

Analisi Matematica 1B - Lezione 27

Calcolo di integrali multipli

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 25 giugno 2020)

Continuiamo la discussione sul calcolo di integrali multipli, esaminando alcuni sistemi di coordinate particolari che risultano particolarmente utili per semplificare i calcoli quando le funzioni da integrare o il dominio di integrazione presenta simmetrie di tipo circolare o sferico.

Ricordiamo che se $\Phi: D \rightarrow \Omega$ descrive un cambio di coordinate su Ω , e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, allora vale la formula

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(\Phi(\mathbf{u})) |\det J_{\Phi}(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u}. \quad (1)$$

1 Coordinate polari

Dato un punto del piano $P_{\star} = (x_{\star}, y_{\star})$, Il sistema di *coordinate polari* centrato in $P_{\star}$ è descritto da

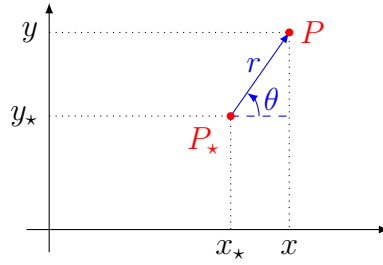
$$\begin{cases} x = x_{\star} + r \cos \theta, \\ y = y_{\star} + r \sin \theta, \end{cases} \quad (2)$$

dove r è la distanza euclidea del punto $P := (x, y)$ da $P_{\star}$,

$$r = \sqrt{(x - x_{\star})^2 + (y - y_{\star})^2},$$

e θ è l'angolo che il vettore $P_{\star}P$ forma con il semiasse positivo delle ascisse, ed è determinato, a meno di multipli interi di 2π , dalle condizioni

$$\cos \theta = \frac{x - x_{\star}}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y - y_{\star}}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y - y_{\star}}{x - x_{\star}}.$$



Il determinante Jacobiano della trasformazione $(r, \theta) \mapsto (x, y)$, da coordinate polari a coordinate cartesiane, descritta da (2) è dato da

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = r.$$

Il teorema sul cambio di variabili che abbiamo visto nella scorsa lezione in questo caso ci porta al seguente risultato

Proposizione 1.1. *Sia D un dominio regolare nel semipiano $\{(r, \theta): r \geq 0\}$, Sia Ω l'immagine di D tramite la trasformazione $(r, \theta) \mapsto (x, y)$, da coordinate polari a coordinate cartesiane, descritta da (2). Supponiamo che tale trasformazione di coordinate sia iniettiva quando ristretta ai punti interni di D . Allora, la formula (1) per il cambio di variabili si riduce a*

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x_* + r \cos \theta, y_* + r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Osserviamo che la richiesta di iniettività è certamente soddisfatta quando in D la variabile θ varia in un intervallo di ampiezza non superiore a 2π .

L'uso di coordinate polari può semplificare il calcolo di integrali doppi quando il dominio di integrazione e/o la funzione integranda presentano qualche forma di simmetria circolare.

Esempio 1.2. È ben noto che un cerchio di raggio R ha area pari a πR^2 . Con il sistema di coordinate polari la verifica di questa formula tramite integrali doppi diventa molto semplice. Sia D il disco nel piano di centro (x_*, y_*) e raggio R . Tramite il sistema di coordinate (2) il disco D corrisponde al rettangolo

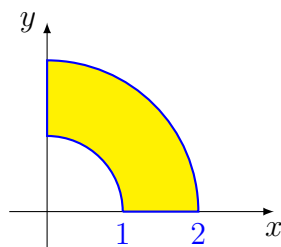
$$Q := \{(r, \theta): 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Dunque abbiamo

$$\mathcal{A}(D) := \iint_D dx dy = \iint_Q r dr d\theta = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} R^2 2\pi = \pi R^2.$$

