

Analisi Matematica 1B - Lezione 3

Esponenziali e logaritmi in campo complesso

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 9 aprile 2020)

1 Esponenziale ad esponente complesso

La funzione esponenziale ad esponente reale,

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in]0, +\infty[,$$

verifica la fondamentale regola per la quale nei prodotti gli esponenti si sommano,

$$e^a e^b = e^{a+b}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Chiameremo questa proprietà *legge esponenziale*.

Abbiamo definito nella precedente lezione la funzione esponenziale ad esponente immaginario

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto e^{iy} := \cos(y) + i \sin(y) \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

e abbiamo verificato che anch'essa verifica la legge esponenziale,

$$e^{ia} e^{ib} = e^{i(a+b)}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Visto che un numero complesso è la somma tra un numero reale e un numero immaginario, volendo definire un esponenziale ad esponente complesso diventa naturale lasciarsi ispirare dalla legge esponenziale.

Definizione 1.1. Dato un numero complesso $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, definiamo l'esponenziale e^z come il numero complesso dato da

$$e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)). \quad (1)$$

Osservazione 1.2. Dato $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, la formula

$$e^z = e^x e^{iy},$$

essendo la quantità a destra il prodotto tra un numero positivo e^x ed un esponenziale ad esponente immaginario e^{iy} , non è altro che la scrittura in forma esponenziale del numero complesso e^z , dalla quale possiamo ricavare immediatamente le informazioni su modulo e argomento di e^z :

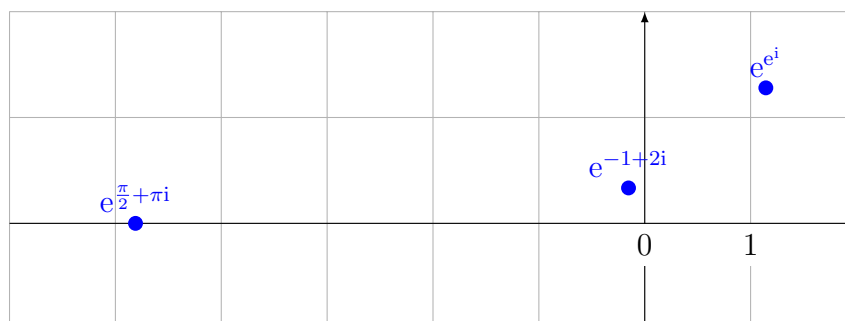
$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}, \quad \operatorname{Arg}(e^z) = y \pmod{2\pi} = \operatorname{Im}(z) \pmod{2\pi}.$$

La parte reale dell'esponente determina il modulo dell'esponenziale (ne è il logaritmo), mentre la parte immaginaria dell'esponente non è altro che l'argomento dell'esponenziale. Ricavando la forma cartesiana dalla definizione dell'esponenziale complesso troviamo anche che

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^z) &= e^x \cos(y) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)), \\ \operatorname{Im}(e^z) &= e^x \sin(y) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)). \end{aligned}$$

Esempio 1.3. Vediamo alcuni esempi:

$$\begin{aligned} e^{-1+2i} &= e^{-1} e^{2i} = \frac{\cos(2)}{e} + i \frac{\sin(2)}{e}, \\ e^{\frac{\pi}{2}+\pi i} &= e^{\frac{\pi}{2}} e^{\pi i} = -e^{\frac{\pi}{2}}, \\ e^i &= e^{\cos(1)} e^{i \sin(1)} = e^{\cos(1)} \cos(\sin(1)) + i e^{\cos(1)} \sin(\sin(1)). \end{aligned}$$



Esercizio 1.4. Calcola modulo, argomento, parte reale e parte immaginaria dei seguenti esponenziali e poi rappresenta la loro posizione nel piano complesso:

$$e^{2-3i}, \quad e^{-\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{4}}, \quad e^{\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{\pi e^{i\frac{\pi}{2}}}.$$

Proposizione 1.5. Anche per l'esponenziale ad esponente complesso continua a valere la legge esponenziale,

