Analisi Matematica 1B - Lezione 5

Fattorizzazione di polinomi

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 28 marzo 2020)

Abbiamo visto come in campo complesso sia sempre possibile trovare soluzioni ad equazioni polinomiali di primo e di secondo grado. Anche le radici n-esime che abbiamo studiato nella lezione scorsa sono soluzioni di un'equazione polinomiale. Le funzioni polinomiali hanno il pregio di essere facilmente calcolabili, si tratta di fare solo prodotti e somme, e possono essere usate per ottenere buone approssimazioni di funzioni più sofisticate. Dedichiamo questa lezione ad approfondire le proprietà dei polinomi che nel campo complesso trovano un ambiente più ricco dal punto di vista algebrico rispetto al campo reale.

1 Algebra dei Polinomi

Definizione 1.1. Sia $\mathbb{K}$ è un campo numerico (ad esempio $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$). Un *polinomio P a coefficienti in $\mathbb{K}$ nell'indeterminata X* è una espressione della forma

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} c_k X^k = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_d X^d, \tag{1}$$

dove $c_0, c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{K}$ e $d \in \mathbb{N}_0$. Qui l'indeterminata X al momento è semplicemente una lettera, un simbolo, e il termine della forma X^k, con $k \in \mathbb{N}_0$, è detto *monomio* di grado k nell'indeterminata X. Quando il coefficiente c_d del monomio di grado massimo è non nullo allora esso viene detto *coefficiente direttore* del polinomio e il numero intero non negativo $d \in \mathbb{N}_0$ si dice *grado* del polinomio P e lo indichiamo con $\deg(P)$. Se per qualche $k \in \mathbb{N}_0$ il coefficiente c_k del monomio di grado k è nullo allora il termine corrispondente si può omettere nella scrittura del polinomio; nel caso in cui tutti i coefficienti siano nulli indicheremo il polinomio con 0 (polinomio nullo); il grado del polinomio nullo non è definito. In generale l'espressione (1) indica un polinomio di grado minore o uguale a d. Formalmente, un polinomio non è altro che una combinazione lineare di un numero finito di monomi della forma X^k con k intero non negativo; di fatto un polinomio è individuato dalla sequenza dei suoi coefficienti c_k.

Al polinomio (1) possiamo associare la *funzione polinomiale* $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ che al numero $z \in \mathbb{K}$ associa il numero $P(z) \in \mathbb{K}$ ottenuto sostituendo alla lettera X il numero z nella definizione di P,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{d} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_d z^d.$$

Ai polinomi di grado 0 corrispondono funzioni polinomiali costanti.

L'insieme di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ nell'indeterminata X lo indichiamo con $\mathbb{K}[X]$.

Esempio 1.2. Ad esempio:

- $3+2X-3X^2+5X^3$ è un polinomio di grado 3 in $\mathbb{R}[X]$ (ma anche in $\mathbb{C}[X]$ in quanto i numeri reali possono essere considerati un sottoinsieme dei numeri complessi), il suo coefficiente direttore è 5;
- $2 - \mathrm{i}X + (3-4\mathrm{i})X^2 - (\mathrm{i}+\pi)X^3 - (\sqrt{7} - \pi\mathrm{i})X^4$ è un polinomio di grado 4 in $\mathbb{C}[X]$, il suo coefficiente direttore è $-\sqrt{7} + \pi\mathrm{i}$.
- $2+0X-\mathrm{i}X^2+0X^3$ è un polinomio di grado minore o uguale a 3 in $\mathbb{C}[X]$ e coincide con il polinomio di secondo grado $2 - \mathrm{i}X^2$, il suo coefficiente direttore è $-\mathrm{i}$.

Consideriamo due polinomi $A, B \in \mathbb{K}[X]$ con grado minore o uguale a d,

$$A(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_d X^d,$$
$$B(X) = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_d X^d.$$

Applicando formalmente le usuali regole algebriche di somma e prodotto (proprietà associativa, commutativa, distributiva) possiamo definire il polinomio somma $A+B$ e il polinomio prodotto AB. Per la somma otteniamo il polinomio

$$(A+B)(X) := \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k X^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{d} b_k X^k\Big) = \sum_{k=0}^{d} (a_k + b_k)\, X^k.$$

Per il prodotto, richiedendo che anche per i monomi valga la legge esponenziale, $X^k X^j = X^{k+j}$, abbiamo

$$\begin{aligned}(AB)(X) = \big(\sum_{k=0}^{d} a_k X^k\big)\big(\sum_{j=0}^{d} b_j X^j\big) = \sum_{k=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} a_k b_j X^{k+j} &= \\ = \sum_{m=0}^{2d}\Bigg(\sum_{\substack{k=0,\dots,d\\ j=0,\dots,d\\ k+j=m}} a_k b_j\Bigg) X^m = \sum_{m=0}^{2d}\Bigg(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant d\\ 0\leqslant m-k\leqslant d}} a_k b_{m-k}\Bigg) X^m&,\end{aligned}$$

e dunque otteniamo il polinomio

$$(AB)(X) := \sum_{m=0}^{2d} c_m X^m, \qquad \text{dove} \quad c_m := \sum_{k=\max\{0,m-d\}}^{\min\{d,m\}} a_k b_{m-k}.$$

Non lasciamoci spaventare da queste formule, quello che esprimono è che di fatto per fare calcoli algebrici con i polinomi basta applicare le usuali regole di calcolo.

