Analisi Matematica 1B - Lezione 6

Analisi di funzioni a valori complessi

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 27 marzo 2020)

In questa lezione faremo alcuni commenti e osservazioni riguardanti funzioni a valori complessi e/o dipendenti da una variabile complessa. Cercheremo di capire se alcuni concetti e risultati che abbiamo studiato durante l'insegnamento di Analisi Matemtica 1A per funzioni reali di variabile reale possono essere considerati e se rimangono validi quando ci spostiamo nel campo complesso.

1 Funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

Poiché ogni numero complesso è rappresentato da due numeri reali, ogni funzione a valori complessi può essere rappresentata da due funzioni a valori reali. Consideriamo una funzione di variabile reale e a valori complessi, $F\colon E \to \mathbb{C}$ definita su un dominio $E \subseteq \mathbb{R}$. Per ogni punto $t \in E$ abbiamo un valore $F(t) \in \mathbb{C}$. Se definiamo le due funzioni $A, B\colon E \to \mathbb{R}$ ponendo $A(t) = \mathrm{Re}(F(t))$ e $B(t) = \mathrm{Im}(F(t))$ per ogni $t \in E$, otteniamo che

$$F(t) = A(t) + \mathrm{i}B(t), \qquad \forall t \in E.$$

Al variare di $t \in E$ il valore $F(t)$ descrive un punto che si muove nel piano complesso, l'insieme di questi punti forma l'immagine (non il grafico) della funzione,

$$F(E) := \{F(t)\colon t \in E\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Il grafico di F è contenuto in uno spazio tridimensionale,

$$\mathrm{grafico}(F) := \{(t, F(t))\colon t \in E\} \subseteq E \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^3.$$

Per visualizzare F possiamo anche considerare i grafici di A e B, che sono contenuti nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

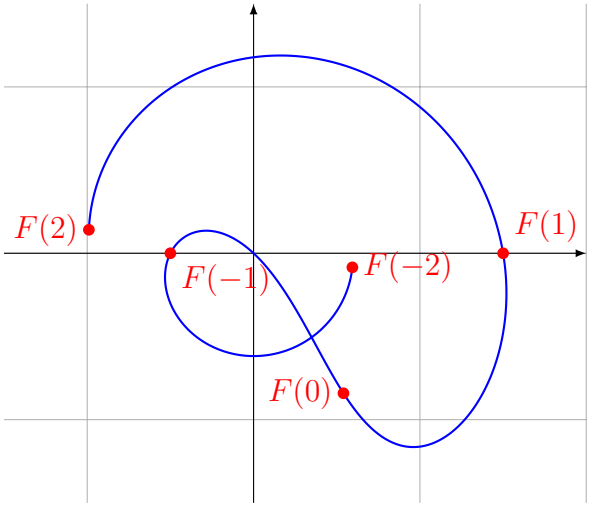
Esempio 1.1. Consideriamo la funzione $F\colon [-2,2] \to \mathbb{C}$ definita da

$$F(t) := \frac{1+2t}{1+t^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t^2-1)}.$$

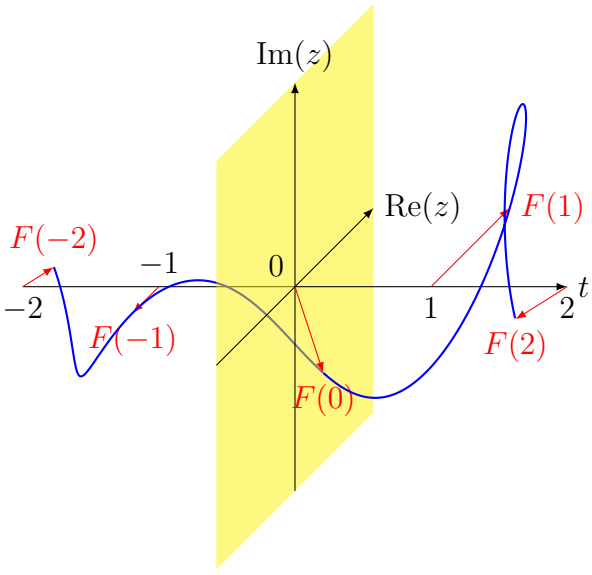
La sua parte reale e la sua parte immaginaria sono le funzioni $A, B\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ definite da

$$A(t) := \frac{1+2t}{1+t^2}\cos(t^2-1), \qquad\qquad B(t) := \frac{1+2t}{1+t^2}\sin(t^2-1).$$