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Dimostrazione. Scriviamo in forma cartesiana $z = a + ib$ e $w = c + id$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Usando la definizione di esponenziale ad esponente complesso, la proprietà commutativa del prodotto e le leggi esponenziali valide per esponenziali ad esponenti reali o ad esponenti immaginari, abbiamo che

$$e^z e^w = e^{a+ib} e^{c+id} = e^a e^{ib} e^c e^{id} = e^a e^c e^{ib} e^{id} = e^{a+c} e^{i(b+d)} = e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{z+w}.$$

□

Esercizio 1.6. Verifica che vale la proprietà $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$ per il rapporto tra esponenziali complessi.

Proposizione 1.7. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, il coniugato di e^z è $e^{\bar{z}}$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice verifica, sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\overline{e^z} = \overline{e^x e^{iy}} = \overline{e^x} \overline{e^{iy}} = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.$$

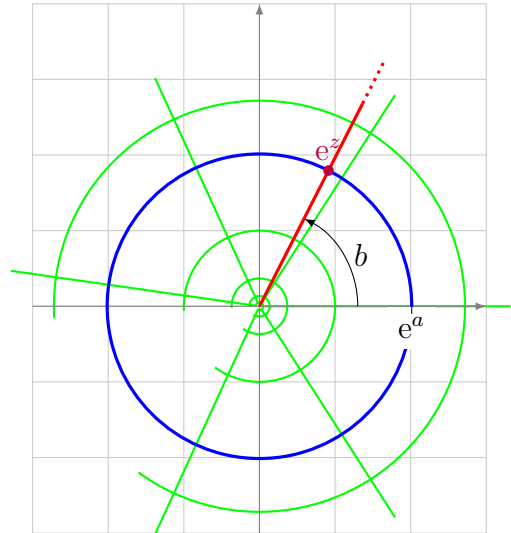
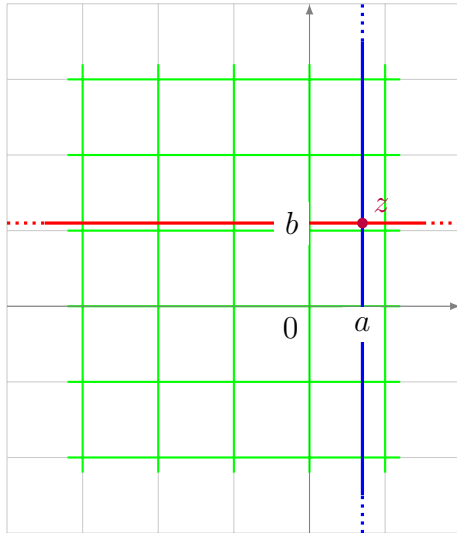
□

Cerchiamo di capire meglio come agisce in campo complesso la funzione esponenziale che ad un numero complesso z associa il numero complesso e^z ,

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) := e^z.$$

Fissiamo la parte immaginaria di z e facciamo variare la sua parte reale, sia dunque $b \in \mathbb{R}$ fissato e consideriamo $z(t) = t + ib$ con $t \in \mathbb{R}$. Al variare di t il punto $z(t)$ descrive una retta orizzontale nel piano di ordinata b ; l'esponenziale $\exp(z(t)) = e^t e^{ib}$ invece è un numero con argomento fissato b il cui modulo tende a 0 per $t \rightarrow -\infty$ e a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, dunque descrive una semiretta che parte dall'origine e si sviluppa nella direzione che forma un angolo b con il semiasse positivo delle ascisse.

Fissiamo la parte reale di z e facciamo variare la sua parte immaginaria, sia dunque $a \in \mathbb{R}$ fissato e consideriamo $z(t) = a + it$ con $t \in \mathbb{R}$. Al variare di t il punto $z(t)$ descrive una retta verticale nel piano di ascissa a ; l'esponenziale $\exp(z(t)) = e^a e^{it}$ invece è un numero con modulo fissato e^a il cui argomento varia con t , dunque descrive una circonferenza di centro l'origine e raggio e^a percorrendola in modo completo ogni volta che t varia su un intervallo di lunghezza 2π .