Esempio 1.3. Consideriamo i due polinomi

$$A(X) = 7 + 3\mathrm{i}X + (4+5\mathrm{i})X^2, \qquad B(X) = (2-\mathrm{i})X - 5X^3.$$

La loro somma è data da

$$(A+B)(X) = 7+3\mathrm{i}X+(4+5\mathrm{i})X^2+(2-\mathrm{i})X-5X^3 = 7+(2+2\mathrm{i})X+(4+5\mathrm{i})X^2-5X^3.$$

Il loro prodotto è dato da

$$\begin{aligned}
(AB)(X) &= \big(7+3\mathrm{i}X+(4+5\mathrm{i})X^2\big)\big((2-\mathrm{i})X-5X^3\big) = \\
&= 7(2-\mathrm{i})X+7(-5)X^3+3\mathrm{i}(2-\mathrm{i})X^2+3\mathrm{i}5X^4+(4+5\mathrm{i})(2-\mathrm{i})X^3+(4+5\mathrm{i})(-5)X^5 = \\
&= (14-7\mathrm{i})X-35X^3+(3+6\mathrm{i})X^2+15\mathrm{i}X^4+(13+6\mathrm{i})X^3+(-20-25\mathrm{i})X^5 = \\
&= (14-7\mathrm{i})X+(3+6\mathrm{i})X^2+(-22+6\mathrm{i})X^3+15\mathrm{i}X^4+(-20-25\mathrm{i})X^5.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.4. Calcola somma e prodotto dei polinomi A e B nei seguenti casi:

$$\begin{array}{ll}
A(X) = 1+2X+3X^2+4X^3, & B(X) = 3-2X-X^2; \\
A(X) = \mathrm{i}+2X+3\mathrm{i}X^2+4X^3, & B(X) = 3-2\mathrm{i}X-X^2; \\
A(X) = (1+\mathrm{i})+(3+\mathrm{i})X^2+4X^3, & B(X) = 3\mathrm{i}X-(1-\mathrm{i})X^2; \\
A(X) = 1+X+X^2+X^3, & B(X) = 1-X; \\
A(X) = -\mathrm{i}+X^4, & B(X) = -\mathrm{i}-X^4.
\end{array}$$

Possiamo determinare il grado della somma e del prodotto guardando quello che succede ai termini non nulli di grado massimo nei due polinomi. Si ottiene facilmente la seguente proposizione.

Proposizione 1.5. *Siano A e B due polinomi non nulli. Allora:*

- *se* $\deg(A) \neq \deg(B)$ *allora la somma $A+B$ è un polinomio di grado*

$$\deg(A+B) = \max\{\deg(A), \deg(B)\};$$

- *se* $\deg(A) = \deg(B)$ *allora per la somma abbiamo*

$$\deg(A+B) \leqslant \max\{\deg(A), \deg(B)\};$$

- *il prodotto AB è un polinomio di grado*

$$\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B).$$

Osservazione 1.6. Anche per il prodotto tra polinomi a coefficienti reali o complessi continua a valere la legge dell'annullamento del prodotto: AB è il polinomio nullo se e solo se A è il polinomio nullo oppure B è il polinomio nullo.

Esercizio 1.7. Fai un esempio di due polinomi di grado 5 la cui somma è un polinomio di grado 3.

2 Divisione tra polinomi

L'algebra dei polinomi ha molte analogie con l'algebra dei numeri interi. Un numero intero rappresentato in notazione decimale può essere visto come un polinomio i cui coefficienti sono le cifre decimali e l'indeterminata X è sostituita dalla base 10, ad esempio:

$$40925 = 4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Il quoziente tra due numeri interi non è sempre un numero intero, ma tra numeri interi è possibile effettuare la divisione con resto: dati due numeri interi p e d con $d > 0$, allora esiste, ed unica, una coppia di numeri interi q e r tali che $p = qd + r$ con $0 \leqslant r < d$. Se $p > 0$ ciò significa che d è contenuto q volte in p con resto r. Il numero p è il dividendo, il numero d è il divisore, il numero q è il quoziente, il numero r è il resto. Ad esempio: se $p = 44$ e $d = 6$ abbiamo $q = 7$ e $r = 2$, in quanto $44 = 7 \cdot 6 + 2$. La stessa cosa si può fare con i polinomi, sia in campo reale che in campo complesso.

Teorema 2.1. *Siano P e D due polinomi in $\mathbb{K}[x]$, dove $\mathbb{K}$ può essere il campo reale $\mathbb{R}$ oppure il campo complesso $\mathbb{C}$. Se D è non nullo allora esiste, ed è unica, una coppia di polinomi Q ed R in $\mathbb{K}[x]$, tali che $P = QD + R$ ed R è nullo oppure è un polinomio con grado strettamente minore del grado di D.*

Il polinomio P si dice *dividendo*, il polinomio D si dice *divisore*, il polinomio Q si dice *quoziente*, il polinomio R si dice *resto.*

Quando il resto R è nullo si dice che P è *divisibile* per D, ovvero che D è un divisore di P, in tal caso si ha la fattorizzazione $P = QD$. Un polinomio si dice *irriducibile* quando non è possibile fattorizzarlo come prodotto di due polinomi con grado positivo.

Dimostrazione. [Dimostrazione del teorema 2.1] Vediamo l'unicità. Se esistessero due coppie di polinomi Q_1, R_1 e Q_2, R_2 tali che $Q_1D + R_1 = Q_2D + R_2$ avremmo che

$$R_1 - R_2 = (Q_2 - Q_1)D.$$

La differenza di sinistra se non è nulla deve avere grado minore del grado di D; mentre il termine a destra se $Q_1 - Q_2$ non è nullo deve avere grado maggiore o uguale al grado di D. Dunque necessariamente deve essere $R_1 - R_2 = 0$ e $Q_1 - Q_2 = 0$ e quindi le due coppie coincidono.

