Analisi Matematica 1B - Lezione 29

Integrali multipli generalizzati

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 28 giugno 2020)

Dopo aver visto come è possibile generalizzare l'integrale di Riemann in una variabile al caso di funzioni non limitate o di intervalli non limitati, consideriamo ora il caso analogo per integrali in più variabili. Nel caso di una variabile,

per una funzione f definita su un intervallo $[a, b[$ e con possibili problemi di non limitatezza verso l'estremo b abbiamo definito l'integrale generalizzato di f su $[a, b[$ tramite il limite

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f.$$

L'intervallo $[a, c]$, sul quale calcoliamo un integrale di Riemann, quando $c \to b^-$ va ad "invadere" tutto l'intervallo $[a, b[$, ed lo fa in un modo molto semplice e naturale, allargandosi. Quando invece consideriamo domini in $\mathbb{R}^2$ ci sono tanti modi diversi di avvicinarsi ai suoi punti di frontiera e ci possono essere innumerevoli modi di "invadere" una regione di integrazione con domini sui quali l'integranda è integrabile secondo Riemann. Quando la funzione da integrare è non negativa, tutti i diversi modi che si possono usare per approssimare l'integrale della funzione tramite integrali su domini in cui la funzione risulta integrabile secondo Riemann producono lo stesso risultato. Ciò è legato alla proprietà di monotonia dovuta al fatto che allargando il dominio il valore dell'integrale può solo crescere; per funzioni che presentano cambi di segno ci sono casi in cui il risultato può dipendere dalla strategia di approssimazione che si sceglie.

1 Approssimazioni invadenti

Definiamo prima di tutto cosa intendiamo quando diciamo che una successione crescente di domini "invade" una regione del piano.

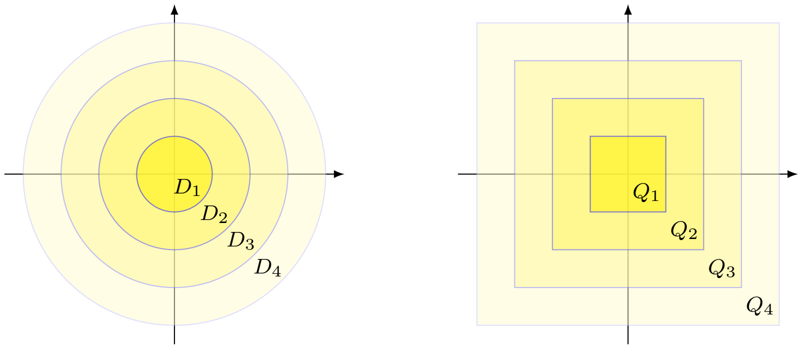
Definizione 1.1. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Una successione $(D_n)_{n \in N}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si dice che *invade* Ω quando:

- ciascun insieme D_n è misurabile (secondo Peano-Jordan);
- la successione è crescente, $D_n \subseteq D_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- ciascun insieme D_n è contenuto in Ω;
- l'insieme $\Omega \setminus \bigcup_n D_n$, formato dai punti di Ω che non sono contenuti in nessuno dei D_n, è un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue).

Esempio 1.2. La successione $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formata dai dischi con centro nell'origine e raggio n e la successione (Q_n) formata dai quadrati con centro l'origine e lati di lunghezza $2n$ paralleli agli assi,

$$D_n := \left\{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant n^2\right\}, \quad Q_n := \{(x,y)\colon\ |x| \leqslant n,\ |y| \leqslant n\},$$

sono due successioni che invadono tutto il piano $\mathbb{R}^2$.

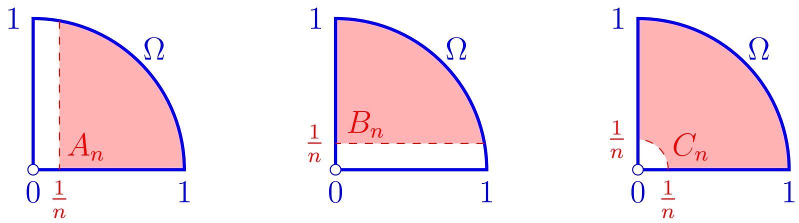


Esercizio 1.3. Considera le successioni (D_n) e (Q_n) definite nell'esempio 1.2.