Esercizio 1.8. Determina l'immagine attraverso la funzione esponenziale $\exp(z) = e^z$ dei rettangoli

$$R_1 := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 10, \quad 1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2\},$$

$$R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2, \quad 1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 10\}.$$

Osservazione 1.9. La funzione esponenziale $z \mapsto e^z$ è una funzione periodica con periodo $2\pi i$, infatti

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

2 Logaritmi in campo complesso

In campo reale, il logaritmo (naturale) di un numero y è l'esponente x per il quale si ha che

$$e^x = y;$$

sappiamo che per ogni $y > 0$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ che risolve tale equazione, e che indichiamo con $\log(y)$, mentre per $y \leq 0$ non esistono logaritmi reali.

Poniamoci lo stesso problema ora in campo complesso. Dato un numero complesso w , ci chiediamo se sia possibile trovare un numero complesso z tale che

$$e^z = w. \tag{2}$$

Scriviamo w in forma esponenziale, $w = re^{i\theta}$ con $r = |w|$ e $\theta = \operatorname{Arg}(w)$ e cerchiamo invece z in forma cartesiana, $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Applicando la definizione di esponenziale ad esponente complesso, l'equazione (2) diventa

$$e^x e^{iy} = re^{i\theta},$$

che non è altro che una uguaglianza tra due forme esponenziali: a sinistra abbiamo un numero con modulo e^x e argomento y , mentre a destra abbiamo un numero con modulo r

e argomento θ . Dall'uguaglianza dei due numeri deduciamo che i due moduli devono essere uguali, mentre i due argomenti dovranno coincidere a meno di multipli interi di 2π (essendo argomenti di uno stesso numero complesso). Dunque otteniamo

$$\begin{aligned} e^x &= r, \\ y &= \theta \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

La prima di queste equazioni ha soluzione solo se $r > 0$, ovvero se $w \neq 0$, e da essa ricaviamo che

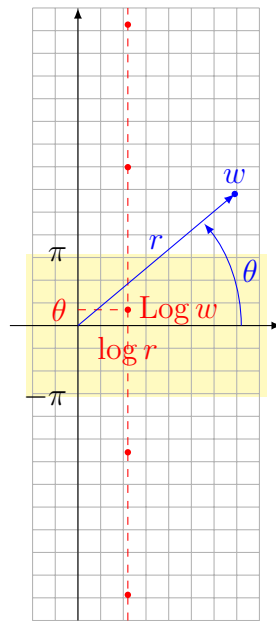
$$x = \log(r) = \log |w|.$$

Dalla seconda equazione invece ricaviamo che

$$y = \theta + 2\pi k = \text{Arg}(w) + 2\pi k,$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Troviamo dunque che le soluzioni dell'equazione (2), che chiameremo *logaritmi* (in campo complesso) del numero w , sono date

$$z = \log |w| + i \text{Arg}(w) + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Abbiamo dunque una sequenza di infiniti valori per i logaritmi di w , essi formano una progressione aritmetica in $\mathbb{C}$ di passo $2\pi i$. Ad ogni possibile valore dell'argomento di w corrisponde un valore del logaritmo, e due possibili logaritmi di w differiscono tra loro per un multiplo intero di $2\pi i$. Dunque possiamo dire che il logaritmo di un numero in campo complesso non è univocamente determinato, ma è determinato a meno di multipli interi di $2\pi i$. Possiamo comunque darci un criterio per selezionare, tra tutti i possibili valori che il logaritmo di un numero complesso può assumere, un valore che possa essere considerato il logaritmo principale.

Definizione 2.1. Dato un numero complesso w non nullo conveniamo di definire *logaritmo principale* di w quell'unico valore tra tutti i possibili logaritmi di w che possiede parte immaginaria compresa nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ (che è lo stesso intervallo che contiene l'argomento principale di w). Tale valore lo indichiamo con $\text{Log}(w)$ ed è dato da

$$\text{Log}(w) = \log |w| + i \text{Arg}(w).$$

Osservazione 2.2. Nel caso in cui convenissimo di scegliere $[0, 2\pi[$ come intervallo di riferimento per l'argomento principale di un numero complesso, allora anche per il logaritmo principale converremmo di scegliere quello con parte immaginaria compresa nell'intervallo $[0, 2\pi[$.