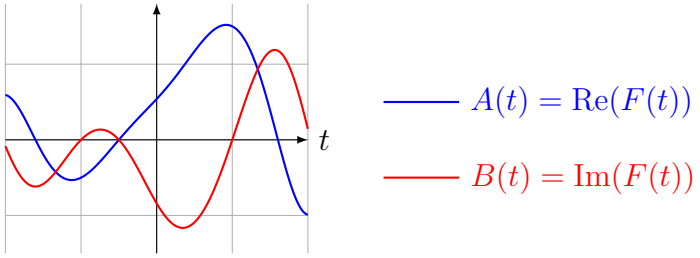
L'immagine di F nel piano complesso è descritta dalla curva blu nella seguente figura:



Il grafico di F è rappresentato da una curva nello spazio $\mathbb{R}^3$:



I grafici di $A = \mathrm{Re}(F)$ e $B = \mathrm{Im}(F)$ possono essere rappresentati sul piano:



Esercizio 1.2. Eventualmente con l'aiuto di programmi al calcolatore, prova a visualizzare in modo grafico le seguenti funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:

$$F(t) = t^2 + \mathrm{i}t^3; \qquad F(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin(t)};$$
$$F(t) = \frac{1}{1+\mathrm{i}t}; \qquad F(t) = \mathrm{Log}\big(2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big).$$

Possiamo considerare anche limiti di funzioni a valori complessi allo stesso modo dei limiti di funzioni a valori reali,

Proposizione 1.3. *Sia $F\colon E \to \mathbb{C}$ con parte reale $A = \mathrm{Re}(F)$ e parte immaginaria $B = \mathrm{Im}(F)$. Sia $t_\star$ un punto di accumulazione del dominio $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $z_\star = a_\star + \mathrm{i}b_\star \in \mathbb{C}$, con $a_\star, b_\star \in \mathbb{R}$. Allora si ha che*

$$\lim_{t\to t_\star} F(t) = z_\star \iff \lim_{t\to t_\star} A(t) = a_\star \text{ e } \lim_{t\to t_\star} B(t) = b_\star.$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione useremo le disuguaglianze

$$\max\big\{|a|, |b|\big\} \leqslant |a+ib| \leqslant |a| + |b|, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Supponiamo che $\lim_{t\to t_\star} F(t) = z_\star$. Ciò equivale a dire che la differenza $F(t) - z_\star$ è infinitesima per $t \to t_\star$, ovvero che

$$\lim_{t\to t_\star} \big|F(t) - z_\star\big| = 0.$$

Siccome abbiamo che

$$0 \leqslant \max\big\{|A(t) - a_\star|, |B(t) - b_\star|\big\} \leqslant |F(t) - z_\star|,$$

per confronto segue che anche $A(t) - a_\star$ e $B(t) - b_\star$ sono infinitesime per $t \to t_\star$, e dunque valgono i limiti

$$\lim_{t\to t_\star} A(t) = a_\star \text{ e } \lim_{t\to t_\star} B(t) = b_\star. \tag{1}$$

Viceversa, supponiamo che valgano i limiti (1). Siccome abbiamo che

$$0 \leqslant |F(t) - z_\star| \leqslant |A(t) - a_\star| + |B(t) - b_\star|,$$

Siccome le due quantità della somma a destra sono infinitesime per $t \to t_\star$, per confronto segue che anche $F(t) - z_\star$ è infinitesima e dunque $\lim_{t\to t_\star} F(t) = z_\star$. □

