$ allora $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$; essendo $I_-, I_+ \subseteq I_k$ abbiamo che

$$m_- \geq m_k, \quad m_+ \geq m_k, \quad M_- \leq M_k, \quad M_+ \leq M_k.$$



Otteniamo che la somma delle aree dei rettangoli inferiori costruiti su I_- e I_+ non è inferiore a quella del rettangolo inferiore costruito su I_k , e la somma delle aree dei rettangoli superiori costruiti su I_- e I_+ non è superiore a quella del rettangolo superiore costruito su I_k ,

$$\begin{aligned} m_- \mathcal{L}(I_-) + m_+ \mathcal{L}(I_+) &\geq m_k \mathcal{L}(I_-) + m_k \mathcal{L}(I_+) \geq m_k \mathcal{L}(I_k), \\ M_- \mathcal{L}(I_-) + M_+ \mathcal{L}(I_+) &\leq M_k \mathcal{L}(I_-) + M_k \mathcal{L}(I_+) \leq M_k \mathcal{L}(I_k). \end{aligned}$$

Dunque la somma inferiore costruita su una partizione σ sarà minore o uguale alla somma inferiore costruita sulla partizione più fine $\sigma \cup \{x_\star\}$, e la somma superiore costruita su una partizione σ sarà maggiore o uguale alla somma superiore costruita sulla partizione più fine $\sigma \cup \{x_\star\}$. $\square$

Siccome date due qualsiasi suddivisioni è sempre possibile trovarne un'altra che sia un raffinamento di entrambe, dal lemma segue che qualsiasi somma inferiore non supera mai qualsiasi altra somma superiore.

Proposizione 3.8. *Siano σ_1 e σ_2 due suddivisioni di $[a, b]$. Allora si ha sempre che*

$$\underline{S}(f, \sigma_1) \leq \overline{S}(f, \sigma_2).$$

Dimostrazione. Basta considerare la suddivisione $\tilde{\sigma} := \sigma_1 \cup \sigma_2$ che è un raffinamento sia di σ_1 che di σ_2 (lemma 2.9). Dal lemma 3.7 segue che

$$\underline{S}(f, \sigma_1) \leq \underline{S}(f, \tilde{\sigma}) \leq \overline{S}(f, \tilde{\sigma}) \leq \overline{S}(f, \sigma_2).$$

□

4 Definizione dell'integrale di Riemann

Ogni somma inferiore è minorante di tutte le somme superiori, dunque l'insieme delle somme superiori è inferiormente limitato. Indichiamo con $\overline{\Sigma}$ l'estremo inferiore delle somme superiori $\overline{S}(f, \sigma)$ al variare di σ tra tutte le possibili suddivisione di $[a, b]$,

$$\overline{\Sigma} := \inf_{\sigma} \overline{S}(f, \sigma).$$

Tale valore è il massimo dei minoranti delle somme superiori, dunque avremo che

$$\underline{S}(f, \sigma) \leq \overline{\Sigma},$$

per ogni suddivisione σ . Quindi l'insieme delle somme inferiori è superiormente limitato e la quantità $\overline{\Sigma}$ è maggiorante di tutte le somme inferiori. Indichiamo con $\underline{\Sigma}$ l'estremo superiore delle somme inferiori $\underline{S}(f, \sigma)$ al variare della suddivisione σ ,

$$\underline{\Sigma} := \sup_{\sigma} \underline{S}(f, \sigma).$$

Tale valore è il minimo dei maggioranti delle somme inferiori, dunque avremo che

$$\underline{\Sigma} \leq \overline{\Sigma}.$$

Definizione 4.1. Quando f è una funzione limitata definita su un intervallo limitato i valori $\underline{\Sigma}$ e $\overline{\Sigma}$ esistono sempre e sono finiti e si dicono, rispettivamente, *integrale inferiore* e *integrale superiore* di f su $[a, b]$. Li indichiamo con i simboli

$$\int_a^b f := \underline{\Sigma} = \sup_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a, b]}} \underline{S}(f, \sigma), \quad \overline{\int_a^b f} := \overline{\Sigma} = \inf_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a, b]}} \overline{S}(f, \sigma).$$

Osservazione 4.2. Quando f è una funzione nonnegativa, proseguendo le considerazioni fatte nell'osservazione 3.3, abbiamo che l'integrale inferiore $\int_a^b f$ rappresenta la migliore approssimazione per difetto per l'area del sottografico di f che deriva dalle stime per difetto date dalle somme inferiori, mentre l'integrale superiore $\overline{\int_a^b f}$ rappresenta la migliore approssimazione per eccesso per l'area del sottografico di f che deriva dalle stime per eccesso date dalle somme superiori.

Abbiamo sempre che $\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}$; può succedere in alcuni casi che i due valori siano effettivamente uno strettamente più piccolo dell'altro.

