Analisi Matematica 1B - Lezione 25

Integrali Doppi e tripli

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 6 giugno 2020)

1 Integrali doppi su domini semplici

Nella scorsa lezione abbiamo definito i domini semplici del piano $\mathbb{R}^2$. Un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^2$ si dice dominio semplice rispetto all'asse y quando esistono due funzioni continue $g_1, g_2\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo limitato $[a, b]$ tali che

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\right\}; \tag{1}$$

mentre Ω si dice dominio semplice rispetto all'asse x quando esistono due funzioni continue $h_1, h_2\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo limitato $[c, d]$ tali che

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\right\}. \tag{2}$$

Utilizzando le formule di riduzione per integrali doppi di funzioni definite su rettangoli possiamo scrivere integrali di funzioni definite su domini semplici come integrali iterati integrando una variabile alla volta.

Proposizione 1.1. *Sia Ω un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile.*

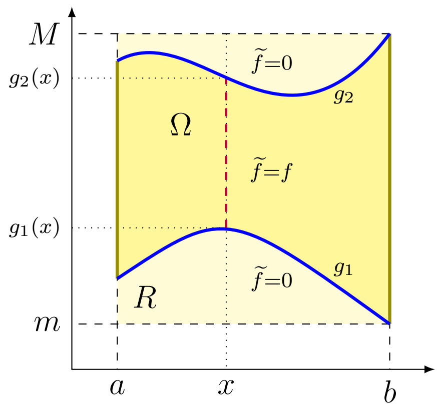
- *Se Ω è un dominio semplice rispetto ad y della forma* (1)*, allora*

$$\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

- *Se Ω è un dominio semplice rispetto ad x della forma* (2)*, allora*

$$\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Dimostrazione. Vediamo il primo caso, con Ω della forma (1). Il dominio Ω è contenuto nel rettangolo $R := [a,b] \times [m,M]$ dove $m := \min_{x\in[a,b]} g_1(x)$, $M := \max_{x\in[a,b]} g_2(x)$.



Sia $\widetilde{f}$ l'estensione a zero di f, abbiamo che $\widetilde{f}(x,y) = 0$ quando $y < g_1(x)$ oppure $y > g_2(x)$, mentre $\widetilde{f}(x,y) = f(x,y)$ quando $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$. Ne segue che per ogni $x \in [a,b]$ abbiamo

$$\int_m^M \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_m^{g_1(x)} \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^{M} \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_m^{g_1(x)} 0\,\mathrm{d}y + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^{M} 0\,\mathrm{d}y = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

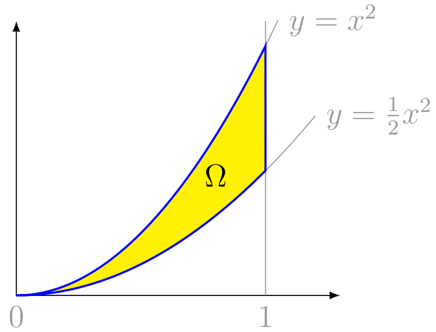
Dunque, utilizzando le formule di riduzione sui rettangoli applicati alla funzione $\widetilde{f}$, troviamo che

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_m^M \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

□

Esempio 1.2. Calcoliamo l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \Omega := \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \frac{1}{2}x^2 \leqslant y \leqslant x^2 \Big\}.$$



Il dominio Ω è semplice sia rispetto all'asse y che all'asse x. Consideriamolo come dominio semplice rispetto a y; in questo caso la variabile x varia nell'intervallo $[0,1]$ e per ogni x fissata la variabile y varia nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}x^2, x^2\right]$; dalle formule di riduzione otteniamo

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

Calcoliamo l'integrale interno con la sostituzione $t = y/x$, $y = xt$, $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}t$,

$$\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}x}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan x - \arctan\frac{x}{2}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \arctan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Una primitiva di arcotangente si trova facilmente procedendo per parti,