Esempio 1.3. Calcoliamo l'integrale $\iint_{\Omega} x dx dy$ sul dominio

$$\Omega := \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



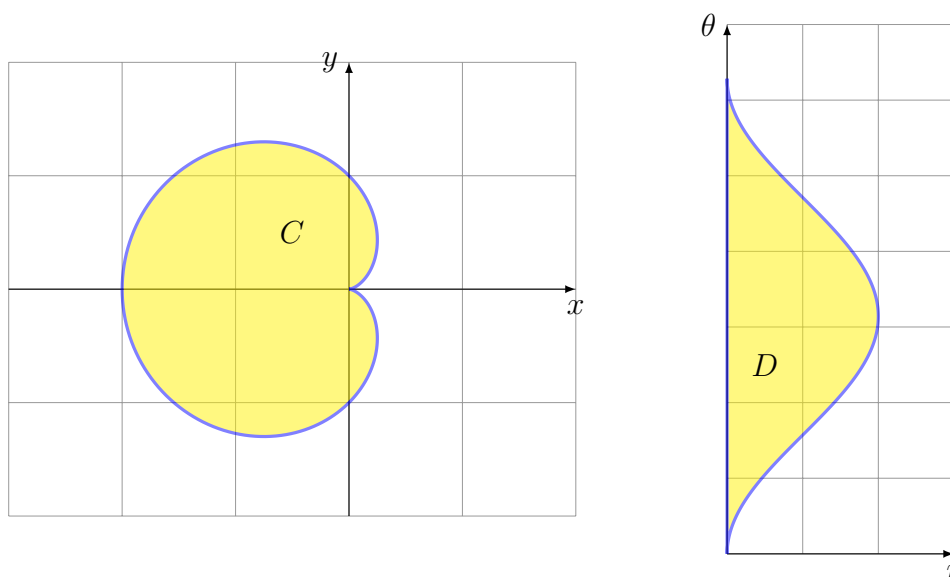
Utilizzando coordinate polari centrate nell'origine, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, il dominio Ω corrisponde alla regione rettangolare D nel piano r - θ data da

$$D = \left\{ (r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\} = [1, 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Abbiamo dunque

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \iint_D r \cos(\theta) r \, dr \, d\theta = \int_1^2 r^2 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{7}{3}.$$

Esempio 1.4. Calcoliamo l'area della regione C del piano x - y delimitata dalla curva che in coordinate polari centrate nell'origine è descritta dalla relazione $r = 1 - \cos \theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, tale curva viene detta *cardioide*.



In coordinate polari la regione C corrisponde al dominio D nel piano r - θ dato da

$$D = \{ (r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 - \cos \theta \}.$$

Dunque l'area si può calcolare nel seguente modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(C) &:= \iint_C dx \, dy = \iint_D r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\cos \theta} r \, dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2} d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta = \pi + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Esempio 1.5. Calcoliamo l'integrale $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ sul disco D di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Possiamo procedere in due modi: usando coordinate polari centrate nel centro del disco D , in modo da sfruttare la simmetria del dominio; oppure usando coordinate polari centrate nell'origine del piano, in modo da sfruttare la simmetria della funzione integranda che dipende solo dalla distanza di (x, y) dall'origine. Procediamo con il primo metodo, usiamo dunque il cambio di coordinate

$$x = 1 + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Abbiamo

$$4 - x^2 - y^2 = 4 - (1 + r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 = 3 - 2r \cos \theta - r^2,$$

e dunque l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} (3 - 2r \cos \theta - r^2) d\theta \right) r dr = \\ &= \int_0^1 (6\pi r - 2\pi r^3) dr = \frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$

Con il secondo metodo invece usiamo il cambio di coordinate

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2.$$

Osserviamo che $(x, y) \in D$ se e solo se $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$, ovvero quando

$$1 \geq (r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta)^2 = 1 - 2r \cos \theta + r^2;$$

questa disuguaglianza equivale a $r^2 - 2r \cos \theta \leq 0$ e dividendo per r , che è positivo per tutti i punti diversi dall'origine, otteniamo che il disco D in coordinate polari centrate nell'origine è descritto dalla condizione $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$, la quale impone in particolare di restringere θ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ sul quale la funzione coseno è non negativa. Dunque se consideriamo il seguente dominio semplice nel piano r - θ ,

$$C := \left\{ (r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \right\},$$

abbiamo che l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy &= \iint_C (4 - r^2) r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \theta} (4r - r^3) dr \right) d\theta = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8(\cos \theta)^2 - 4(\cos \theta)^4) d\theta. \end{aligned}$$

Utilizzando l'identità $(\cos \alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ possiamo riscrivere l'integrando in una forma più facile da integrare,

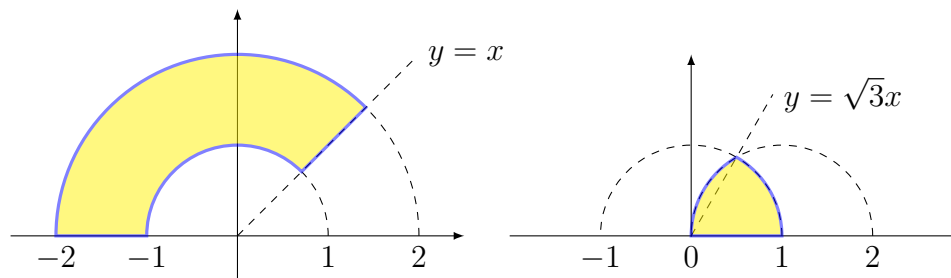
$$\begin{aligned} 8(\cos \theta)^2 - 4(\cos \theta)^4 &= 4(\cos \theta)^2 (2 - (\cos \theta)^2) = (1 + \cos(2\theta)) (3 - \cos(2\theta)) = \\ &= 3 + 2 \cos(2\theta) - (\cos(2\theta))^2 = \frac{5}{2} + 2 \cos(2\theta) - \frac{1}{2} \cos(4\theta). \end{aligned}$$