Esempio 2.3. Il numero $w = 1 + i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\frac{\pi}{4}$; i suoi logaritmi sono i numeri della forma

$$z = \log \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2\pi ik = \frac{1}{2} \log 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il suo logaritmo principale è $\text{Log}(1 + i) = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4}i$.

Il numero $w = -e$ ha modulo e e argomento π ; i suoi logaritmi sono i numeri della forma

$$z = \log e + \pi i + 2\pi ik = 1 + i\pi(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il suo logaritmo principale è $\text{Log}(-e) = 1 + \pi i$.

Il numero $w = e^{\frac{1}{2} - 5i}$ ha modulo $\sqrt{e}$ e argomento -5 ; i suoi logaritmi sono i numeri della forma

$$z = \log \sqrt{e} - 5i + 2\pi ik = \frac{1}{2} + i(-5 + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il suo logaritmo principale è $\text{Log}(e^{\frac{1}{2} - 5i}) = \frac{1}{2} + (-5 + 2\pi)i$.

Esercizio 2.4. Calcola tutti i possibili logaritmi dei seguenti numeri, e tra essi determina quale è quello principale:

$$\sqrt{3} - i, \quad 8i, \quad -e^{3-4i}, \quad e^{2\pi i}.$$

Ora che sappiamo come calcolare esponenziali e logaritmi in campo complesso, possiamo cimentarci nella risoluzione di equazioni di tipo esponenziale. Un'equazione del tipo

$$e^{F(z)} = e^{G(z)}$$

è verificata quando $F(z)$ e $G(z)$ sono due logaritmi dello stesso numero complesso, e, per quanto visto, ciò equivale a dire che differiscono per un multiplo intero di $2\pi i$, ovvero

$$F(z) = G(z) + 2\pi ik,$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 2.5. Determiniamo tutte le soluzioni in campo complesso dell'equazione

$$e^{\pi z} = e^{\frac{\pi}{z}}.$$

Affinché possa esistere il rapporto π/z dobbiamo richiedere che $z \neq 0$. L'uguaglianza degli esponenziali si traduce nell'uguaglianza degli esponenti modulo $2\pi i$, otteniamo quindi una famiglia di equazioni indicizzata dal parametro intero k ,

$$\pi z = \frac{\pi}{z} + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Moltiplicando tutto per z/π otteniamo una famiglia di equazioni di secondo grado,

$$z^2 = 1 + 2i k z, \quad k \in \mathbb{Z},$$

che in forma normale diventa

$$z^2 - 2i k z - 1 = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Il discriminante di queste equazioni è dato da

$$\Delta_k = (-2i k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4(1 - k^2).$$

Osserviamo che Δ_k è un numero positivo per $k = 0$, nullo per $k = \pm 1$, e negativo quando $|k| > 1$; pertanto le sue radici quadrate sono date da

$$\pm \sqrt{\Delta_k} = \begin{cases} \pm 2, & \text{se } k = 0, \\ \pm 2i\sqrt{k^2 - 1}, & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di (3) sono allora date da

$$z_{k,\pm} := \frac{2i k \pm \sqrt{\Delta_k}}{2} = \begin{cases} \pm 1, & \text{se } k = 0, \\ i(k \pm \sqrt{k^2 - 1}), & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Osserviamo che per $k \neq 0$ la soluzione $z_{k,-}$ è l'opposto del reciproco di $z_{k,+}$,

$$z_{k,+} \cdot (-z_{k,-}) = -i^2(k + \sqrt{k^2 - 1})(k - \sqrt{k^2 - 1}) = k^2 - (k^2 - 1) = 1.$$