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ determina un $m \in \mathbb{N}$ tale che $D_n \subseteq Q_m$.
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ determina un $m \in \mathbb{N}$ tale che $Q_n \subseteq D_m$.

Esempio 1.4. Sia $\Omega := \{(x,y)\colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$ il quarto di cerchio con centro nell'origine e raggio 1 contenuto nel primo quadrante e privato dell'origine. Consideriamo le successioni $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definite da:

$$A_n := \left\{(x,y) \in \Omega\colon x \geqslant \frac{1}{n}\right\},$$
$$B_n := \left\{(x,y) \in \Omega\colon y \geqslant \frac{1}{n}\right\},$$
$$C_n := \left\{(x,y) \in \Omega\colon x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{n^2}\right\}.$$



Si tratta di tre successioni che invadono, in modi diversi, il dominio Ω. Osserviamo che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ non si ha mai $A_n \subseteq B_m$ e nemmeno $B_n \subseteq A_m$, mentre $A_n \cup B_n \subseteq C_n$. L'unione di tutti gli A_n ricopre Ω ad eccezione della parte della frontiera di Ω che si trova sull'asse y e che comunque costituisce un insieme di misura nulla. L'unione di tutti i B_n ricopre Ω ad eccezione della parte della frontiera di Ω che si trova sull'asse x e che comunque costituisce un insieme di misura nulla. L'unione di tutti i C_n ricopre Ω completamente.

Quando vogliamo definire l'integrale di una funzione f su un dominio Ω senza l'ipotesi di limitatezza per f o per Ω non possiamo usare la definizione di integrale di Riemann, possiamo però provare ad utilizzare una successione di domini limitati (D_n) che invade Ω, tale che f sia integrabile secondo Riemann su ciascun D_n, e ottenere il valore dell'integrale su Ω come limite degli integrali (di Riemann) su D_n. Non è detto però che questa procedura porti ad un valore ben definito dell'integrale su Ω. Vediamo un esempio in cui il risultato che si ottiene dipende dalla scelta della successione invadente.

Esempio 1.5. Consideriamo la funzione $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, proviamo ad integrarla sul dominio $\Omega := \{(x,y)\colon x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$ dell'esempio 1.4. La funzione $f(x,y)$ non è limitata su Ω, in quanto non è limitata quando (x,y) si avvicina all'origine, abbiamo infatti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{y\to 0^+} f(0,y) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{y^2} = -\infty.$$

Per approssimare l'integrale su Ω proviamo ad utilizzare le tre successioni invadenti (A_n), (B_n) e (C_n) definite sempre nell'esempio 1.4.

Per integrare su A_n osserviamo che

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\Big), \quad A_n = \left\{(x,y)\colon \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\right\},$$

e dunque integrando prima in y e poi in x troviamo

$$\iint_{A_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \partial_y\big(\frac{y}{x^2+y^2}\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ sembrerebbe naturale porre

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \iint_{A_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \\ = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = +\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Per integrare su B_n osserviamo che

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{-x}{x^2+y^2}\Big), \quad B_n = \left\{(x,y)\colon \frac{1}{n} \leqslant y \leqslant 1,\, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}\right\},$$

e dunque integrando prima in x e poi in y troviamo

$$\iint_{B_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \partial_x\Big(\frac{-x}{x^2+y^2}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{\frac{1}{n}}^{1} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ sembrerebbe naturale porre

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \iint_{B_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$

Per integrare su C_n procediamo utilizzando coordinate polari centrate nell'origine con $\frac{1}{n} \leqslant r \leqslant 1$ e $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, e otteniamo

$$\iint_{C_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{\frac{1}{n}\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} \frac{(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}{r^4} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\mathrm{d}r}{r} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \big((\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2\big)\,\mathrm{d}\theta = (\log n)\cdot 0 = 0. \quad (1)$$

Passando al limite per $n \to \infty$ sembrerebbe naturale porre

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \iint_{C_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Confrontando i tre procedimenti vediamo che scegliendo approssimazioni che invadono il dominio Ω in tre modi diversi troviamo tre valori diversi come candidati al valore dell'integrale di f su Ω. Ciò significa che in questo caso non è possibile assegnare un valore in modo univoco all'integrale, dunque l'integrale non è definito. Nel caso della successione A_n all'allargarsi dei domini il valore dell'integrale cresce, con B_n decresce, con C_n rimane costante.