Osservazione 1.4. La differenza con il caso reale si ha per limiti con valore infinito. Mentre in $\mathbb{R}$ avevamo solo due possibilità per tendere "all'infinito", ovvero verso $-\infty$ oppure $+\infty$, in $\mathbb{C}$ ci sono tanti modi e tante direzioni per fuggire all'infinito, perciò non è ben chiaro dire cosa significhi che una quantità complessa tende a $\pm\infty$, possiamo semplicemente dire che tende a "∞" quando il suo modulo (che è una quantità reale) tende a $+\infty$:

$$\lim_{t\to t_\star} F(t) = \infty \iff \lim_{t\to t_\star} |F(t)| = +\infty.$$

Esempio 1.5. Calcoliamo il limite di $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{t}$ per $t \to 0$. Separando parte reale e parte immaginaria abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{t} &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{\cos(t)-1}{t} + \mathrm{i}\frac{\sin(t)}{t} \right) = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t} + \mathrm{i} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \\ &= 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{i}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.6. Calcola il limite $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\operatorname{Log}(1+\mathrm{i}t)$, dove Log indica la funzione logaritmo principale.

Esercizio 1.7. Dato un quasiasi numero complesso w calcola il limite $\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{tw}-1}{t}$.

Non è comunque necessario per calcolare limiti separare ogni volta parte reale e parte immaginaria. Si verifica facilmente che anche per limiti di funzioni a valori complessi valgono le regole del calcolo algebrico dei limiti di funzioni reali; quando non ci sono forme indeterminate: il limite della somma è la somma dei limiti, il limite del prodotto è il prodotto dei limiti.

Anche le definizioni delle relazioni asintotiche mantengono il loro significato invariato in campo complesso: se $F(t)$ e $G(t)$ sono due funzioni a valori complessi diciamo che $F(t)$ è asintoticamente equivalente a $G(t)$ per $t \to t_\star$ quando il loro rapporto tende a 1,

$$F(t) \approx G(t) \text{ per } t \to t_\star \iff \lim_{t\to t_\star} \frac{F(t)}{G(t)} = 1,$$

e diciamo che $F(t)$ è un "o-piccolo" di $G(t)$ per $t \to t_\star$ quando il loro rapporto tende a 0,

$$F(t) = o\big(G(t)\big) \text{ per } t \to t_\star \iff \lim_{t\to t_\star} \frac{F(t)}{G(t)} = 0.$$

Esempio 1.8. Calcoliamo il limite di $\frac{2t-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}t}$ per $t \to +\infty$. Se mettiamo in evidenza i termini dominanti al numeratore e al denominatore abbiamo

$$\frac{2t-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}t} = \frac{t\left(2-\frac{\mathrm{i}}{t}\right)}{t\left(\frac{3}{t}+\mathrm{i}\right)} = \frac{2-\frac{\mathrm{i}}{t}}{\frac{3}{t}+\mathrm{i}}.$$

I termini $\frac{\mathrm{i}}{t}$ e $\frac{3}{t}$ sono infinitesmi per $t \to +\infty$ e dunque

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{2t-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2-o(1)}{o(1)+\mathrm{i}} = \frac{2}{\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}.$$

Esercizio 1.9. Calcola i seguenti limiti per $t \to 0$, $t \to 1$ e $t \to +\infty$ per la seguente funzione di variabile reale a valori complessi:

$$F(t) = \frac{3t^3 + \mathrm{i}t^2 + 2t - 5\mathrm{i}}{\mathrm{i}t^3 - t^2 + 2\mathrm{i}t + 3}.$$

Facendo limiti di rapporti incrementali possiamo anche definire derivate di funzioni di variabile reale a valori complessi. Manteniamo le definizioni per F, A, B, con $F = A + \mathrm{i}B$, introdotte all'inizio della sezione. Possiamo definire la derivata di F in $t_\star$ utilizzando la definizione che già conosciamo in campo reale

$$F'(t_\star) = \lim_{t \to t_\star} \frac{F(t) - F(t_\star)}{t - t_\star}.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene facilmente che

$$F'(t_\star) = A'(t_\star) + \mathrm{i}B'(t_\star).$$

Ad esempio, quando abbiamo introdotto l'esponenziale ad esponente immaginario, tramite questo procedimento abbiamo calcolato la derivata di e^{it} e verificato che coincide con $\mathrm{i}\mathrm{e}^{it}$.