Le funzioni $\cos(2\theta)$ e $\cos(4\theta)$ hanno entrambe integrale nullo su $[-\pi/2, \pi/2]$ e dunque

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{5}{2} + 2 \cos(2\theta) - \frac{1}{2} \cos(4\theta) \right) d\theta = \frac{5}{2} \pi.$$

Esercizio 1.6. Calcola l'integrale $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ sul disco D del piano $x-y$ di centro $(1, 0)$ e raggio 1.

Esercizio 1.7. Calcola gli integrali della funzione $f(x, y) := \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sui domini rappresentati nella seguenti figure



Esercizio 1.8. Calcola l'area della regione

$$D := \left\{ (x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq \sqrt{3}(x - 1) \right\}.$$

Esercizio 1.9. Calcola l'integrale $\iint_S \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ dove S è la regione limitata del piano la cui frontiera è rappresentata dalla spirale che in coordinate polari centrate nell'origine è descritta dall'equazione $r = \theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ e dal segmento che unisce l'origine con il punto $(2\pi, 0)$.

2 Coordinate cilindriche

Nello spazio $\mathbb{R}^3$ possiamo applicare coordinate polari a due delle tre coordinate cartesiane, lasciando invariata la terza, otteniamo così un sistema di *coordinate cilindriche*. Ad esempio, le coordinate cilindriche (r, θ, z) di asse verticale (x_*, y_*) sono descritte dalla trasformazione $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z)$ definita da

$$\begin{cases} x = \Phi_1(r, \theta, z) := x_* + r \cos \theta, \\ y = \Phi_2(r, \theta, z) := y_* + r \sin \theta, \\ z = \Phi_3(r, \theta, z) := z. \end{cases}$$

La sua matrice Jacobiana è

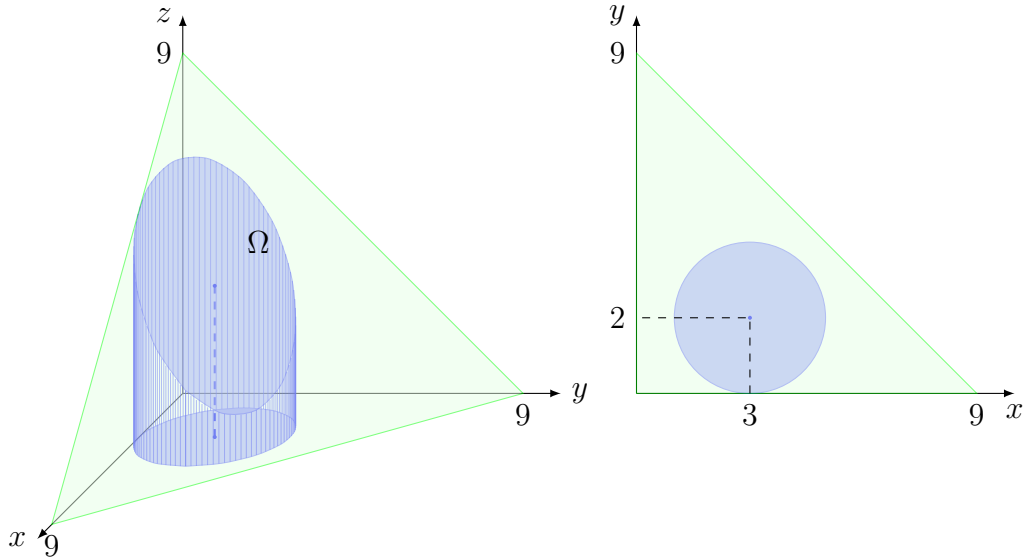
$$J_\Phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante Jacobiano della trasformazione troviamo che esso risulta essere lo stesso delle coordinate polari, $\det J_{\Phi}(r, \theta, z) = r$, e dunque negli integrali tripli opereremo la sostituzione

$$dx dy dz = r dr d\theta dz.$$

Esempio 2.1. Calcoliamo l'integrale triplo $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$ dove Ω è la porzione del cilindro verticale di asse $(x, y) = (3, 2)$ e raggio 2 compresa tra il piano orizzontale $z = 0$ e il piano obliquo di equazione $x + y + z = 9$

$$\Omega := \{(x, y, z) : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4, z \geq 0, x + y + z \leq 9\}.$$