Esempio 4.3 (Funzione di Dirichlet). Consideriamo la funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ che vale 1 nei punti razionali e 0 nei punti irrazionali dell'intervallo $[0, 1]$,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Siccome ogni intervallo non degenere di $\mathbb{R}$ contiene sempre sia punti razionali che punti irrazionali abbiamo che su ogni intervallo non degenere contenuto in $[0, 1]$ la funzione f assume sempre sia il valore 0 che il valore 1. Dunque, per qualsiasi suddivisione σ che scompone $[0, 1]$ negli intervalli $(I_k)_{k=1, \dots, n}$, avremo che le altezze dei rettangoli per le somme inferiori e superiori saranno

$$m_k = \inf_{I_k} f = \min \{0, 1\} = 0, \quad M_k = \sup_{I_k} f = \max \{0, 1\} = 1.$$

Otteniamo così che

$$\underline{S}(f, \sigma) = \sum_k 0\mathcal{L}(I_k) = 0\mathcal{L}([0, 1]) = 0, \quad \overline{S}(f, \sigma) = \sum_k 1\mathcal{L}(I_k) = 1\mathcal{L}([0, 1]) = 1,$$

da cui segue che

$$\underline{\int_0^1} f = 0 < \overline{\int_0^1} f = 1.$$

Definizione 4.4. Data una funzione f limitata e definita sull'intervallo limitato $[a, b]$ diremo che la funzione f è *integrabile secondo Riemann* sull'intervallo $[a, b]$, quando i valori dell'integrale inferiore e dell'integrale superiore di f su $[a, b]$ coincidono e questo valore comune definisce quello che chiameremo *integrale di Riemann* della funzione f su $[a, b]$, e che indicheremo con $\int_a^b f$, oppure, per metter meglio in evidenza quale variabile consideriamo per la funzione integranda, con $\int_a^b f(x) dx$. Dunque,

$$\int_a^b f(x) dx := \underline{\int_a^b} f = \sup_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a, b]}} \underline{S}(f, \sigma) = \overline{\int_a^b} f = \inf_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a, b]}} \overline{S}(f, \sigma),$$

quando queste quantità coincidono.

Osservazione 4.5. Proseguendo le considerazioni fatte nell'osservazione 4.2, abbiamo che quando f è non negativa ed è integrabile, l'integrale di Riemann $\int_a^b f$ ci fornisce la misura esatta dell'area del sottografico di f .

Esempio 4.6. Le funzioni costanti su intervalli limitati sono sempre integrabili. Dato $c \in \mathbb{R}$, sia $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$. Siccome la funzione assume sempre e solo il valore c , qualsiasi sia la partizione σ che scompone $[a, b]$ negli intervalli $(I_k)_{k=1, \dots, n}$, avremo sempre che

$$m_k = \inf_{I_k} f = M_k = \sup_{I_k} f = c,$$

da cui segue che

$$\underline{S}(f, \sigma) = \overline{S}(f, \sigma) = \sum_k c \cdot \mathcal{L}(I_k) = c\mathcal{L}([a, b]) = c(b - a).$$

Dunque,

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$

Quando $c > 0$ il sottografico di f coincide con un rettangolo e sappiamo bene, senza bisogno di integrali, che la sua area si ottiene dal prodotto della lunghezza di base, $b - a$, per l'altezza c .

La funzione di Dirichlet descritta nell'esempio 4.3 non è una funzione integrabile, in quanto l'integrale inferiore e l'integrale superiore, pur essendo entrambi finiti non coincidono.

Osservazione 4.7. L'integrabilità secondo Riemann richiede come ipotesi necessaria che la funzione integranda sia una funzione limitata e che l'intervallo di integrazione sia limitato. Se queste ipotesi non sono verificate allora succede che qualche rettangolo utilizzato nel calcolo per le somme inferiori o superiori abbia area infinita e dunque non diventa possibile poter definire in modo finito i valori dell'integrale.

Esempio 4.8. Consideriamo la funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Data una qualsiasi partizione σ formata dai punti $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < 1$, sul primo intervallo abbiamo che

$$M_1 := \sup_{x \in [0, x_1]} f(x) = +\infty,$$

da cui segue che $\overline{S}(f, \sigma) = +\infty$. La funzione $1/x$ non è integrabile secondo Riemann su $]0, 1]$.

Esempio 4.9. Consideriamo la funzione $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Se suddividiamo l'intervallo $[1, +\infty[$ in un numero finito di intervalli, almeno uno di questi dovrà comunque avere lunghezza infinita e quindi, siccome è positiva ne segue che anche in questo caso le somme superiori risulterebbero con valore $+\infty$. La funzione $1/x$ non è integrabile secondo Riemann su $[1, +\infty[$.