2 Integrali generalizzati per funzioni non negative

Quando la funzione da integrare assume solo valori non negativi, all'allargarsi del dominio di integrazione il valore dell'integrale non può decrescere, e dunque grazie a questa proprietà di monotonia possiamo definire l'integrale generalizzato su un insieme Ω come il valore più grande che si riesce ad approssimare integrando su regioni sulle quali la funzione risulta essere integrabile secondo Riemann.

Definizione 2.1. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $f\colon \Omega \to [0,+\infty[$ una funzione a valori non negativi. Supponiamo che esista una successione di domini $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che invade Ω e tale che f sia integrabile secondo Riemann su ciascun insieme D_n. Definiamo *integrale in senso generalizzato* di f su Ω la quantità

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} := \sup_{D} \int_{D} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad (2)$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di D tra tutti i sottoinsiemi di Ω che sono misurabili secondo Peano-Jordan e sui quali f è integrabile secondo Riemann. Se l'integrale definito in (2) ha un valore finito allora si dice che è *convergente* e che f è *integrabile in senso generalizzato* su Ω; se invece vale $+\infty$ si dice che è *divergente*.

Si può dimostrare che per funzioni non negative il valore dell'integrale generalizzato, quando esiste almeno una successione di insiemi che invade il dominio di integrazione e sui quali la funzione è integrabile secondo Riemann, non dipende dalla successione invadente scelta.

Proposizione 2.2. *Qualsiasi sia la successione di domini* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *che invade* Ω *e tale che la funzione a valori non negativi* f *sia integrabile secondo Riemann su ciascun insieme* D_n*, si ha sempre che*

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{n\to+\infty}\int_{D_n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Omettiamo la dimostrazione rigorosa di questa proposizione. Ci limitiamo alla seguente osservazione

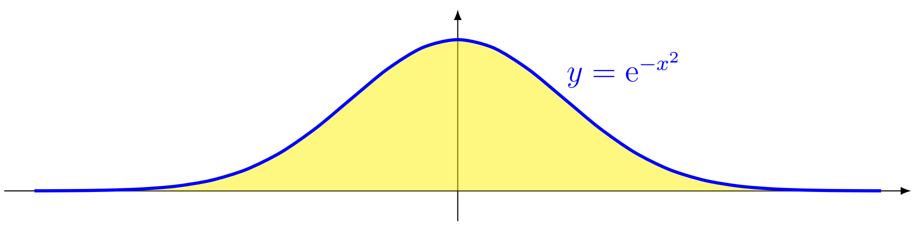
Osservazione 2.3. Se abbiamo due successioni $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ che invadono il dominio Ω, in modo che per ogni n esiste un m tale che $C_n \subseteq D_m$ e viceversa per ogni m esiste un n tale che $D_m \subseteq C_n$, e la funzione a valori non negativi f definita su Ω è integrabile su ciascun C_n e ciascun D_m, allora è facile verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{C_n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{m\to+\infty}\int_{D_m} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

in quanto le due successioni di integrali sono monotone non decrescenti, e dalle ipotesi sulle successioni invadenti segue che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{C_n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sup_{m\in\mathbb{N}}\int_{D_m} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Come applicazione dell'osservazione 2.3 otteniamo un importante risultato: il calcolo dell'integrale su tutto $\mathbb{R}$ della funzione *gaussiana* e^{-x^2}. Tale funzione gioca un ruolo fondamentale nel calcolo delle probabilità (viene usata per definire la *distribuzione normale*).



Proposizione 2.4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Dimostrazione. Si tratta di calcolare il valore di un integrale generalizzato di una funzione in una variabile che abbiamo già visto nella scorsa lezione essere convergente. Purtroppo non è possibile esprimere una primitiva della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ usando funzioni elementari e quindi non riusciamo ad ottenere il valore dell'integrale applicando la definizione di integrale generalizzato in una variabile. Il trucco in questo caso è quello di ricorrere al calcolo dell'integrale generalizzato sul piano $\mathbb{R}^2$ della funzione gaussiana in due dimensioni

$$F(x, y) := f(x)f(y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}.$$

Eseguiamo il calcolo dell'integrale $\iint_{\mathbb{R}^2} F$ utilizzando le due successioni (D_n) e (Q_n) di domini che invadono $\mathbb{R}^2$ presentate nell'esempio 1.2. Integrando sui dischi D_n in coordinate polari, siccome $\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \mathrm{e}^{-r^2}$, abbiamo

$$\iint_{D_n} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^n \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi \int_0^n \mathrm{e}^{-r^2}\, 2r\,\mathrm{d}r = \pi \left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right).$$