Usiamo coordinate cilindriche con asse verticale $(x, y) = (3, 2)$,

$$x = 3 + r \cos \theta, \quad y = 2 + r \sin \theta, \quad z = z.$$

La condizione $x + y + z \leq 9$ diventa $5 + r(\cos \theta + \sin \theta) + z \leq 9$ e il dominio di integrazione si trasforma nella regione

$$D := \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2, -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 4 - r \cos \theta - r \sin \theta\}.$$

L'integrale in coordinate cilindriche diventa

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \iiint_D (3 + r \cos \theta) r dr d\theta dz = \\ &= \int_0^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{4-r \cos \theta - r \sin \theta} (3 + r \cos \theta) r dz \right) d\theta \right) dr. \end{aligned}$$

L'integrale rispetto a z è immediato in quanto l'integrando non dipende da z ,

$$\begin{aligned} J(r, \theta) &:= \int_0^{4-r \cos \theta - r \sin \theta} (3 + r \cos \theta) r dz = \\ &= (4 - r \cos \theta - r \sin \theta)(3 + r \cos \theta) r = \\ &= 12r + r^2 \cos \theta - 3r^2 \sin \theta - r^3 (\cos \theta)^2 - r^3 \cos \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Prima di integrare rispetto a θ su $[-\pi, \pi]$ osserviamo che le funzioni $\sin \theta$ e $\cos \theta \sin \theta$ sono dispari e dunque il loro integrale su intervalli simmetrici rispetto all'origine è nullo, anche l'integrale di $\cos \theta$ è nullo su un intervallo di lunghezza 2π , pertanto

$$K(r) := \int_{-\pi}^{\pi} J(r, \theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (12r - r^3(\cos \theta)^2) d\theta = 24\pi r - \pi r^3.$$

Rimane da integrare rispetto ad r ,

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^2 K(r) dr = \left[12\pi r^2 - \frac{\pi}{4} r^4 \right]_{r=0}^2 = 44\pi.$$

Esercizio 2.2. Calcola l'integrale $\iiint_{\Omega} \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy dz$, dove Ω è la regione di $\mathbb{R}^3$ esterna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, interna al cilindro di equazione $(x-1)^2 + y^2 = 1$, e compresa tra il piano $z = 0$ e il grafico della funzione $z = \frac{x^2+y^2}{x^2}$,

$$\Omega := \left\{ (x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right\}.$$

Esercizio 2.3. Calcola l'integrale $\iiint_{\Omega} \log(x^2 + y^2) dx dy dz$ dove

$$\Omega := \left\{ (x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, x + y \geq 0, 0 \leq z \leq \frac{1}{x^2 + y^2} \right\}.$$

Le coordinate cilindriche possono risultare particolarmente utili quando si ha a che fare con solidi di rotazione. Consideriamo un dominio piano D contenuto nel semipiano r - z con $r \geq 0$; facendo ruotare il semipiano intorno all'asse z con una rotazione completa, l'insieme D descrive una regione Ω in $\mathbb{R}^3$ detta *solido di rotazione*,

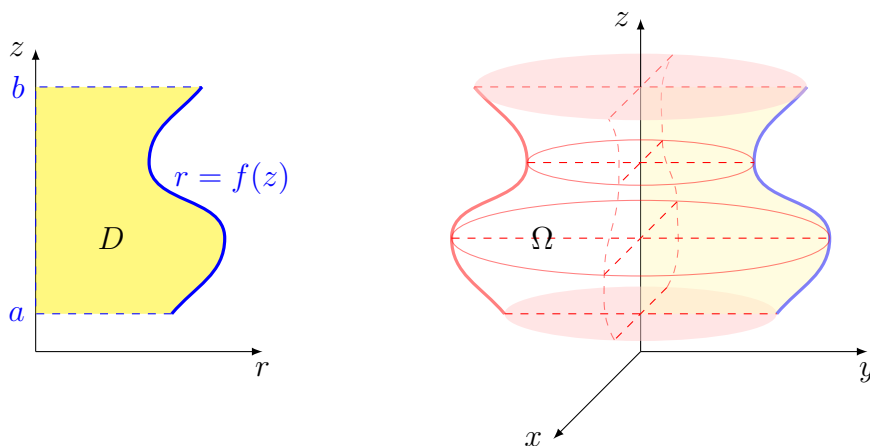
$$\Omega := \left\{ (x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in D \right\}.$$

In coordinate cilindriche tale regione corrisponde al dominio

$$\Gamma := \{(r, \theta, z) : (r, z) \in D, \theta \in [0, 2\pi]\} = D \times [0, 2\pi].$$

Il volume del solido di rotazione così ottenuto è dato da

$$\mathcal{V}(\Omega) := \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Gamma} r dr d\theta dz = 2\pi \iint_D r dr dz$$