Vediamo l'esistenza. Se P è nullo basta scegliere $Q = R = 0$. Se P non è nullo procediamo per induzione rispetto all'intero non negativo $\deg(P) - \deg(D)$. Quando P ha grado minore del grado di D basta prendere $Q = 0$ e $R = P$. Supponiamo ora, come ipotesi induttiva, che il teorema valga per tutti i casi in cui $\deg(P) - \deg(D) < n$ per un certo $n \in \mathbb{N}_0$ e cerchiamo di dimostrarlo nel caso in cui la differenza tra i gradi è n. In tal caso, costruiamo il polinomio $\widetilde{P}$ ponendo

$$\widetilde{P}(X) := P(X) - \frac{a}{b} X^n D(X), \tag{2}$$

dove a è il coefficiente direttore di P e b è il coefficiente direttore di D. osserviamo che il mononio $\frac{a}{b}X^n$ rappresenta il quoziente tra i monomi direttori dei polinomi P e Q. Nella differenza (2) che definisce $\widetilde{P}$ si cancellano i termini di grado massimo, dunque abbiamo $\deg \widetilde{P} < \deg P$ e quindi $\deg \widetilde{P} - \deg Q < n$. Possiamo allora applicare l'ipotesi induttiva ai polinomi $\widetilde{P}$ e D e ottenere che esistono due polinomi $\widetilde{Q}$ ed R tali che $\widetilde{P} = \widetilde{Q}D + R$ con R nullo o con grado minore del grado di D. Ricaviamo che

$$\begin{aligned} P(X) = \widetilde{P}(X) + \frac{a}{b}X^n D(X) = \widetilde{Q}(X)D(X) + R(X) + \frac{a}{b}X^n D(X) = \\ = \left(\frac{a}{b}X^n + \widetilde{Q}(X)\right) D(X) + R(X), \end{aligned}$$

e per concludere basta scegliere $Q = \frac{a}{b}X^n + \widetilde{Q}$. □

La dimostrazione, oltre a provare l'esistenza e l'unicità di quoziente e resto, ci suggerisce anche un algoritmo per determinarli, ovvero quello di iterare il procedimento (2) che ci ha fatto passare da P a $\widetilde{P}$. Si tratta di un algoritmo simile a quello che si impara alle scuole elementari per fare divisioni tra numeri interi. Per capire meglio vediamo un esempio.

Esempio 2.2. Consideriamo come dividendo

$$P(X) := 3 - 2X^2 + X^4 - 4X^5$$

e come divisore

$$D(X) := -5 + X - 5X^3.$$

Calcoliamo la divisione con resto tra il polinomio P di grado 5 e il polinomio D di grado 3. Cominciamo impostando una divisione in colonna, scrivendo i vari monomi P e D in ordine decrescente ciascuno nel proprio posto, facendo attenzione a lasciare il posto per eventuali monomi nulli.

$$\begin{array}{cccccc|cccc} -4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \hline & & & & & & +\frac{4}{5}X^2 & & & \end{array}$$

Calcoliamo il rapporto tra il monomio direttore di P (evidenziato in verde) e il monomio direttore di D (evidenziato in giallo), esso ci darà il primo termine del quoziente (evidenziato in rosso). Moltiplichiamo tale rapporto per il divisore D, riportiamo quello che si ottiene sotto al dividendo ed eseguiamo la sottrazione tra le due righe.

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \cline{7-10}
-4X^5 & +0X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & -4X^2 & & & +\frac{4}{5}X^2 & & & \\ \cline{1-4}
== & +1X^4 & -\frac{4}{5}X^3 & +2X^2 & +0X & +3 & & & &
\end{array}
$$

Otteniamo così nell'ultima riga un nuovo polinomio $\widetilde{P}$ (evidenziato in blu) con un grado 4 che è ancora maggiore del grado di D; iteriamo dunque il procedimendo.

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \cline{7-10}
-4X^5 & +0X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & -4X^2 & & & +\frac{4}{5}X^2 & -\frac{1}{5}X & & \\ \cdashline{1-4}
== & +1X^4 & -\frac{4}{5}X^3 & +2X^2 & +0X & +3 & & & &
\end{array}
$$

Dopo aver aggiunto al quoziente il rapporto tra i monomi direttori di $\widetilde{P}$ e di D, riportiamo sotto $\widetilde{P}$ il prodotto di tale rapporto per D ed eseguiamo la sottrazione tra le due righe.

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \cline{7-10}
-4X^5 & +0X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & -4X^2 & & & +\frac{4}{5}X^2 & -\frac{1}{5}X & & \\ \cdashline{1-4}
 & +1X^4 & -\frac{4}{5}X^3 & +2X^2 & +0X & +3 & & & & \\
 & +1X^4 & +0X^3 & -\frac{1}{5}X^2 & +1X & & & & & \\ \cline{2-5}
 & == & -\frac{4}{5}X^3 & +\frac{11}{5}X^2 & -1X & +3 & & & &
\end{array}
$$

Quello che rimane nell'ultima riga è un nuovo polinomio (evidenziato in blu) con un grado 3 che è uguale al grado di D; continuiamo dunque ad iterare il procedimendo fino a quando non rimane un polinomio con un grado strettamente minore del divisore D.

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \cline{7-10}
-4X^5 & +0X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & -4X^2 & & & +\frac{4}{5}X^2 & -\frac{1}{5}X & +\frac{4}{25} & \\ \cdashline{1-4}
 & +1X^4 & -\frac{4}{5}X^3 & +2X^2 & +0X & +3 & & & & \\
 & +1X^4 & +0X^3 & -\frac{1}{5}X^2 & +1X & & & & & \\ \cdashline{2-5}
 & & -\frac{4}{5}X^3 & +\frac{11}{5}X^2 & -1X & +3 & & & & \\
 & & -\frac{4}{5}X^3 & +0X^2 & +\frac{4}{25}X & -\frac{4}{5} & & & & \\ \cline{3-6}
 & & == & +\frac{11}{5}X^2 & -\frac{29}{25}X & +\frac{19}{5} & & & &
\end{array}
$$

Avendo ottenuto un resto con grado 2 (strettamente minore del grado 3 del divisore) ci possiamo fermare. Otteniamo così un quoziente

$$Q(X) = \frac{4}{25} - \frac{1}{5}X + \frac{4}{25}X^2$$

e un resto

$$R(X) = \frac{19}{5} - \frac{29}{25}X + \frac{11}{5}X^2.$$

Esercizio 2.3. Calcola quoziente e resto per le seguenti coppie di dividendi e divisori:

1. $P(X) = X^5 + 32, \quad D(X) = X + 2;$
2. $P(X) = -4X^3 + 10X^2 - 10X + 3, \quad D(X) = 2X^2 - 4X + 3;$
3. $P(X) = X^3 - 4\mathrm{i}X^2 - 5X + 2\mathrm{i}, \quad D(X) = X - \mathrm{i};$
4. $P(X) = X^6 - (1 + \mathrm{i})X^3 + (2 - 3\mathrm{i}), \quad D(X) = \mathrm{i}X^2 - 2 + 3\mathrm{i};$
5. $P(X) = X^5 + \mathrm{i}, \quad D(X) = X + \mathrm{i};$
6. $P(X) = X^8 + 2X^3, \quad D(X) = X^4 + \mathrm{i}X.$

3 Zeri e fattorizzazione di polinomi in campo complesso

Così come è utile saper fattorizzare i numeri interi come prodotto di numeri primi, è altresì importante poter fattorizzare polinomi come prodotto di polinomi "semplici". Avremo modo più avanti di apprezzare l'importanza della fattorizzazione dei polinomi quando parleremo dell'integrazione di funzioni razionali. Per riuscire a fattorizzare un polinomio abbiamo bisogno di avere informazioni sui punti in cui la funzione polinomiale associata si annulla.

Definizione 3.1. Sia $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio non nullo. Un numero complesso $z_\star \in \mathbb{C}$ si dice che è uno *zero*, o una *radice*, di P quando è nullo il valore di P calcolato in $z_\star$, ovvero $P(z_\star) = 0$.

Ad esempio, se $P(X) = X^6 + (2 - \mathrm{i})X - 2\mathrm{i}$ abbiamo che $z_\star = \mathrm{i}$ è uno zero di P in quanto

$$P(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^6 + (2 - \mathrm{i})\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = -1 + 2\mathrm{i} + 1 - 2\mathrm{i} = 0,$$

mentre $z_\star = -2$ non è uno zero di P in quanto

$$P(-2) = (-2)^6 + (2 - \mathrm{i})(-2) - 2\mathrm{i} = 64 - 4 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = 60 \neq 0.$$

Proposizione 3.2. *Sia $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio non nullo. Un numero complesso $z_\star \in \mathbb{C}$ è uno zero di P se e solo se il $P(X)$ è divisibile per il polinomio $X - z_\star$.*

Dimostrazione. Sia $Q(X)$ il quoziente della divisione di $P(X)$ per $X - z_\star$. Siccome $X - z_\star$ è un polinomio di primo grado, il resto R della divisione dovrà essere un polinomio di grado zero, oppure il polinomio nullo; ciò significa che ad esso corrisponde una funzione $R(z) = r$ costante, dove r è un numero complesso. Abbiamo quindi che

$$P(X) = Q(X)(X - z_\star) + r.$$

Valutando quest'espressione in $z_\star$ otteniamo che

$$P(z_\star) = Q(z_\star)(z_\star - z_\star) + r = Q(z_\star) \cdot 0 + r = r.$$

Ne segue che $z_\star$ è uno zero di P se e solo se il resto r è nullo, ovvero se e solo se P è divisibile per $X - z_\star$. $\square$

Mentre in campo reale non tutti i polinomi possiedono degli zeri, si pensi ad esempio a $x^2 + 1$, in campo complesso abbiamo che ogni polinomio di grado positivo possiede sempre abbastanza zeri per poterlo fattorizzare fino ai minimi termini.

Teorema 3.3 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ con grado positivo,* $\deg(P) > 0$*, possiede almeno uno zero.*

La dimostrazione rigorosa di questo fondamentale risultato richiede alcuni strumenti matematici sofisticati la cui trattazione non rientra nelle esigenze del nostro corso; proveremo comunque a dare una idea geometrica della dimostrazione nella prossima lezione.

Applicando ripetutamente il teorema 3.3 insieme alla proposizione 3.2 si dimostra la possibilità in $\mathbb{C}$ di una completa fattorizzazione dei polinomi come prodotto di termini di primo grado.

Corollario 3.4. *Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ di grado $d \in \mathbb{N}$ può essere fattorizzato come prodotto di d polinomi di primo grado. Più precisamente, possiamo scrivere P nella forma*

$$P(X) = c \prod_{k=1}^{d} (X - z_k) = c(X - z_1)(X - z_2) \cdot \dots \cdot (X - z_d), \tag{3}$$

dove c è il coefficiente direttore di P e $z_1, z_2, \dots z_d$ sono zeri (non necessariamente distinti) di P.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul grado del polinomio $\deg(P)$.

Se $\deg(P) = 1$ abbiamo che il polinomio è già di primo grado $P(X) = c_0 + c_1 X$, con $c_1 \neq 0$, e dunque $P(X) = c_1 \left(X + \frac{c_0}{c_1}\right)$.

Dato un $n \in \mathbb{N}$, supponiamo come ipotesi induttiva che la fattorizzazione (3) valga per ogni polinomio con grado n e consideriamo un polinomio P con $\deg(P) = n+1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, teorema 3.3, esiste uno zero $z_\star$ di P e quindi per la proposizione 3.2 abbiamo che P è divisibile per $X - z_\star$. Dunque possiamo scrivere

$$P(X) = (X - z_\star)Q(X), \tag{4}$$

per un polinomio Q che dovrà avere grado n. Per l'ipotesi induttiva Q si fattorizza nella forma (3),

$$Q(X) = c \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) = c(X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n), \tag{5}$$

dove c è il coefficiente direttore di Q e $z_1, z_2, \dots z_n$ sono zeri di Q. Combinando (4) con (5) si ottiene la fattorizzazione completa per P. $\square$

Il corollario 3.4 ci dice che se conosciamo d zeri di un polinomio di grado d possiamo fattorizzarlo come prodotto di d fattori di primo grado. Ci sono polinomi per i quali il numero di zeri è inferiore al loro grado, ad esempio il polinomio

$$X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)(X - 1)(X + 1) = (X - 1)^2(X + 1)$$

è di terzo grado ma possiede solo due zeri, 1 e -1. Ciò è collegato al fatto che nella fattorizzazione compaiono più fattori corrispondenti allo stesso zero.