Esempio 1.10. Sia $F(t) = \frac{1}{1+\mathrm{i}t}$. Determiniamo parte reale e parte immaginaria,

$$A(t) := \mathrm{Re}\big(F(t)\big) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad B(t) := \mathrm{Im}\big(F(t)\big) = -\frac{t}{1+t^2}.$$

Abbiamo

$$A'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \qquad B'(t) = \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}.$$

E dunque la derivata di F è

$$F'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} + \mathrm{i}\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}.$$

Ma abbiamo anche

$$1 + t^2 = |1 + \mathrm{i}t|^2 = (1 + \mathrm{i}t)(1 - \mathrm{i}t), \qquad -2t + \mathrm{i}(t^2 - 1) = -\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}t)^2.$$

Otteniamo allora esattamente quello che avremmo ottenuto se avessimo calcolato la derivata trattando l'unità immaginaria i come se fosse un numero reale,

$$F'(t) = \frac{-2t + \mathrm{i}(t^2-1)}{(1+t^2)^2} = \frac{-\mathrm{i}(1-\mathrm{i}t)^2}{(1+\mathrm{i}t)^2(1-\mathrm{i}t)^2} = \frac{-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i}t)^2}.$$

Esercizio 1.11. Calcola la derivata delle seguenti funzioni.

$$F(t) = t^2 + \mathrm{i}t^3; \qquad F(t) = \mathrm{Log}(1 + \mathrm{i}t);$$
$$F(t) = \frac{t^2 - \mathrm{i}}{t^2 + \mathrm{i}}; \qquad F(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{t}}.$$

Esercizio 1.12. Verifica che per funzioni a valori complessi di variabile reale continuano a valere le usuali regole di calcolo per le derivate del prodotto e del rapporto:

$$D[f \cdot g] = f'g + fg', \qquad D[f/g] = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

2 Funzioni da $\mathbb{C}$ ad $\mathbb{R}$

Consideriamo ora il caso di funzioni di variabile complessa a valori reali. Funzioni che hanno dominio nel campo complesso di fatto sono funzioni di due variabili reali, in quanto un numero complesso e composto da due numeri reali. Tratteremo più avanti l'analisi di funzioni di più variabili. Per ora ci limitiamo a qualche semplice considerazione e qualche esempio.

Sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita sul dominio $E \subseteq \mathbb{C}$. Il grafico di F è contenuto in uno spazio tridimensionale

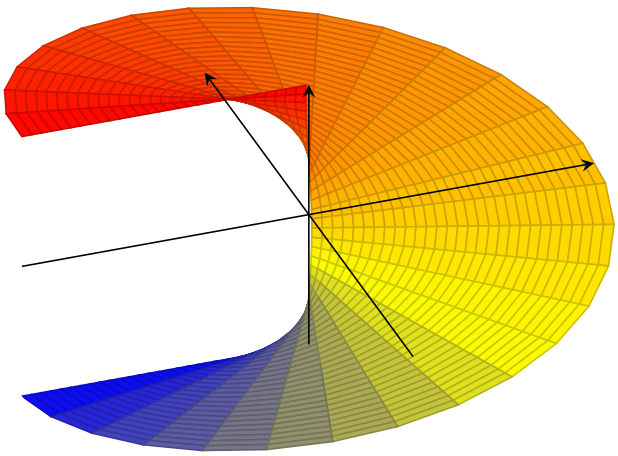
$$\text{grafico}(f) = \{(z, f(z))\colon z \in E\} \subseteq E \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3,$$

ad ogni punto $z = x+\mathrm{i}y \in E$ del dominio corrisponde un punto del grafico $(x, y, f(x+\mathrm{i}y))$ in $\mathbb{R}^3$.