Supponiamo ora che D sia il sottografico di una funzione continua $r = f(z)$ definita su un intervallo $[a, b]$,

$$D = \{(r, z) : a \leq z \leq b, 0 \leq r \leq f(z)\}.$$

Essendo un dominio semplice rispetto all'asse r possiamo scrivere l'integrale doppio su D come integrale iterato,

$$\iint_D r \, dr \, dz = \int_a^b \int_0^{f(z)} r \, dr \, dz = \int_a^b \frac{1}{2} (f(z))^2 \, dz.$$

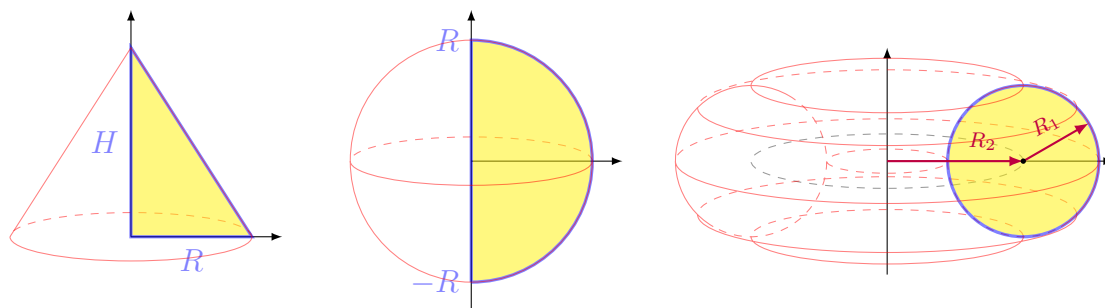
Otteniamo così che il volume del solido di rotazione è dato da

$$\mathcal{V}(\Omega) := \pi \int_a^b (f(z))^2 \, dz. \quad (3)$$

Esercizio 2.4. Spiega come si può ricavare la formula (3), in modo alternativo, integrando il solido di rotazione Ω per strati orizzontali.

Esempio 2.5. Vediamo alcuni esempi di solidi di rotazione:

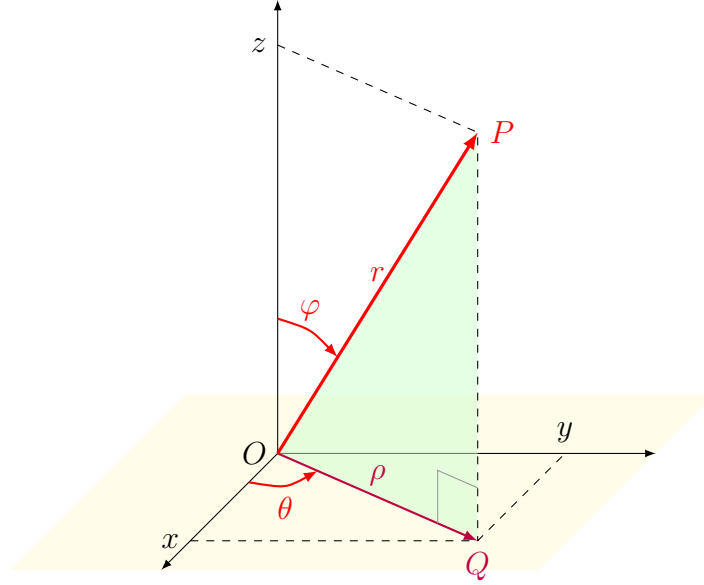
- un *cono circolare retto*, con raggio di base R e altezza H si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza R e H intorno al cateto lungo H ;
- una *palla sferica* di raggio R si ottiene facendo ruotare una semicirconferenza di raggio R intorno al suo diametro;
- un *toro* si ottiene facendo ruotare un disco circolare intorno ad una retta esterna.



Esercizio 2.6. Calcola il volume dei solidi di rotazione descritti nell'esempio 2.5.

3 Coordinate sferiche

Nello spazio $\mathbb{R}^3$ possiamo individuare un punto utilizzando come tre coordinate: la distanza rispetto ad un'origine fissata, l'angolo che il vettore dall'origine al punto forma con un asse prefissato e un altro angolo determinato dall'orientamento del semipiano uscente dall'asse che contiene il vettore. Sia $O = (0, 0, 0)$ l'origine di $\mathbb{R}^3$ e sia $P = (x, y, z)$ un generico punto non nullo di $\mathbb{R}^3$.