Definizione 3.5. Sia $z_\star \in \mathbb{C}$ uno zero del polinomio non nullo $P \in \mathbb{C}[X]$. La *molteplicità* di $z_\star$ come zero di P è il massimo intero m per il quale si ha che $P(X)$ sia divisibile per $(X - z_\star)^m$. Quando la molteplicità è uguale a 1 si dice che lo zero è *semplice*.

Proposizione 3.6. *Il numero $z_\star$ è uno zero di molteplicità m del polinomio non nullo P se e solo se P si può fattorizzare nella forma $P(X) = (X - z_\star)^m Q(X)$ dove $Q(X)$ è un polinomio con grado $\deg(Q) = \deg(P) - m$ tale che $Q(z_\star) \neq 0$.*

Dimostrazione. Se $z_\star$ è uno zero di P con molteplicità m, allora $P(X)$ è divisibile per $(X - z_\star)^m$ e dunque vale una decomposizione del tipo

$$P(X) = (X - z_\star)^m Q(X),$$

per qualche polinomio Q. Se fosse $Q(z_\star) = 0$ allora avremmo anche che

$$Q(X) = (X - z_\star)\widetilde{Q}(X),$$

per qualche polinomio $\widetilde{Q}$, e dunque

$$P(X) = (X - z_\star)^{m+1}\widetilde{Q}(X),$$

ma P non è divisibile per $(X - z_\star)^{m+1}$; quindi deve essere $Q(z_\star) \neq 0$.

Viceversa, supponiamo che

$$P(X) = (X - z_\star)^m Q(X),$$

per qualche polinomio Q, con $Q(z_\star) \neq 0$. Se P fosse divisibile per $(X - z_\star)^{m+1}$ avremmo anche che

$$P(X) = (X - z_\star)^{m+1}\widetilde{Q}(X),$$

per qualche polinomio $\widetilde{Q}$. Ma allora avremmo che

$$0 = (X - z_\star)^m Q(X) - (X - z_\star)^{m+1}\widetilde{Q}(X) = (X - z_\star)^m \Big(Q(X) - (X - z_\star)\widetilde{Q}(X)\Big).$$

Quest'uguaglianza ci dice che è nullo il prodotto tra il polinomio $(X - z_\star)^m$ e il polinomio $Q(X) - (X - z_\star)\widetilde{Q}^{(}X)$. Per la legge dell'annullamento del prodotto segue che uno dei due fattori deve essere il polinomio nullo. Ma il polinomio $(X - z_\star)^m$ non è nullo in quanto è un polinomio di grado m con coefficiente direttore 1. Dunque deve essere nullo il polinomio $Q(X) - (X - z_\star)\widetilde{Q}^{(}X)$. E se si tratta del polinomio nullo la corrispondente funzione polinomiale sarà nulla in ogni punto, e in particolare anche in $z_\star$:

$$0 = Q(z_\star) - (z_\star - z_\star)\widetilde{Q}(z_\star) = Q(z_\star).$$

Siccome abbiamo supposto che $Q(z_\star) \neq 0$, allora deve necessariamente essere che P non è divisibile per $(X - z_\star)^{m+1}$, Così si ottiene la massimalità dell'esponente m. □

Tenendo conto della molteplicità la fattorizzazione ottenuta nel corollario 3.4 può essere precisata nella forma descritta dal seguente teorema.

Teorema 3.7. *Siano $z_1, z_2, \dots, z_n$ tutti gli n zeri distinti del polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ con molteplicità, rispettivamente, $m_1, m_2, \dots, m_n$. Allora il grado di P è dato dalla somma delle molteplicità degli zeri,*

$$\deg(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n,$$

e vale la fattorizzazione

$$P(X) = c\prod_{k=1}^{n}(X - z_k)^{m_k} = c(X - z_1)^{m_1}(X - z_2)^{m_2}\dots(X - z_n)^{m_n}, \tag{6}$$

La dimostrazione del teorema si può ottenere facilmente procedendo per induzione sul numero di zeri distinti del polinomio e applicando ripetutamente la proposizione 3.6; lasciamo i dettagli al lettore.

Osservazione 3.8. Un'altra conseguenza di quanto ottenuto finora è che gli unici polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[X]$ sono i polinomi di primo grado; nella fattorizzazione dei polinomi essi giocano lo stesso ruolo che i numeri primi giocano nella fattorizzazione dei numeri interi.

Il problema della fattorizzazione di un polinomio in $\mathbb{C}[X]$ si traduce dunque nel problema di determinare i suoi zeri con le loro molteplicità. Il teorema fondamentale dell'algebra ci garantisce che gli zeri esistono ma non ci indica il modo per determinarli. Sappiamo risolvere qualsiasi equazione polinomiale di primo e secondo grado; esistono formule, o meglio algoritmi, per risolvere qualsiasi equazione di terzo o quarto grado; purtroppo è stato dimostrato che per equazioni algebriche di grado maggiore o uguale a 5 non è possibile dare formule o algoritmi che permettano di risolvere esattamente qualsiasi caso generico. E' possibile trovare formule o metodi per risolvere alcuni casi particolari (noi ad esempio con la costruzione delle radici n-esime sappiamo risolvere equazioni della forma $X^n - p = 0$), oppure possiamo affidarci a metodi numerici di approssimazione delle soluzioni.