Per piccoli valori di k abbiamo

$$\begin{aligned} z_{0,+} &= 1, & z_{0,-} &= -1, \\ z_{1,+} &= i, & z_{1,-} &= i, & z_{-1,+} &= -i, & z_{-1,-} &= -i, \\ z_{2,+} &= i(2 + \sqrt{3}), & z_{2,-} &= i(2 - \sqrt{3}), & z_{-2,+} &= i(-2 + \sqrt{3}), & z_{-2,-} &= i(-2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Per valori di $k \rightarrow +\infty$ abbiamo

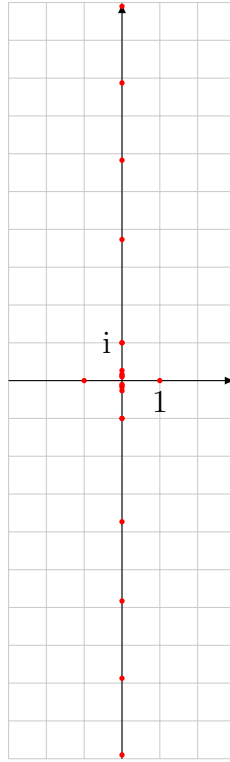
$$\begin{aligned} z_{k,+} &= i(k + \sqrt{k^2 - 1}) \approx 2ki, \\ z_{k,-} &= i(k - \sqrt{k^2 - 1}) = \frac{-i}{k + \sqrt{k^2 - 1}} \approx -\frac{1}{2k}i; \end{aligned}$$

mentre per valori di $k \rightarrow -\infty$ abbiamo invece

$$z_{k,+} = i(k + \sqrt{k^2 - 1}) = \frac{-i}{k - \sqrt{k^2 - 1}} \approx \frac{1}{2(-k)}i,$$

$$z_{k,-} = i(k - \sqrt{k^2 - 1}) \approx 2ki;$$

In figura ecco rappresentati dai punti in rosso i valori di $z_{k,\pm}$ per $|k| \leq 5$:



Esercizio 2.6. Determina tutte le soluzioni nel piano complesso per ciascuna delle seguenti equazioni:

$$e^{iz+\bar{z}} = 1;$$

$$e^{iz} = ie^z;$$

$$e^{3z} = e^{iz};$$

$$e^z = e^{1/z};$$

$$e^{\pi/z} = ie^{\pi/5};$$

$$e^{\pi/z} = \frac{1}{e^{\pi z}};$$

$$e^{-z^2} = e^{-iz^2};$$

$$e^{(z^4)} + i = 0;$$

$$2e^z + e^{z^2} = 0;$$

$$e^{2z} + 3e^z + 2 = 0;$$

$$e^z + 2e^{-z} + 3 = 0;$$

$$e^{(e^z)} = i.$$

Esercizio 2.7. Tra tutte le infinite soluzioni dell'equazione

$$e^{z-i\pi} = e^{iz-\pi},$$

determina e rappresenta graficamente nel piano complesso quelle con modulo minore di 3π .

Esercizio 2.8. Determina *quante* soluzioni dell'equazione

$$e^{2\pi iz} = ie^{2\pi}$$

sono contenute nel disco di raggio 2π centrato nell'origine del piano complesso.

Esercizio 2.9. Considera l'equazione in campo complesso

$$e^{(z^2)} = i.$$

In quali quadranti del piano complesso si trovano le sue soluzioni?

Esercizio 2.10. Considera, in campo complesso, l'equazione:

$$1 + e^{(e^z)} = 0.$$

- Determina due soluzioni distinte dell'equazione e disegnale nel piano complesso.
- Determina una formula per ricavare tutte le (infinite) soluzioni dell'equazione e descrivi graficamente la loro collocazione nel piano complesso.

Esercizio 2.11. Disegna nel piano complesso la regione dei numeri complessi z che verificano simultaneamente le seguenti condizioni:

- $|z - i| \leq 4$;
- $|e^{iz}| \leq e$;
- l'argomento principale del quadrato di z è compreso tra 0 e $\pi/2$.