Indichiamo con r la distanza di P da O , essa coincide con la norma di P ,

$$r = \|P\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Sia poi φ l'angolo formato dal vettore OP con il versore $\vec{k}$ dell'asse verticale. L'angolo φ viene detto angolo di *colatitudine* e può assumere valori compresi tra 0 e π . abbiamo

$$z = P \cdot \vec{k} = r \cos \varphi,$$

Sia $Q = (x, y, 0)$ la proiezione ortogonale di P sul piano $x-y$, la distanza ρ di Q dall'origine coincide con la lunghezza del cateto del triangolo rettangolo OPQ opposto al vertice P e l'angolo in P è uguale φ , mentre l'ipotenusa è lungo r , dunque

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \varphi,$$

Utilizziamo coordinate polari (ρ, θ) nel piano $x-y$ per indicare il punto Q , abbiamo

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

L'angolo θ viene detto angolo di *longitudine* e può assumere valori che variano in un intervallo di lunghezza 2π , ad esempio $[-\pi, \pi]$, oppure $[0, 2\pi]$. Mettendo insieme tutte queste relazioni otteniamo il sistema delle *coordinate sferiche*,

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}, \quad \Phi(r, \varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi). \quad (4)$$

Calcoliamo la matrice Jacobiana di questa trasformazione di coordinate,

$$J_{\Phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Lasciamo al lettore l'esercizio di calcolare il determinante di questa matrice.

Esercizio 3.1. Calcola il determinante della matrice jacobiana (5).

Una volta effettuati i calcoli in modo corretto si trova che il determinante jacobiano per le coordinate sferiche (4) è dato da

$$\det J_{\Phi}(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \varphi,$$

dunque, nell'applicare la formula del cambio di variabili negli integrali tripli, per l'elemento infinitesimo di volume useremo la sostituzione

$$dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

Esempio 3.2. È ben noto che una sfera di raggio R ha volume pari a $\frac{4}{3}\pi R^3$. Con il sistema di coordinate sferiche la verifica di questa formula tramite integrali tripli diventa molto semplice. Sia B la palla sferica con centro nell'origine e raggio R . Tramite il sistema di coordinate (4) la palla B corrisponde al parallelepipedo

$$Q := \{(r, \varphi, \theta) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(B) &:= \iiint_B dx dy dz = \iiint_Q r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3}R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Esempio 3.3. Calcoliamo l'integrale $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$ dove il guscio Ω è la regione solida contenuta nella sfera di raggio 2 ed esterna alla sfera di raggio 1, entrambe con centro nell'origine,

$$\Omega = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

In questo caso la variabile radiale è ristretta all'intervallo $1 \leq r \leq 2$, mentre i due angoli variano sul loro intero range di definizione $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Abbiamo quindi che l'integrale sul guscio Ω si riduce ad un integrale su un parallelepipedo nello spazio delle coordinate (r, φ, θ) , che a sua volta si decompone facilmente nel prodotto di tre integrali in una variabile,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^2 (r \sin \varphi \cos \theta)^2 r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_1^2 r^4 dr \int_0^\pi (\sin \varphi)^3 d\varphi \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta = \frac{31}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{124}{15}\pi. \end{aligned}$$

Osserviamo che la regione Ω è perfettamente simmetrica rispetto ad ogni permutazione delle tre variabili x, y e z . Questo significa che integrando ciascuna delle funzioni x^2, y^2, z^2 , su Ω si ottiene sempre lo stesso risultato. Avremmo potuto semplificare il calcolo dell'integrale I sfruttando questa simmetria. Infatti, siccome

$$I = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz,$$

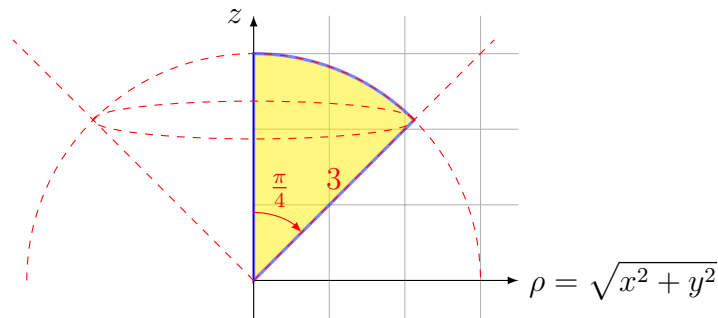
sommando i tre integrali e utilizzando la linearità dell'integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} 3I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_1^2 r^4 dr \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{31}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{124}{5}\pi, \end{aligned}$$

che ci permette di ricavare il valore di I attraverso integrazioni più semplici rispetto al calcolo precedente.

Esempio 3.4. Calcoliamo l'integrale $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ sulla regione Ω che si ottiene intersecando la palla sferica di centro l'origine e raggio 3 con la regione interna al cono circolare di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$



In coordinate sferiche, la regione Ω corrisponde alle condizioni $0 \leq r \leq 3$ per la palla, e $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ per il cono. Inoltre ricordiamo che $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho = r \sin \varphi$. L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^3 (r \cos \varphi)(r \sin \varphi) r^2 \sin \varphi dr \right) d\varphi \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin \varphi)^2 \cos \varphi d\varphi \int_0^3 r^4 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{3(\sqrt{2})^3} \cdot \frac{3^5}{5} = \frac{81\sqrt{2}}{10}\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 3.5. Calcola l'integrale della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x + 2y + 3z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

sia sulla regione A e sia sulla regione B , dove

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}, \\ B &= \left\{ (x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

4 Applicazioni degli integrali multipli

Abbiamo visto che integrali doppi e tripli sono strumenti utili nel calcolo di aree e di volumi di regioni del piano e della spazio. Ci sono tante grandezze fisiche riguardanti corpi estesi che possono essere espresse tramite integrali. Vediamone alcune.