Esempio 3.9. Fattorizziamo il polinomio $P(X) = \frac{1}{16}X^6 - 2\mathrm{i}X^3 - 32$. Per farlo cerchiamo di determinare i suoi zeri, ovvero le soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{16}z^6 - 2\mathrm{i}z^3 - 32 = 0. \tag{7}$$

Si tratta di una equazioni di sesto grado, ma con la sostituzione $w = z^3$ diventa un'equazione di secondo grado,

$$\frac{1}{16}w^2 - 2\mathrm{i}w - 32 = 0,$$

le cui soluzioni sono $w = w_\pm := 16(\mathrm{i} \pm \sqrt{1}) = (\pm 16) + 16\mathrm{i}$. Le soluzioni di (7) saranno date dalle radici cubiche di $w_\pm$. Le tre radici cubiche di $w_+ = 16 + 16\mathrm{i} = 2^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ sono

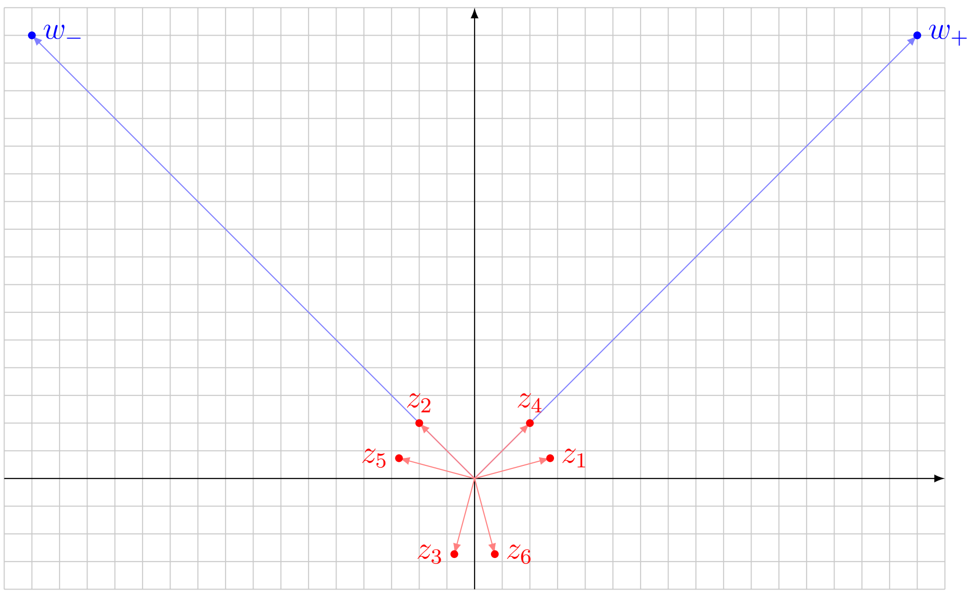
$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)\mathrm{i},\\
z_2 &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -2 + 2\mathrm{i},\\
z_3 &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = -(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1)\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Le tre radici cubiche di $w_- = -16 + 16\mathrm{i} = 2^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ sono

$$\begin{aligned}
z_4 &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2 + 2\mathrm{i},\\
z_5 &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}} = -(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)\mathrm{i},\\
z_6 &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}} = (\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1)\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto i sei zeri distinti del polinomio P, che si fattorizza come

$$\begin{aligned}
P(X) =&\frac{1}{16}(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)(X - z_4)(X - z_5)(X - z_6) =\\
=&\frac{1}{16}\big(X - (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)\mathrm{i}\big)\big(X + 2 - 2\mathrm{i}\big)\big(X + (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)\mathrm{i}\big)\cdot\\
&\cdot \big(X - 2 - 2\mathrm{i}\big)\big(X + (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)\mathrm{i}\big)\big(X - (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)\mathrm{i}\big).
\end{aligned}$$



Esempio 3.10. Fattorizziamo il polinomio $P(X) := \frac{1}{16}X^8 + 16$. Gli zeri del polinomio coincidono con le soluzioni dell'equazione $\frac{1}{16}z^8 + 16 = 0$, che possiamo scrivere anche come $z^8 = -16^2 = -256$. Dunque gli zeri di P sono le radici ottave di -256. Il numero -256 ha modulo 256 e argomento π. Le sue radici ottave avranno modulo $\sqrt[8]{256} = 2$ e argomenti $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ e dunque sono date da

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = a + \mathrm{i}b, & z_2 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}} = b + \mathrm{i}a,\\
z_3 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}} = -b + \mathrm{i}a, & z_4 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}} = -a + \mathrm{i}b,\\
z_5 &= 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}} = -a - \mathrm{i}b, & z_6 &= 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}} = -b - \mathrm{i}a,\\
z_7 &= 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}} = b - \mathrm{i}a, & z_8 &= 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = a - \mathrm{i}b,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo posto $a := \sqrt{2+\sqrt{2}}$ e $b := \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Dunque otteniamo

$$
\begin{aligned}
P(X) = \frac{1}{16}&(X-a-\mathrm{i}b)(X-b-\mathrm{i}a)(X+b-\mathrm{i}a)(X+a-\mathrm{i}b)\cdot\\
&\cdot(X+a+\mathrm{i}b)(X+b+\mathrm{i}a)(X-b+\mathrm{i}a)(X-a+\mathrm{i}b).
\end{aligned}
$$

Esempio 3.11. Fattorizziamo il polinomio $P(X) := X^3 - \mathrm{i}X^2 + X - \mathrm{i}$. Possiamo operare un raccoglimento parziale raccogliendo prima un fattore X^2 dai primi due addendi,

$$P(X) = X^2(X-\mathrm{i}) + (X-\mathrm{i}) = (X^2+1)(X-\mathrm{i}).$$

Siccome in campo complesso $-1 = \mathrm{i}^2$, possiamo vedere il polinomio X^2+1 come una differenza di quadrati

$$X^2 + 1 = X^2 - (-1) = X^2 - \mathrm{i}^2 = (X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i}).$$

Otteniamo così la fattorizzazione

$$P(X) = (X - \mathrm{i})^2(X + \mathrm{i}).$$

Lo zero i ha molteplicità 2, mentre lo zero $-\mathrm{i}$ ha molteplicità 1.

Esercizio 3.12. Fattorizza i seguenti polinomi:

1. $X^4 - X^3 + X^2 - X$;
2. $X^4 + \mathrm{i}X^3 - X^2 - \mathrm{i}X$;
3. $X^6 + 8$;
4. $X^6 + 8\mathrm{i}$;
5. $X^6 + 2\mathrm{i}X^3 - 1$.

Esercizio 3.13. Fattorizza il polinomio

$$X^3 + (1 + 2\mathrm{i})X^2 + \big(-2 + (2 - \sqrt{3})\mathrm{i}\big)X - 2 - \sqrt{3}\mathrm{i}$$

dopo aver verificato che ha uno zero in -1.