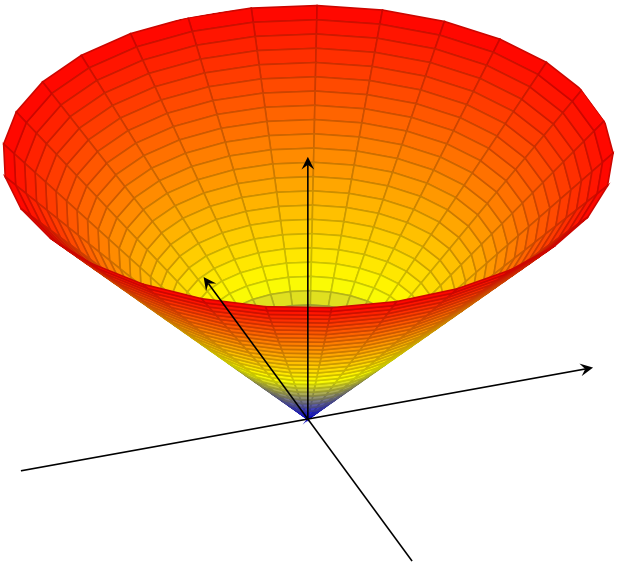
Esempio 2.1. Consideriamo la funzione argomento principale $\operatorname{Arg}\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Sappiamo che è definita per tutti i punti non nulli del piano complesso e assume valori nell'intervallo $]-\pi, \pi]$. Abbiamo visto nella seconda lezione diversi metodi per calcolarla, ad esempio possiamo scrivere

$$\operatorname{Arg}(x+\mathrm{i}y) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } y \geqslant 0, \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } y < 0, \end{cases} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

Per quanto possa sembrare complicata questa formula, in realtà si tratta di una funzione molto semplice, è costante lungo ogni semiretta del piano uscente dall'origine sulla quale assume un valore uguale all'angolo in radianti che la semiretta forma con il semiasse positivo delle ascisse.



Esempio 2.2. La funzione "modulo" che al numero complesso w assegna il valore del suo modulo $|w|$ è una funzione da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$. I punti del suo grafico sono della forma $(w, |w|)$. Se scriviamo w in forma cartesiana $x + \mathrm{i}y$, al punto $(w, |w|)$ corrisponde il punto in $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, quest'ultima espressione parametrizza una superficie di rotazione, più precisamente un cono, in quanto la terza coordinata coincide con la distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del punto (x, y) dall'origine.



Osservazione 2.3. Data una funzione $f(z)$ da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ possiamo considerare rapporti incrementali della forma

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

dove l'incremento h è una quantità complessa. Il numeratore è una quantità reale, perchè abbiamo supposto che f assume solo valori reali. Quando h è reale, il rapporto incrementale è una quantità reale, in quanto rapporto di due numeri reali. Quando h è immaginario, il rapporto incrementale è una quantità immaginaria, in quanto il rapporto tra un numero reale e un numero immaginario è un numero immaginario. Siccome in $\mathbb{C}$ possiamo avvicinarci a zero sia muovendoci lungo l'asse reale che lungo l'asse immaginario, se esistesse il limite del rapporto incrementale per l'incremento che tende a zero, tale limite dovrebbe essere al tempo stesso sia una quantità reale che una quantità immaginaria, ma allora ciò implica che esso deve essere zero (vedi prima lezione). Dunque le uniche funzioni da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ derivabili (nel senso della variabile complessa) sono quelle che hanno derivata nulla in tutti i punti, e questo avviene solo per le funzioni costanti. Funzioni di variabile complessa non costanti a valori reali non sono mai derivabili.