Definizione 4.1. Data una funzione $f(\mathbf{x})$ integrabile sul dominio Ω in $\mathbb{R}^n$, il valore medio $\mu(f)$ di f su Ω è dato dal rapporto tra l'integrale di f su Ω e la misura (volume n -dimensionale) dell'insieme Ω :

$$\mu(f) = \frac{1}{\mathcal{V}(\Omega)} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} d\mathbf{x}}.$$

Se i valori della funzione f variano in certo intervallo limitato, $m \leq f(\mathbf{x}) \leq M$ per ogni $\mathbf{x} \in D$, segue dalle proprietà di monotonia dell'integrale che anche il valore medio è contenuto nello stesso intervallo, $m \leq \mu(f) \leq M$.

È chiaro che nel caso $n = 2$ la misura $\mathcal{V}(\Omega)$ rappresenta l'area di Ω , $\mathcal{A}(\Omega)$, mentre nel caso tridimensionale rappresenta il volume di Ω .

Definizione 4.2. Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ e sia $\rho: D \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione integrabile che descrive punto per punto la *densità* di un corpo che occupa la regione D . La *massa* del corpo D con densità ρ è data dalla quantità

$$\text{massa}(D) := \iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy. \quad (6)$$

Definiamo *baricentro* del corpo D con densità ρ il punto $B = (x_B, y_B)$ le cui coordinate sono date da

$$x_B := \frac{\iint_D x \rho(x, y) \, dx \, dy}{\iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy}, \quad y_B := \frac{\iint_D y \rho(x, y) \, dx \, dy}{\iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy}.$$

Si definiscono *momenti di inerzia* rispetto all'asse x , rispetto all'asse y , rispetto al polo $O = (0, 0)$, gli integrali

$$I_x := \iint_D y^2 \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad I_y := \iint_D x^2 \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad I_O := \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dx \, dy,$$

Osserviamo che y^2 è il quadrato della distanza di (x, y) dall'asse x e x^2 è il quadrato della distanza di (x, y) dall'asse y , mentre $x^2 + y^2$ è il quadrato della distanza di (x, y) da O .

Nel caso in cui ρ rappresenti la densità di carica elettrica, l'integrale (6) fornisce la quantità di carica totale del corpo D .

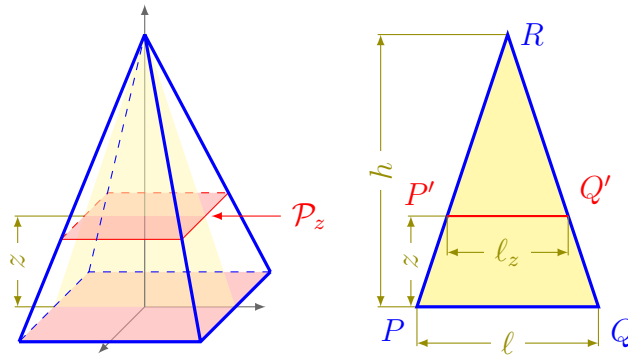
Quando il corpo ha densità costante uguale a 1, la massa coincide con l'area e le coordinate del baricentro coincidono con il valore medio delle funzioni x e y su D ,

$$x_B := \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy}, \quad y_B := \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy}.$$

Il calcolo di valori, medi, baricentri e momenti sono strumenti essenziali nel calcolo di probabilità e in statistica, in questi campi la funzione densità rappresenta la densità di probabilità di variabili aleatorie definite sulla regione D .

Osservazione 4.3. Le quantità definite nella definizione 4.2 sono riferite ad una regione del piano, ma si tenga presente che ognuna di queste definizioni si può estendere anche a regioni dello spazio aggiungendo una variabile e sostituendo aree con volumi, integrali doppi con integrali tripli, e, per i momenti, integrando rispetto al quadrato della distanza da assi o punti.

Esempio 4.4. Calcoliamo il baricentro di una piramide retta a base quadrata $\mathcal{P}$, con lato di base ℓ e altezza h , supponendo una densità uniforme uguale a 1. Supponiamo che la piramide sia appoggiata sul piano x - y con il centro della sua base quadrata coincidente con l'origine e il vertice della piramide nel punto $(0, 0, h)$.