Esercizio 3.14. Determina un polinomio di grado 5 che abbia $z = 2 - \mathrm{i}$ come zero di molteplicità 3 e $z = -1 + \mathrm{i}$ come zero di molteplicità 2.

4 Fattorizzazione di polinomi in campo reale

Siccome ogni numero reale $r \in \mathbb{R}$ è anche numero complesso $r + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, possiamo considerare ogni polinomio a coefficienti reali anche come un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$. Dunque ogni polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ con grado positivo, considerato come elemento di $\mathbb{C}[X]$, è anch'esso fattorizabile come prodotto di polinomi di primo grado della forma $X - z_\star$ dove $z_\star$ è uno zero di P in $\mathbb{C}$. Se $z_\star$ coincide con un numero reale allora il fattore $X - z_\star$ risulta essere anch'esso un polinomio a coefficienti reali; se invece $z_\star$ non è reale, allora abbiamo un fattore a coefficienti complessi. E' interessante notare però che quando P ha coefficienti reali gli zeri non reali di P formano sempre delle coppie di numeri coniugati.

Lemma 4.1. *Sia $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ un polinomio a coefficienti reali di grado positivo. Se $z_\star \in \mathbb{C}$ è uno zero di P allora anche il suo coniugato $\overline{z_\star}$ è uno zero di P.*

Dimostrazione. Sia $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ con $d \in \mathbb{N}$ e $a_k \in \mathbb{R}$ per $k = 0, 1, \ldots, n$. Calcolando il coniugato di $P(z)$ per $z \in \mathbb{C}$ troviamo che

$$\begin{aligned}
\overline{P(z)} &= \overline{\sum_{k=0}^{d} a_k z^k}, && \text{(il coniugato della somma è la somma dei coniugati)}\\
&= \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k z^k}, && \text{(il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati)}\\
&= \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, \overline{z}^k, && \text{(un numero reale coincide con il suo coniugato)}\\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \overline{z}^k, && \text{(definizione di } P \text{ calcolato in } \overline{z})\\
&= P(\overline{z}).
\end{aligned}$$

Ne segue che se $P(z_\star) = 0$ allora $P(\overline{z_\star}) = \overline{0} = 0$. □

Proposizione 4.2. *Sia $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ un polinomio a coefficienti reali di grado positivo. Se $z_\star = a + ib \in \mathbb{C}$, con $b \neq 0$, è uno zero di P allora $P(X)$ è divisibile per il polinomio a coefficienti reali*

$$X^2 - 2aX + a^2 + b^2 = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_\star)X + |z_\star|^2 . \tag{8}$$

Dimostrazione. Per il lemma 4.1 sia $z_\star$ che $\overline{z_\star}$ sono degli zeri di P. Dunque nella decomposizione in fattori di primo grado di P compaiono i fattori $X - z_\star$ e $X - \overline{z_\star}$. Ciò significa che possiamo scrivere P nella forma

$$P(X) = (X - z_\star)(X - \overline{z_\star})Q(X),$$

dove il il polinomio $Q(X)$ contiene i fattori relativi ad eventuali altri zeri di P. Per concludere basta osservare che

$$(X - z_\star)(X - \overline{z_\star}) = X^2 - (z_\star + \overline{z_\star})X + z_\star\overline{z_\star} = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_\star)X + |z_\star|^2 ,$$

e abbiamo $\mathrm{Re}(z_\star) = a$ e $|z_\star|^2 = a^2 + b^2$. □

Osservazione 4.3. Osserviamo che il polinomio di secondo grado (8) ha sempre un discriminante negativo:

$$\Delta = (-2a)^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0.$$

Si tratta dunque di un polinomio di secondo grado irriducibile in $\mathbb{R}[X]$ in quanto non può essere scomposto come prodotto di due polinomi di primo grado a coefficienti reali. In $\mathbb{R}[X]$ i polinomi irriducibili sono dati dai polinomi di primo grado (come in $\mathbb{C}[X]$) e dai polinomi di secondo grado della forma (8) (che invece in $\mathbb{C}[X]$ sono fattorizzabili).

Applicando il lemma 4.1 e la proposizione 4.2, quando il polinomio ha coefficienti reali possiamo trasformare la fattorizzazione in $\mathbb{C}[X]$ ottenuta nel teorema 3.7 in una fattorizzazione valida in $\mathbb{R}[X]$, ovvero con fattori a coefficienti reali, basta accoppiare tra loro i fattori relativi a zeri coniugati.

Teorema 4.4. *Sia $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio a coefficienti reali. Supponiamo che P abbia ℓ zeri reali distinti e n coppie di zeri complessi coniugati distinti. Indichiamo con r_j, per $j = 1, 2, \ldots, \ell$, gli zeri reali ciascuno con la sua molteplicità μ_j, e con*

$$z_k = a_k + \mathrm{i}b_k, \qquad \overline{z_k} = a_k - \mathrm{i}b_k, \qquad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad b_k > 0,$$

le coppie di zeri complessi, per $k = 1, 2, \ldots, n$, ciascuna con la sua molteplicità m_k. Allora il grado di P è dato dalla somma delle molteplicità degli zeri,

$$\deg(P) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j + 2\sum_{k=1}^{n} m_k,$$

e vale la fattorizzazione in $\mathbb{R}[X]$ della forma

$$P(X) = c\prod_{j=1}^{\ell}(X - r_j)^{\mu_j} \cdot \prod_{k=1}^{n}(X - 2a_kX + a_k^2 + b_k^2)^{m_k}, \tag{9}$$

dove il numero reale c indica il coefficiente direttore di P.