Esercizio 2.12. Considera la seguente equazione in campo complesso:

$$1 + e^{i\pi e^z} = 0.$$

- Determina almeno tre soluzioni distinte e non allineate tra loro.
- Determina *quante* soluzioni distinte sono contenute nel rettangolo

$$Q := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 10\}.$$

3 Funzioni trigonometriche e iperboliche estese al campo complesso

Ora che abbiamo esteso la funzione esponenziale a tutto il campo complesso possiamo estendere anche le funzioni iperboliche in modo molto naturale su tutto $\mathbb{C}$ replicando esattamente le definizioni che già valevano in campo reale ponendo

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Abbiamo ricavato nella seconda lezione le identità di Eulero che esprimono le funzioni coseno e seno in termini di esponenziali ad esponente immaginario:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Queste formule ci suggeriscono il modo per estendere le funzioni trigonometriche a tutto il campo reale, basta sostituire al numero reale θ che appare negli esponenti un numero complesso. Definiamo dunque

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Osserviamo che con queste definizioni appare uno stretto legame tra funzioni iperboliche e funzioni trigonometriche, abbiamo infatti che

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad \sinh(iz) = i \sin(z).$$

Molte proprietà algebriche di queste funzioni che valevano in campo reale continuano a valere anche in campo complesso:

Proposizione 3.1. *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ abbiamo:*

$$\begin{aligned} (\cos z)^2 + (\sin z)^2 &= 1, \\ \cos(z+w) &= (\cos z)(\cos w) - (\sin z)(\sin w), \\ \sin(z+w) &= (\sin z)(\cos w) + (\cos z)(\sin w), \\ (\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 &= 1, \\ \cosh(z+w) &= (\cosh z)(\cosh w) + (\sinh z)(\sinh w), \\ \sinh(z+w) &= (\sinh z)(\cosh w) + (\cosh z)(\sinh w). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Vediamo le prime due identità, le altre si possono ottenere in modo simile e le lasciamo come esercizio al lettore. Cominciamo con osservare che, per la definizione di coseno e seno e per la legge esponenziale, abbiamo

$$\begin{aligned} 4(\cos z)(\cos w) &= (e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(-z+w)} + e^{i(-z-w)}, \\ -4(\sin z)(\sin w) &= (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw}) = e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{i(-z+w)} + e^{i(-z-w)}. \end{aligned}$$

Sommando le due righe otteniamo la formula di addizione per il coseno:

$$4((\cos z)(\cos w) - (\sin z)(\sin w)) = 2(e^{i(z+w)} + e^{i(-z-w)}) = 4\cos(z+w).$$

Se in questa formula scegliamo $w = -z$ otteniamo

$$(\cos z)(\cos(-z)) - (\sin z)(\sin(-z)) = \cos(z + (-z)) = \cos(0) = 1,$$

e se usiamo il fatto che il coseno è una funzione pari e il seno una funzione dispari otteniamo

$$(\cos z)(\cos z) + (\sin z)(\sin z) = 1.$$

□

Esercizio 3.2. Verifica che per ogni $z \in \mathbb{C}$ valgono le seguenti identità:

$$\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(z), \quad \cosh\left(z - i\frac{\pi}{2}\right) = i \sinh(z).$$

Alcune proprietà geometriche valide in campo reale ora invece non sono più garantite. Ad esempio, le funzioni coseno e seno in campo complesso non sono funzioni limitate. Abbiamo infatti che se $z = x + iy$ con $x, y, \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= (\cos z) \overline{(\cos z)} = \frac{1}{4} (e^{iz} + e^{-iz}) (\overline{e^{iz}} + \overline{e^{-iz}}) = \\ &= \frac{1}{4} (e^{iz} + e^{-iz}) (e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}) = \frac{1}{4} (e^{i(z-\bar{z})} + e^{i(z+\bar{z})} + e^{i(-z-\bar{z})} + e^{i(-z+\bar{z})}) = \\ &= \frac{1}{4} (e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}) = \frac{1}{2} (\cos(2x) + \cosh(2y)). \end{aligned}$$

Quando la parte immaginaria y tende a $\pm\infty$ ecco che da questa formula si evince che anche $|\cos(z)|$ tende a $+\infty$. Per il seno, in modo analogo si trova che

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{2} (-\cos(2x) + \cosh(2y)).$$

Ne segue anche che vale $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2y)$, da non confondere con l'identità $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$.