Per ragioni di simmetria il baricentro si troverà sulla perpendicolare alla base passante per il vertice e dunque avrà la forma $B = (0, 0, z_B)$, dobbiamo quindi calcolare solo la coordinata z_B che è data da

$$z_B := \frac{\iiint_{\mathcal{P}} z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{\mathcal{P}} dx \, dy \, dz}.$$

Calcoliamo i due integrali procedendo con una integrazione per strati orizzontali. Per ogni $z \in [0, H]$ lo strato orizzontale di $\mathcal{P}$ ad altezza z è un quadrato $\mathcal{P}_z$ il cui lato ℓ_z varia al variare di z . Per determinare ℓ_z osserviamo nella figura che i triangoli PQR e $P'Q'R$ sono simili e quindi vale la proporzione

$$\ell : \ell_z = h : (h - z),$$

da cui ricaviamo che $\ell_z = \frac{\ell}{h}(h - z)$ e dunque $\mathcal{A}(\mathcal{P}_z) = \ell_z^2 = \frac{\ell^2}{h^2}(h - z)^2$. Integrando per strati otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{P}) &= \iiint_{\mathcal{P}} dx \, dy \, dz = \int_0^h \mathcal{A}(\mathcal{P}_z) \, dz = \frac{\ell^2}{h^2} \int_0^h (h - z)^2 \, dz = \frac{\ell^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \ell^2 h, \\ \iiint_{\mathcal{P}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^h z \mathcal{A}(\mathcal{P}_z) \, dz = \frac{\ell^2}{h^2} \int_0^h z (h - z)^2 \, dz = \frac{\ell^2}{h^2} \frac{h^4}{12} = \frac{1}{12} \ell^2 h^2. \end{aligned}$$

Facendo il rapporto otteniamo allora che $z_B = h/4$.

Esempio 4.5. Consideriamo la cardiode C di cui abbiamo già calcolato l'area nell'esempio 1.4, ovvero della regione C del piano x - y delimitata dalla curva che in coordinate polari centrate nell'origine è descritta dalla relazione $r = 1 - \cos \theta$. Calcoliamo il momento di inerzia di C rispetto al suo baricentro; si tratta di calcolare l'integrale del quadrato della distanza di un punto generico dal baricentro $B = (x_B, y_B)$,

$$\begin{aligned} I_B &= \iint_C ((x-x_B)^2 + (y-y_B)^2) \, dx \, dy = \iint_C (x^2 + y^2 - 2x_B x - 2y_B y + x_B^2 + y_B^2) \, dx \, dy = \\ &= \iint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy - 2x_B \iint_C x \, dx \, dy - 2y_B \iint_C y \, dx \, dy + (x_B^2 + y_B^2) \iint_C dx \, dy = \\ &= \iint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy - (x_B^2 + y_B^2) \iint_C dx \, dy = I_O - \|B\|^2 \mathcal{A}(C). \end{aligned}$$

Abbiamo già calcolato l'area nell'esempio 1.4, $\mathcal{A}(C) = \frac{3}{2}\pi$. Determiniamo le coordinate del baricentro; siccome il dominio è simmetrico rispetto all'asse x , il baricentro di C si troverà anch'esso sull'asse x e avrà la forma $B = (x_B, 0)$, quindi $y_B = 0$, mentre

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{\mathcal{A}(C)} \iint_C x \, dx \, dy = \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos \theta} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta = \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (1 - \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta = \frac{2}{3\pi} \left(-\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'origine,

$$I_O = \iint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos \theta} r^3 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta)^4}{4} \, d\theta = \frac{35}{16}\pi.$$

Pertanto il momento di inerzia rispetto al baricentro sarà dato da

$$I_B = I_O - \|B\|^2 \mathcal{A}(C) = \frac{35}{16}\pi - \frac{25}{36} \cdot \frac{3}{2}\pi = \frac{55}{48}\pi.$$

Esercizio 4.6. Calcola il baricentro della regione limitata del piano racchiusa tra le due parabole di equazione

$$y = x(2 - x), \quad y = (x + 1)(x - 2).$$

Esercizio 4.7. Determina il momento di inerzia rispetto all'asse x della regione del piano delimitata dalla curva che in coordinate polari è descritta dalla relazione $r = 3 - 2\cos(\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 4.8. Si determinino le coordinate del baricentro della regione interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e contenuta nell'ottante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Esercizio 4.9. Determina il volume e le coordinate del baricentro di un solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse z la regione che nel piano x - z è delimitata dall'asse z , dalla retta $z = 8$ e dalla curva di equazione $z^2 = x^3$.

Esercizio 4.10. Si calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse z del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z il sottografico della funzione $f: [0, \pi] \rightarrow [0, +\infty[$, dove $r = f(z) = \sin z$.