Osserviamo che il fattore r del determinante jacobiano del cambio di variabili in coordinate polari è stato di grande aiuto in questo caso per il calcolo dell'integrale. Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \pi \left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right) = \pi. \tag{3}$$

Integrando sui quadrati Q_n, siccome $\mathrm{e}^{-^2-y^2} = \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}$, con le formule di riduzione troviamo

$$\iint_{Q_n} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-n}^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-n}^n \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-n}^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{Q_n} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{-n}^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2. \tag{4}$$

Per l'osservazione 2.3 i due limiti (3) e (4) devono coincidere; ricaviamo allora che

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \pi,$$

e siccome l'integrale dentro parentesi non può essere negativo, esso deve essere uguale a $\sqrt{\pi}$. □

Esempio 2.5. Determiniamo per quali esponenti p si ha la convergenza dell'integrale

$$\iint_{0<\|(x,y)\|\leqslant 1} \frac{1}{\|(x, y)\|^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

La funzione integranda presenta un singolarità per $(x, y) \to (0, 0)$, quindi integriamo su una successione di domini che evita intorni dell'origine con raggio sempre più piccolo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$D_n := \left\{ (x, y) \colon \frac{1}{n} \leqslant \|(x, y)\| \leqslant 1 \right\},$$

questa successione di domini invade il disco di centro l'origine e raggio 1. In coordinate polari la variabile radiale è $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$, la funzione integranda dunque dipende solo da r e non dall'angolo θ; integrando su D_n otteniamo

$$\iint_{D_n} \frac{1}{\|(x, y)\|^p} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{r^p} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^{p-1}}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ ricaviamo

$$\iint_{0 < \|(x,y)\| \leqslant 1} \frac{1}{\|(x, y)\|^p} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2\pi \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^{p-1}},$$

dove l'integrale a destra è un integrale generalizzato in una variabile che sappiamo essere convergente se e solo se abbiamo $p - 1 < 1$; dunque l'integrale (5) converge se e solo se $p < 2$.

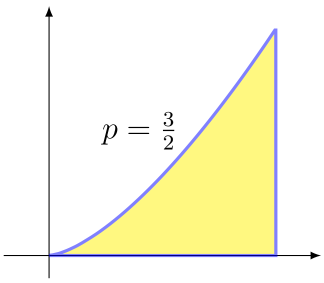
Esercizio 2.6. Determina per quali valori di p si ha la convergenza dell'integrale

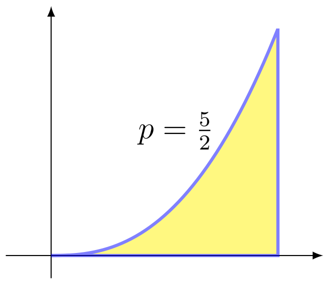
$$\iint_{\|(x,y)\| \geqslant 1} \frac{1}{\|(x, y)\|^p} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

L'integrabilità di una funzione può dipendere dal tipo di singolarità che la funzione presenta, ma dipende anche in modo sostanziale dalla geometria del dominio di integrazione.

Esempio 2.7. Determiniamo per quali valori del parametro $p > 0$ si ha che la funzione $f(x, y) := x^{-3}$ è integrabile in senso generalizzato sul dominio

$$\Omega_p := \{(x, y) \colon 0 < x \leqslant 1, \, 0 \leqslant y \leqslant x^p\}.$$





Per evitare la singolarità della funzione integranda per $x \to 0^+$ integriamo sulla successione di domini semplici (D_n) che invade Ω_p, definita da

$$D_{p,n} := \left\{(x,y)\colon \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant x^p\right\}.$$

Abbiamo

$$\iint_{D_{p,n}} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\int_0^{x^p} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^{3-p}}\,\mathrm{d}x.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$\iint_{\Omega_p} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{3-p}}\,\mathrm{d}x,$$

e sappiamo che l'integrale generalizzato di destra converge se e solo se $3-p<1$, ovvero $p>2$.