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2),$$

$$\int \arctan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{2} - \log\left(1+\frac{x^2}{4}\right).$$

Dunque,

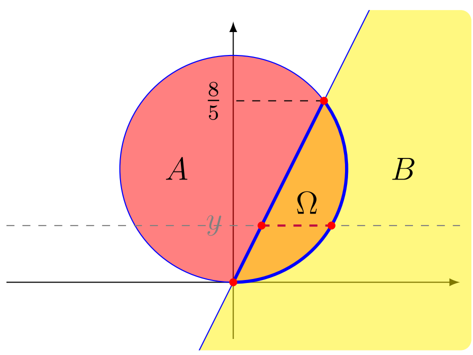
$$\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x = \arctan 1 - \frac{1}{2}\log 2, \qquad \int_0^1 \arctan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \arctan\frac{1}{2} - \log\frac{5}{4}.$$

Prendendo la differenza dei due integrali e semplificando il risultato otteniamo

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \arctan 2 - \frac{\pi}{4} + \log 5 - \frac{5}{2}\log 2.$$

Esempio 1.3. Calcoliamo l'integrale $\iint_\Omega \frac{x\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove il dominio $\Omega = A\cap B$ è la porzione del cerchio A di centro $(0,1)$ e raggio 1 che si trova nel semipiano B che sta a destra (o sotto) della retta di equazione $y = 2x$. La circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1 ha equazione $x^2+(y-1)^2 = 1$, il cerchio è dato da $A = \{(x,y)\colon x^2+(y-1)^2 \leqslant 1\}$, mentre il semipiano è $B = \{(x,y)\colon y \leqslant 2x\}$, e dunque

$$\Omega = A\cap B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+(y-1)^2\leqslant 1,\ y\leqslant 2x\right\}.$$



Consideriamo Ω come un dominio semplice rispetto all'asse x. La retta $y = 2x$ interseca la circonferenza $x^2 + (y-1)^2 = 1$ nei punti $(0,0)$ e $(4/5, 8/5)$. I valori di y in Ω variano nell'intervallo $[0, 8/5]$; per ogni $y \in [0, 8/5]$ la variabile x in Ω varia nell'intervallo compreso tra l'ascissa $h_1(y)$ del punto della retta di ordinata y, e l'ascissa $h_2(y)$ del punto della circonferenza di ordinata y che si trova nel primo quadrante. Con semplici calcoli troviamo che

$$h_1(y) = \frac{1}{2}y, \qquad h_2(y) = \sqrt{1-(y-1)^2}, \qquad y \in \Big[0, \frac{8}{5}\Big].$$

Integrando in lungo il segmento orizzontale in Ω di ordinata y abbiamo

$$\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{x \sin y}{y} \,\mathrm{d}x = \frac{\sin y}{y} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{1-(y-1)^2}} =$$

$$= \frac{\sin y}{y} \left(\frac{1}{2}\left(1-(y-1)^2\right) - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}y\Big)^2\right) = \Big(1 - \frac{5}{8}y\Big) \sin y.$$

E dunque,

$$\iint_\Omega \frac{x \sin y}{y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{8}{5}} \Big(\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{x \sin y}{y} \,\mathrm{d}x\Big) \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\frac{8}{5}} \Big(1 - \frac{5}{8}y\Big) \sin y \,\mathrm{d}y = 1 - \frac{5}{8} \sin \frac{8}{5}.$$

Esercizio 1.4. I seguenti integrali iterati si riferiscono a integrali doppi su domini semplici sia rispetto ad y che ad x. Per ciascun integrale determina il corrispondente dominio di integrazione e disegnalo nel piano, poi riscrivi l'integrale scambiando l'ordine di integrazione.

$$\int_0^2 \Big(\int_0^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \Big(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\frac{1}{5}}^1 \Big(\int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\frac{1-x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.5. Calcola i seguenti integrali doppi:

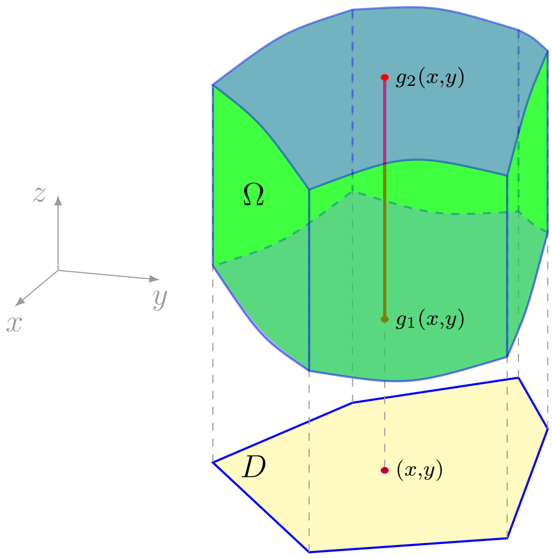
1. $\iint_A (x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove A è il rombo di vertici $(2,2)$, $(1,-1)$, $(-2,-2)$, $(-1,1)$;
2. $\iint_B y \cos x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $B := \{(x,y)\colon 0 \leqslant y \leqslant \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$;
3. $\iint_C y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $C := \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 2 + y - y^2\}$;
4. $\iint_D \frac{x}{1+x+y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $D := \{(x,y)\colon x \geqslant 0,\ x^2 \leqslant y \leqslant x+1\}$;
5. $\iint_E \mathrm{e}^{-y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $E := \{(x,y)\colon 0 \leqslant y^3 \leqslant x \leqslant y\}$.
6. $\iint_F (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove F è l'intersezione tra il cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1 e il cerchio di centro $(2,0)$ e raggio 2;
7. $\iint_G x \cos y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $G := \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$.

2 Integrali tripli su domini semplici

Un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^3$ è un dominio semplice rispetto all'asse z quando esistono due funzioni continue $g_1, g_2\colon D \to \mathbb{R}$ definite su un insieme semplicemente decomponibile D di $\mathbb{R}^2$, tali che

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon (x, y) \in D,\ g_1(x, y) \leqslant z \leqslant g_2(x, y)\right\}. \tag{3}$$

Utilizzando le formule di riduzione per integrali in $\mathbb{R}^3$, possiamo trasformare un integrale triplo su un dominio semplice di $\mathbb{R}^3$ nella combinazione di un integrale in una variabile iterato con un integrale doppio. Per ogni punto (x, y) del dominio di base D integriamo prima lungo il segmento costituito dalla porzione della retta verticale passante per (x, y) che interseca Ω, poi quello che otteniamo lo integriamo al variare di (x, y) su D. Chiamiamo questo procedimento *integrazione per fili.*



Proposizione 2.1 (Integrazione per fili verticali)**.** *Sia Ω un dominio semplice rispetto all'asse z della forma* (3) *e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora*

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

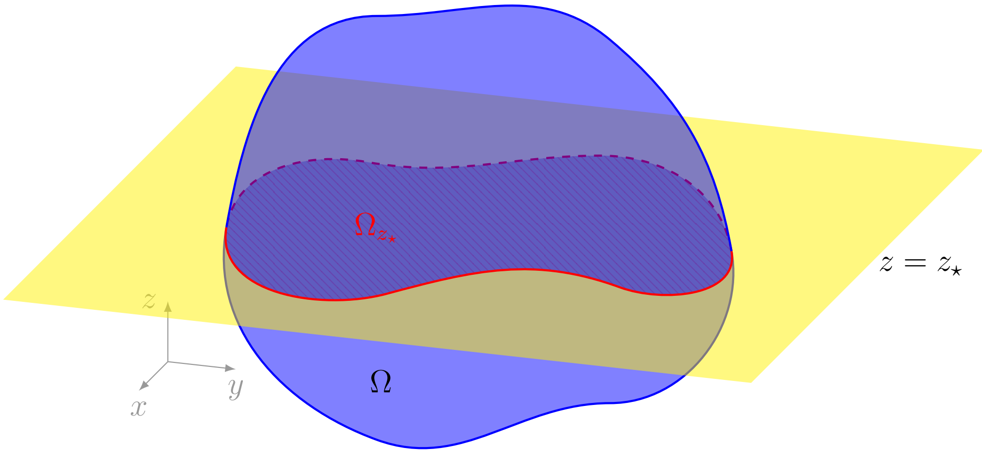
Ovviamente permutando l'ordine delle variabili possiamo avere formule analoghe anche per integrazioni lungo fili orizzontali su domini semplici rispetto all'asse y o rispetto all'asse x.