3 Funzioni da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$

Consideriamo infine il caso di funzioni di variabile complessa a valori complessi. Si tratta di funzioni che dipendono da due variabili reali e restituiscono una coppia di valori reali, dunque sono descritte da una coppia di funzioni di due variabili. Sia $F\colon E \to \mathbb{C}$ definita sul dominio complesso $E \subseteq \mathbb{C}$; scrivendo $z = x + \mathrm{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$F(x + \mathrm{i}y) = A(x, y) + \mathrm{i}B(x, y),$$

dove

$$A(x, y) = \mathrm{Re}\big(F(x + \mathrm{i}y)\big), \qquad B(x, y) = \mathrm{Im}\big(F(x + \mathrm{i}y)\big).$$

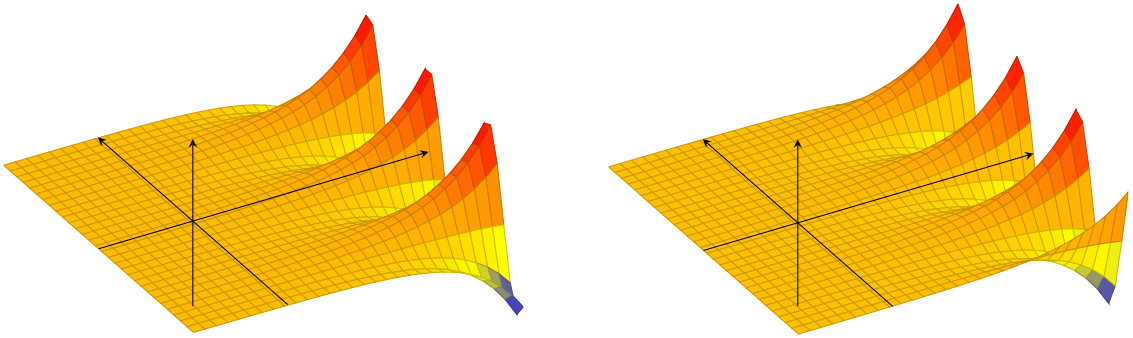
Il grafico di F è contenuto in $E \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$. Non è semplice visualizzare superfici in 4 dimensioni. Possiamo però visualizzare i due grafici tridimensionali della parte reale $A(x, y)$ e della parte immaginaria $B(x, y)$ di F.

Esempio 3.1. Consideriamo la funzione esponenziale $F(z) := \mathrm{e}^z$; essa ha come parte reale e parte immaginaria le funzioni

$$A(x, y) := \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}) = \mathrm{e}^x \cos(y), \qquad B(x, y) := \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}) = \mathrm{e}^x \sin(y).$$

Ecco i loro grafici:

$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z)$

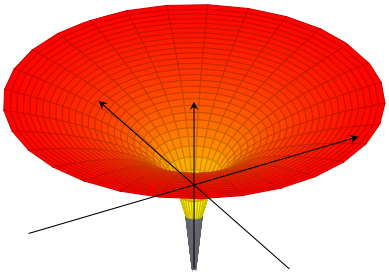


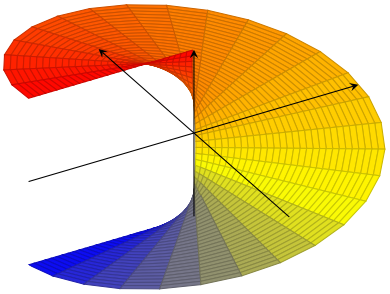
Esempio 3.2. Consideriamo la funzione logaritmo principale $F(z) := \mathrm{Log}(z)$; essa ha come parte reale e parte immaginaria le funzioni

$$A(x, y) := \mathrm{Re}\big(\mathrm{Log}(x+\mathrm{i}y)\big) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2), \qquad B(x, y) := \mathrm{Im}\big(\mathrm{Log}(x+\mathrm{i}y)\big) = \mathrm{Arg}(x+\mathrm{i}y),$$

Ecco i loro grafici:

$\mathrm{Re}(\mathrm{Log}(z))$ $\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z))$





Consideriamo ora il calcolo di derivate di funzioni di variabile complessa a valori complessi. Definiamo la derivata complessa con l'usuale limite del rapporto incrementale:

$$F'(z) := \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{F(z+h)-F(z)}{h}.$$