Esercizio 2.8. Determina per quali valori di $p>0$ si ha che si ha che la funzione $f(x,y) := x^2$ è integrabile in senso generalizzato sul dominio

$$\Omega_p := \left\{(x,y)\colon x \geqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant x^{-p}\right\}.$$

Come nel caso di integrali in una variabile, anche per gli integrali generalizzati in più variabili vale il criterio del confronto.

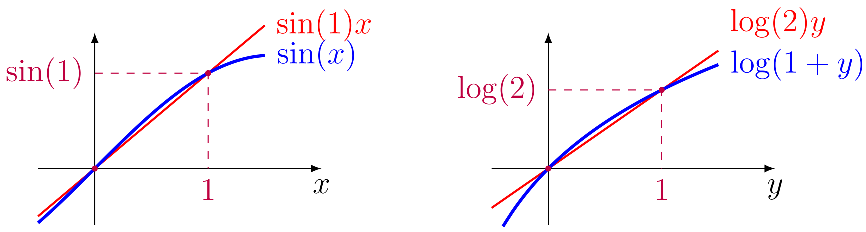
Proposizione 2.9. *Siano f e g due funzioni definite su Ω sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $0 \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Se sono definiti (convergenti o divergenti) gli integrali di f e g su Ω allora abbiamo $\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \int_\Omega g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, e in particolare:*

- *se $\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ diverge, allora $\int_\Omega g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ diverge;*
- *se $\int_\Omega g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ converge, allora $\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ converge.*

Esempio 2.10. Studiamo la convergenza dell'integrale

$$\iint_{\substack{0<x\leqslant 1\\ 0<y\leqslant 1}} \frac{1}{(\sin x)^2 + \log(1+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Cerchiamo di semplificare lo studio dell'integrale cercando di stimare le funzioni che compaiono nel denominatore con funzioni più semplici e che possiamo integrare.



Siccome $\sin(x)$ e $\log(1+y)$ hanno la concavità verso il basso su $[0,1]$, quando $0 < x \leqslant 1$ abbiamo $\sin(x) \geqslant \sin(1)x$, e quando $0 < y \leqslant 1$ abbiamo $\log(1+y) \geqslant \log(2)y$; dunque sul dominio di integrazione vale la seguente stima per la funzione integranda,

$$\frac{1}{(\sin x)^2 + \log(1+y)} \leqslant \frac{1}{(\sin 1)^2 x^2 + (\log 2)y} \leqslant \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{x^2+y},$$

dove $C = \min\{(\sin 1)^2, \log 2\} > 0$. L'integrale di $\frac{1}{x^2+y}$ non è difficile da studiare.

$$\iint_{\substack{0<x\leqslant 1\\ 0<y\leqslant 1}} \frac{1}{x^2+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{1}{x^2+y}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(\log(x^2+1) - \log(x^2)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant \log(2) - 2\int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = \log(2) + 2.$$

Dunque l'integrale di $\frac{1}{x^2+y}$ è convergente e quindi per confronto anche l'integrale (6) è convergente.

Esercizio 2.11. Determina se le seguenti funzioni sono integrabili in senso generalizzato sul dominio indicato:

1. $f(x,y) := \mathrm{e}^{-x}$ su $\Omega := \{(x,y) \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$;
2. $f(x,y) := \mathrm{e}^{-x-y}$ su $\Omega := \{(x,y) \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$;
3. $f(x,y) := \mathrm{e}^{-x}$ su $\Omega := \{(x,y) \colon x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$;
4. $f(x,y) := \frac{1}{\log(1+xy)}$ su $\Omega := \{(x,y) \colon x > 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$;
5. $f(x,y) := \frac{1}{\log(1+xy)}$ su $\Omega := \{(x,y) \colon x > 0,\ 0 < y \leqslant x^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

3 Integrali assolutamente convergenti

Ogni funzione scalare può essere decomposta nella differenza di due funzioni a valori non negativi, basta ad esempio considerare la parte positiva e la parte negativa della funzione,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \qquad f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) := \max\{0, -f(x)\}.$$

Se entrambe le componenti f_+ e f_- sono integrabili in senso generalizzato possiamo dire che anche la loro differenza sia integrabile.