In alternativa, sempre utilizzando le formule di riduzione per integrali in $\mathbb{R}^3$, possiamo trasformare un integrale triplo su un dominio semplice di $\mathbb{R}^3$ nella combinazione di un integrale doppio iterato con un integrale in una variabile. Per ogni $z \in \mathbb{R}$ integriamo prima rispetto ad x e y sulla regione piana ottenuta intersecando il dominio Ω con il piano orizzontale ad altezza z, poi ciò che otteniamo lo integriamo al variare di z in $\mathbb{R}$. Chiamiamo questo procedimento *integrazione per strati.*

Definizione 2.2. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e sia $z_\star \in \mathbb{R}$. Definiamo *strato orizzontale* di Ω corrispondente all'altezza $z_\star$ il sottoinsieme $\Omega_{z_\star}$ di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$\Omega_{z_\star} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y,z_\star) \in \Omega\right\}.$$

Esso corrisponde alla proiezione sul piano x-y della sezione di Ω ottenuta intersecando Ω con il piano di equazione $z = z_\star$.



Quando Ω un dominio semplice rispetto all'asse z della forma (3) allora il suo strato Ω_z è diverso dal vuoto se solo se $z \in [m, M]$ dove

$$m := \min_{(x,y)\in D} g_1(x,y), \qquad M := \max_{(x,y)\in D} g_2(x,y). \tag{4}$$

Proposizione 2.3 (Integrazione per strati orizzontali)**.** *Sia Ω un dominio semplice rispetto all'asse z della forma* (3) *e siano m e M i valori definiti in* (4)*. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Se per ogni $z \in [m, M]$ lo strato Ω_z è misurabile e la funzione $(x,y) \mapsto f(x,y,z)$ è integrabile su Ω_z, allora*

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_m^M \Big(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z.$$

Ovviamente permutando l'ordine delle variabili possiamo avere formule analoghe anche per integrazioni per strati verticali su domini semplici rispetto all'asse y o rispetto all'asse x.

Non mettiamo i dettagli delle dimostrazioni delle proposizioni 2.1 e 2.3; comunque esse si ottengono facilmente, nello stesso modo con cui abbiamo ottenuto le formule per integrali doppi su domini semplici, dalle formule di riduzione per integrali tripli applicate all'estensione a zero della funzione f integrata su un parallepipedo contenente Ω.

Esempio 2.4. Calcoliamo l'integrale $\iiint_\Omega (x + 2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ sul dominio

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\right\}.$$

Si tratta di un dominio semplice rispetto all'asse z della forma (3) con

$$D = [0,1] \times [0,2], \quad g_1(x,y) = 0, \quad g_2(x,y) = x^2 + y^2.$$

Procediamo integrando per fili verticali, fissiamo $(x,y) \in D$ e integriamo rispetto a z che varia tra $g_1(x,y)$ e $g_2(x,y)$,