Esempio 4.5. Ad esempio, se un polinomio P a coefficienti reali ha come zeri

- $z = -1$ con molteplicità 3,
- uno zero semplice $z = 3$,
- la coppia di numeri coniugati $2 \pm 3\mathrm{i}$ con molteplicità 2,

e P ha come coefficiente direttore 5, allora si tratta del polinomio:

$$\begin{aligned} P(X) &= 5(X+1)^3(X-3)(X^2-4X+13)^2 = \\ &= 5X^8 - 40X^7 + 180X^6 - 320X^5 - 110X^4 + 1560X^3 - 1540X^2 - 5200X - 2535. \end{aligned}$$

Esempio 4.6. Il polinomio $P(X) = \frac{1}{16}X^8 + 16$ che abbiamo già fattorizzato nell'esempio 3.10 è un polinomio a coefficienti reali. I suoi zeri, che abbiamo già calcolato, formano 4 coppie di numeri complessi coniugati:

$$a \pm \mathrm{i}b, \quad b \pm \mathrm{i}a, \quad -b \pm \mathrm{i}a, \quad -a \pm \mathrm{i}b,$$

con $a := \sqrt{2+\sqrt{2}}$ e $b := \sqrt{2-\sqrt{2}}$. Siccome $a^2 + b^2 = 4$, otteniamo la fattorizzazione a coefficienti reali

$$\begin{aligned} P(X) = \frac{1}{16}&\left(X^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\,X + 4\right)\left(X^2 - 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\,X + 4\right)\cdot \\ &\cdot\left(X^2 + 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\,X + 4\right)\left(X^2 + 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\,X + 4\right). \end{aligned}$$

Esercizio 4.7. Determina la fattorizzazione in fattori irriducibili reali dei seguenti polinomi:

- $X^8 - 16$;
- $X^8 + 16$;
- $X^4 + X^2 + 1$;
- $X^4 - 4X^3 + X - 4$.

Esercizio 4.8. Fattorizza in fattori irriducibili reali il polinomio

$$X^4 + X^3 + 5X^2 + 4X + 4$$

dopo aver verificato che $z = 2\mathrm{i}$ è un suo zero.

Esercizio 4.9. Determina un polinomio a coefficienti reali che abbia $z = 2 - \mathrm{i}$ come zero di molteplicità 3 e $z = -1 + \mathrm{i}$ come zero di molteplicità 2. Qual'e il grado minimo che può avere un tale polinomio?

5 Ulteriori esercizi

Esercizio 5.1. Determina tutte le soluzioni nel piano complesso delle seguenti equazioni:

$$\begin{gathered} z^3 + \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{12} = 0; \\ z^4 = 2(1+3\mathrm{i})z^2 + 10 - \mathrm{i}(6 - 2\sqrt{3}); \\ z^5 + \mathrm{i}z^2 = 0; \\ z^6 + 4\mathrm{i}z^3 - 4 = 0; \\ z^6 + 7\mathrm{i}z^3 + 8 = 0; \\ z^6 + (8-8\mathrm{i})z^3 - 64\mathrm{i} = 0; \\ z^8 + (1-\mathrm{i})z^4 - \mathrm{i} = 0. \end{gathered}$$

Esercizio 5.2. Determina quali sono i possibili valori che il numero complesso w deve assumere affinché $z := 2 + \mathrm{i}$ sia una soluzione dell'equazione

$$w^5 z + \frac{w}{z^3} = 0.$$

Esercizio 5.3. Determina per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni nel piano complesso dell'equazione

$$\left(z^4 + 4\right)\left(z^3 + c^3\mathrm{i}\right) = 0$$

possiede 4 punti distinti che hanno la stessa parte immaginaria *(ovvero che stanno sulla stessa retta orizzontale nel piano complesso).*

Esercizio 5.4. Considera i due numeri complessi $p := 4 + 3\mathrm{i}$ e $q := -1 + 2\mathrm{i}$. Determina tutti i punti z del piano complesso che soddisfano simultaneamente le condizioni

$$|z - p| = 5, \qquad |z - q| = \sqrt{5};$$

poi determina un polinomio a coefficienti reali (non identicamente nullo) che si annulla in tali punti.

Esercizio 5.5. Determina tutte le radici del polinomio

$$P(z) := 8 + \mathrm{i}z^6$$

in campo complesso ($z \in \mathbb{C}$) e quindi fattorizza P come prodotto di polinomi di primo grado (a coefficienti complessi).

Esercizio 5.6. Considera il polinomio

$$P(z) := (z^3 - 1)^2 + 1.$$

- Trova tutte le soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$ in campo complesso.
- Fattorizza $P(z)$ come prodotto di polinomi di primo grado a coefficienti complessi.
- Raggruppando a due a due i fattori corrispondenti a coppie di radici complesse coniugate, scrivi $P(z)$ come prodotto di tre polinomi di secondo grado a coefficienti reali.

Esercizio 5.7. Disegna nel piano complesso i seguenti quattro numeri:

$$z_1 := \pi + 2\mathrm{i}, \qquad z_2 := \frac{1}{\pi + 2\mathrm{i}}, \qquad z_3 := 2\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}, \qquad z_4 := \pi \mathrm{e}^{2\mathrm{i}}.$$

Costruisci poi un polinomio a coefficienti **reali** che abbia tra le sue radici questi quattro numeri.

Esercizio 5.8. Sia P il polinomio di quarto grado definito da $P(z) = z^4 + 1$. Sia S il settore circolare formato dai numeri complessi che hanno modulo minore o uguale a due e argomento compreso nell'intervallo $[\pi/4, \pi/2]$.

- Determina le quattro radici complesse z_1, z_2, z_3, z_4 del polinomio P ed esprimile sia in forma cartesiana che in forma polare.
- Fattorizza il polinomio P come prodotto di quattro polinomi di primo grado (a coefficienti complessi).
- Fattorizza il polinomio P come prodotto di due polinomi di secondo grado a coefficienti reali.
- Disegna l'insieme S nel piano complesso.
- Determina l'immagine di S tramite la funzione $z \mapsto P(z)$, che al numero complesso z associa il valore di $P(z)$. *[Suggerimento: prova prima a pensare come agisce sul modulo e sull'argomento la funzione $z \mapsto z^4$ e come agisce su parte reale e parte immaginaria la funzione $w \mapsto w + 1$.]*