Ci sono funzioni apparentemente molto regolari che non sono derivabili in alcun punto. Prendiamo ad esempio la funzione coniugato $F(z) := \overline{z}$. Calcoliamo i suoi rapporti incrementali,

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Scriviamo l'incremento in forma esponenziale, $h = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, e otteniamo

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}.$$

Si tratta di una quantità che ha sempre modulo 1, ma il cui valore esatto dipende dall'argomento θ dell'incremento h. Dunque quando r tende a zero, il rapporto incrementale tende a valori diversi in funzione della direzione θ rispetto alla quale l'incremento h si avvicina a zero. Per le proprietà di unicità del limite ne deduciamo che il limite del rapporto incrementale non esiste (qualsiasi sia il punto z considerato). La funzione $z \mapsto \overline{z}$ non è pertanto derivabile in senso complesso in alcun punto.

Per altre funzioni la derivata complessa si ottiene in maniera del tutto analoga al caso reale. Prendiamo ad esempio la funzione esponenziale $F(z) := z^2$. Calcoliamo i suoi rapporti incrementali,

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{(z+h)^2-z^2}{h} = \frac{2zh+h^2}{h} = 2z+h.$$

Nel limite per $h \to 0$ otteniamo la derivata $F'(z) = 2z$, esattamente come nel caso reale.

Quando una funzione è derivabile in senso complesso si dice che è *olomorfa*. Una condizione necessaria e sufficiente che caratterizza le funzioni olomorfe è data dalle condizioni di Cauchy-Riemann: F è derivabile in senso complesso nel punto $z = x + \mathrm{i}y$ se e

solo se è differenziabile (come funzioni di due variabili) e le derivate parziali della componentente reale $A(x, y)$ e della componente immaginaria $B(x, y)$ verificano le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial B}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial B}{\partial x}(x, y).$$

Ne riparleremo più avanti nelle lezioni in cui tratteremo le derivate parziali di funzioni di più variabili quando il significato di queste espressioni sarà più comprensibile.

4 Teorema fondamentale dell'algebra

Concludiamo questa lezione dando alcuni cenni su come poter dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra, che abbiamo enunciato e utilizzato nella precedente lezione.

Teorema 4.1 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ con grado positivo possiede almeno uno zero.*

Consideriamo un polinomio P di grado $d \geqslant 1$, senza perdere di generalità possiamo supporre che esso sia *monico*, ovvero che il suo coefficiente direttore sia $c_d = 1$, e dunque

$$P(z) := z^d + c_{d-1}z^{d-1} + c_{d-2}z^{d-2} + \cdots + c_1 z + c_0.$$

Vogliamo dimostrare che $P(z)$ si annulla in qualche punto del piano complesso. Se fosse $P(0) = 0$ allora 0 sarebbe uno zero di P e saremmo a posto. Nel caso in cui $P(0) \neq 0$ scriviamo $P(z) = z^d + Q(z)$, dove Q è il polinomio

$$Q(z) = c_{d-1}z^{d-1} + c_{d-2}z^{d-2} + \cdots + c_1 z + c_0.$$

Abbiamo che

$$\left|z^d - P(z)\right| = |Q(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{d-1} |c_k| \, |z|^k ,$$

Se supponiamo che $|z| > 1$, otteniamo che

$$\left|z^d - P(z)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{d-1} |c_k| \, |z|^k \leqslant C \, |z|^{d-1} , \tag{2}$$

dove $C := \sum_{k=0}^{d-1} |c_k|$.