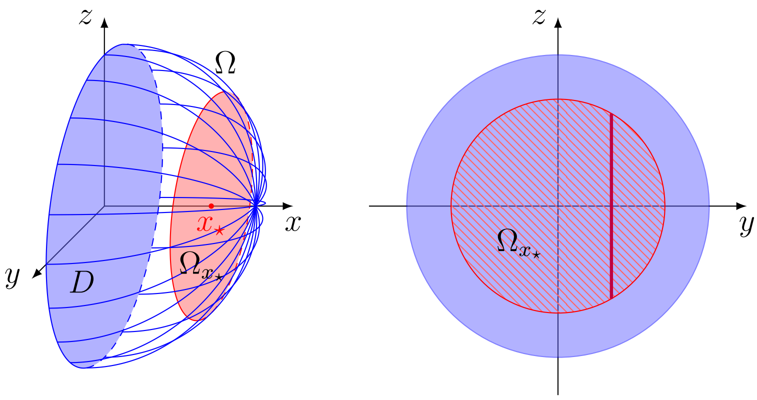
$$F(x,y) := \int_0^{x^2+y^2} (x+2z)\,\mathrm{d}z = \left[xz + z^2\right]_{z=0}^{z=x^2+y^2} = x(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 = \\ = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^3 + xy^2.$$

Poi integriamo ciò che abbiamo ottenuto sul rettangolo D,

$$\iiint_\Omega (x+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^3 + xy^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ = \int_0^1 \left(2x^4 + \frac{16}{3}x^2 + \frac{32}{5} + 2x^3 + \frac{8}{3}x \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{5} + \frac{16}{9} + \frac{32}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{937}{90}.$$

Esempio 2.5. Calcoliamo l'integrale $\iiint_\Omega (x+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ sul dominio

$$\Omega := \left\{ (x,y,z) \colon x \geqslant 0, x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \right\}.$$



Si tratta della metà della palla di centro l'origine e raggio 2 che si trova nel semispazio $x \geqslant 0$. Consideriamo Ω come un dominio semplice rispetto a x. Procediamo integrando per strati. Per ogni $x \in [0,2]$ lo strato verticale Ω_x di Ω parallelo al piano y-z è un cerchio di raggio $\sqrt{4-x^2}$,

$$\Omega_x = \left\{ (y,z) \colon y^2 + z^2 \leqslant 4 - x^2 \right\}.$$

Integrando sullo strato troviamo

$$F(x) := \iint_{\Omega_x} (x+2z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = x \iint_{\Omega_x} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2 \iint_{\Omega_x} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Il primo dei due integrali a destra coincide con l'area del cerchio Ω_x,

$$\iint_{\Omega_x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \mathcal{A}(\Omega_x) = \pi(4 - x^2).$$

Il secondo integrale invece è nullo per questioni di simmetria, infatti ogni retta verticale che interseca il disco Ω_x determina un intervallo per la variabile z simmetrico rispetto all'origine, e la funzione $z \mapsto z$ è dispari, per tanto il suo integrale è sempre nullo su ogni intervallo simmetrico rispetto all'origine,

$$\iint_{\Omega_x} z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 0 \, \mathrm{d}y = 0.$$

Troviamo così che l'integrale sullo strato vale $F(x) = \pi x(4 - x^2)$. Rimane da calcolare l'integrale rispetto a x,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + 2z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^2 F(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (4 - x^2) 2x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^4 (4 - s) \, \mathrm{d}s = \\ = \frac{\pi}{2} \left[4s - \frac{1}{2} s^2 \right]_{s=0}^{s=4} = 4\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 2.6. Calcola i seguenti integrali tripli:

1. $\iiint_A \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, dove $A := \{(x, y, z) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, \, 0 \leqslant y \leqslant x, \, -1 \leqslant z \leqslant 4\}$;

2. $\iiint_B (x + y + z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, dove B è il tetraedro di vertici $\mathbf{0}$, $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$;

3. $\iiint_C z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, dove C è la regione che si ottiene intersecando la palla interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con la regione di spazio che trova sopra al paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$;

4. $\iiint_D 3xy^2z^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, dove $D := \{(x, y, z) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, \, 0 \leqslant z \leqslant x, \, 0 \leqslant y \leqslant xz\}$.