Definizione 3.1. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Supponiamo che esista una successione di domini $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che invade Ω e tale che sia f_+ che f_- siano integrabili secondo Riemann su ciascun insieme D_n. Se gli integrali generalizzati di f_+ ed f_- su Ω

non sono entrambi divergenti allora possiamo definire l'*integrale generalizzato* di f su Ω ponendo

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} := \int_{\Omega} f_+(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\Omega} f_-(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Se tale differenza risulta finita allora diciamo che l'integrale è *convergente* e che f è *integrabile in senso generalizzato* su Ω.

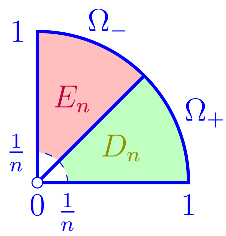
Per funzioni integrabili in senso generalizzato restano valide le proprietà di linearità dell'integrale e di additività rispetto al dominio di integrazione. Quando f è integrabile in senso generalizzato, per definizione lo sono anche f_+ e f_-, e dunque risulta integrabile anche $|f| = f_+ + f_-$, e abbiamo

$$\int_{\Omega} |f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} f_+(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Omega} f_-(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < +\infty.$$

Viceversa, quando $|f|$ è integrabile in senso generalizzato, se gli integrali di f_+ e f_- sono definiti, siccome $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ e $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$, per confronto anche f_+ e f_- sono integrabili in senso generalizzato e quindi lo è anche f. Dunque, a differenza di quanto abbiamo visto per integrali su intervalli in una variabile, per integrali in più variabili, quando la parte positiva e la parte negativa di una funzione integranda f sono integrabili secondo Riemann su una successione di domini che invade una certa regione Ω, la definizione di integrabilità in senso generalizzato di f su Ω coincide con la definizione di *assoluta* integrabilità di f su Ω.

Osservazione 3.2. Riesaminiamo l'esempio 1.5 relativo alla funzione $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ sul dominio $\Omega := \{(x,y)\colon x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$. In Ω la funzione è positiva quando $x > y$ e negativa quando $x < y$. Poniamo

$$\Omega_+ := \{(x,y) \in \Omega\colon x \geqslant y\}, \qquad \Omega_- := \{(x,y) \in \Omega\colon x \leqslant y\}.$$



La parte positiva f_+ di f coincide con f su Ω_+ ed è nulla su Ω_-, dunque

$$\iint_{\Omega} f_+(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_+} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Per calcolare questo integrale integriamo sui domini $D_n := \left\{(x,y) \in \Omega_+ \colon x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ in coordinate polari con calcoli simili a quelli svolti in (1)

$$\iint_{D_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{\frac{1}{n} \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}}} \frac{(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2}{r^4} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\mathrm{d}r}{r} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2\right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\log n.$$

Troviamo così che l'integrale di f_+ diverge,

$$\iint_\Omega f_+(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\log n = +\infty.$$

La parte negativa f_- di f coincide con $-f$ su Ω_- ed è nulla su Ω_+, dunque

$$\iint_\Omega f_-(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega_-} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Per calcolare questo integrale integriamo sui domini $E_n := \left\{(x,y) \in \Omega_- \colon x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ in coordinate polari con calcoli simili a quelli svolti in (1)

$$\iint_{E_n} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{\frac{1}{n} \leqslant r \leqslant 1 \\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}}} \frac{(r\sin\theta)^2 - (r\cos\theta)^2}{r^4} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\mathrm{d}r}{r} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2\right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\log n.$$

Troviamo così che anche l'integrale di f_- diverge,

$$\iint_\Omega f_-(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \iint_{E_n} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\log n = +\infty.$$

In questo caso l'integrale di $f = f_+ - f_-$ su Ω, non può essere definito in quanto ci troviamo in una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$.

Esercizio 3.3. Determina per quali valori di $p > 0$ si ha che $f(x,y) := \frac{y}{(x^2+y^2)^p}$ è integrabile in senso generalizzato sul dominio $\Omega := \{(x,y) \colon 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.4. Verifica che la funzione $f(x,y) := \sin(x-y)\mathrm{e}^{-|x+y|}$ è integrabile in senso generalizzato sul quadrante $Q := \{(x,y) \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$, ma non è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}^2$.