Fissato un raggio $r > 0$ possiamo parametrizzare la circonferenza di centro l'origine e raggio r nel piano complesso tramite la funzione $t \mapsto r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ al variare di $t \in [-\pi, \pi]$. Componiamo questa parametrizzazione con il polinomio, usando dunque la sostituzione $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, e otteniamo la funzione

$$F_r(t) := P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right), \qquad F_r \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}.$$

Si tratta di una funzione continua (in quanto composizione di funzioni continue) e, siccome

$$F_r(-\pi) = P\left(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\right) = P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right) = F_r(\pi),$$

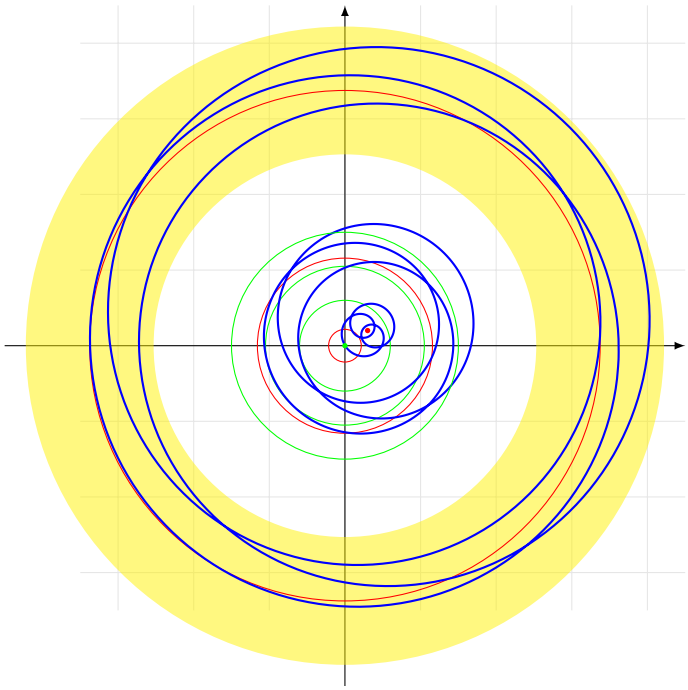
al variare di $t \in [-\pi, \pi]$ il punto $F_r(t)$ descrive un cammino chiuso nel piano complesso. Componendo la parametrizzazione della circonferenza di raggio r con la potenza z^d otteniamo invece la funzione

$$\Phi_r(t) := \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^d = r^d \mathrm{e}^{\mathrm{i}dt}.$$

Il punto $\Phi_r(t)$ al variare di $t \in [-\pi, \pi]$ descrive la circonferenza di centro l'origine e raggio r^d percorrendola in senso antiorario facendo d giri completi. Scegliendo r sufficientemente grande, ad esempio prendendo $r > \max\{4C, 1\}$, abbiamo che da (2) segue che

$$|\Phi_r(t) - F_r(t)| \leqslant Cr^{d-1} < \frac{1}{4} r^d = \frac{1}{4} |\Phi_r(t)|,$$

e il punto $F_r(t)$ rimane dunque "abbastanza" vicino al punto $\Phi_r(t)$ che descrive d rotazioni complete intorno all'origine; in questo modo anche $F_r(t)$ è costretto a compiere d rotazioni intorno all'origine, senza mai toccarla. Immaginate la curva tracciata dal punto $F_r(t)$ come un elastico che si avvolge d volte girando intorno all'origine. Quando facciamo tendere r a zero, questo elastico comincia a stringersi sempre più fino a ridursi al solo punto $P(0) \neq 0$, quando $r = 0$. In questa contrazione, per motivi di continuità ad un certo punto gli avvolgimenti dell'elastico dovranno attraversare l'origine del piano, ciò significa che esistono almeno un valore r e un valore t tali che $P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = F_r(t) = 0$, ovvero il punto $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ è uno zero di P.



Ad esempio, nella figura qui a sinistra, le tre curve chiuse in blu sono l'immagine dei tre cerchi verdi tramite il polinomio

$$P(z) = z^3 - \frac{1}{40} z^2 + \frac{\mathrm{i}}{4} z + \frac{3 + 2\mathrm{i}}{10}.$$

Quando il raggio del cerchio verde tende a zero, la curva blu tende a restringersi fino a ridursi al punto rosso $P(0) = \frac{3+2\mathrm{i}}{10}$. Quando il raggio r del cerchio è sufficientemente grande la curva blu rimane nella corona circolare gialla dei punti che distano al più $\frac{1}{4}r^3$ dal cerchio rosso di raggio r^3.