Le funzioni coseno iperbolico e seno iperbolico in campo complesso sono funzioni periodiche con periodo $2\pi i$. Ciò segue dalla periodicità della funzione esponenziale. Abbiamo infatti che

$$\cosh(z + 2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} + e^{-z-2\pi i}}{2} = \frac{e^z e^{2\pi i} + e^{-z} e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^z \cdot 1 + e^{-z} \cdot 1}{2} = \cosh(z),$$

e analogamente per il seno iperbolico.

Equazioni trigonometriche ora possono essere trattate come equazioni esponenziali.

Esempio 3.3. Determiniamo tutte le soluzioni in campo complesso dell'equazione

$$\sin(z) = 2.$$

Utilizzando la definizione di coseno l'equazione diventa

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i.$$

Se poniamo ora $e^{iz} = w$, e dunque $e^{-iz} = \frac{1}{w}$, l'equazione esponenziale per z diventa una equazione algebrica per w ,

$$w - \frac{1}{w} = 4i.$$

Moltiplicando per w ci riconduciamo ad una equazione di secondo grado

$$w^2 - 4iw - 1 = 0. \tag{4}$$

Il suo discriminante è

$$\Delta = (-4i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -16 + 4 = -12 < 0.$$

Le radici quadrate del discriminante sono

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-12} = \pm 2\sqrt{3}i.$$

Dunque le due soluzioni di (4) sono

$$w_{\pm} = \frac{4i \pm \sqrt{\Delta}}{2} = (2 \pm \sqrt{3})i = (2 \pm \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Ora che abbiamo trovato i valori per w ricordiamoci che $e^{iz} = w$ e dunque quando $w = w_{\pm}$ abbiamo

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

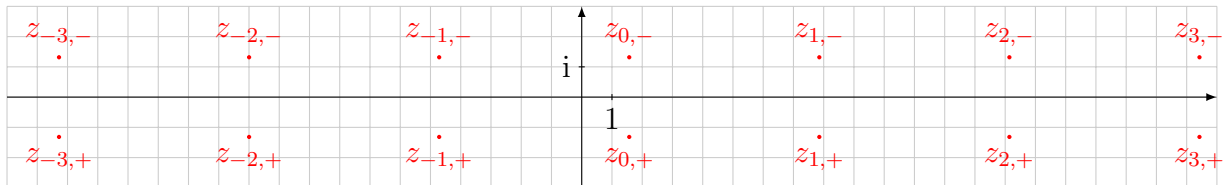
Passando ai logaritmi troviamo che le soluzioni sono date dai logaritmi di $w_{\pm}$,

$$iz_{k,\pm} = \log(2 \pm \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Siccome $2 - \sqrt{3}$ è il reciproco di $2 + \sqrt{3}$, abbiamo che $\log(2 - \sqrt{3}) = -\log(2 + \sqrt{3})$. Dividendo per i (ovvero moltiplicando per $-i$) ricaviamo che le soluzioni possono essere scritte nella forma

$$z_{k,\pm} = \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \mp i\log(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In figura ecco rappresentati dai punti in rosso i valori di $z_{k,\pm}$ per $|k| \leq 3$:



Esercizio 3.4. Determina tutte le soluzioni nel piano complesso per ciascuna delle seguenti equazioni:

$$\cos z = 2;$$

$$\cos z = \sin z;$$

$$\cos(z) + \sin(z) = 1 + i;$$

$$\sin(1/z) = 2;$$

$$\sin z = i;$$

$$|\cos z| = |\sin z|;$$

$$\cos(z) \sin(z) = \sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$\sin(z^2) = 2.$$

Esercizio 3.5. Determina quante soluzioni dell'equazione $\cos(z) = i$, in campo complesso, hanno modulo minore di 10.