UNIFE - Corso di laurea triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica

Analisi Matematica 1B - Lezione 24

Misura di Peano-Jordan

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 6 giugno 2020)

1 Integrale di Riemann su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1. Ogni funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, definita su Ω, può essere estesa ad una funzione $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita su tutto $\mathbb{R}^n$, ponendo

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \text{quando } \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{quando } \boldsymbol{x} \notin \Omega. \end{cases}$$

Chiameremo $\widetilde{f}$ l'*estensione a zero* di f.

Definizione 1.2. L'estensione a zero della funzione costante $f(\boldsymbol{x}) = 1$ su Ω si dice *funzione caratteristica* di Ω e la indichiamo con $\chi_\Omega(\boldsymbol{x})$,

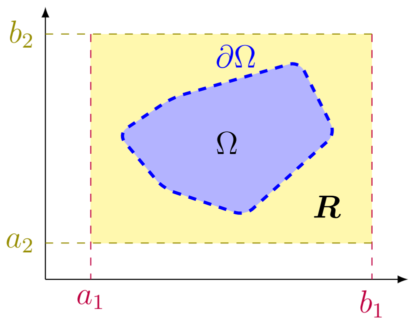
$$\chi_\Omega(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{quando } \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{quando } \boldsymbol{x} \notin \Omega. \end{cases}$$

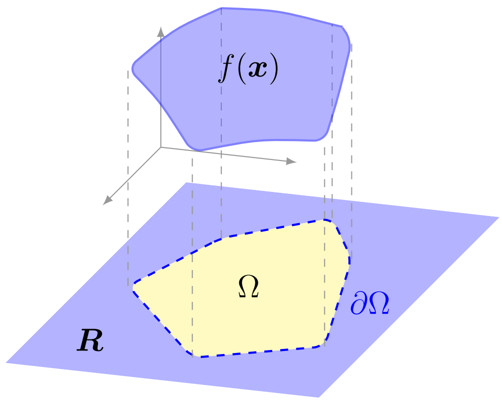
Osservazione 1.3. Dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}^n$, abbiamo che:

- se $A \subseteq B$ allora $0 \leqslant \chi_A(\boldsymbol{x}) \leqslant \chi_B(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$;
- $\chi_{A\cup B}(\boldsymbol{x}) = \chi_A(\boldsymbol{x}) + \chi_B(\boldsymbol{x}) - \chi_{A\cap B}(\boldsymbol{x})$.

Quando Ω è un insieme limitato, esso è contenuto in qualche rettangolo n-dimensionale $\boldsymbol{R}$,

$$\Omega \subseteq \boldsymbol{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$





Definizione 1.4. Sia Ω un sottoinsieme *limitato* di $\mathbb{R}^n$. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*. La funzione f si dice *integrabile secondo Riemann* su Ω quando la sua estensione a zero $\widetilde{f}$ è integrabile secondo Riemann su un rettangolo $\boldsymbol{R}$ che contiene Ω, e in tal caso poniamo

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} := \int_{\boldsymbol{R}} \widetilde{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Essendo $\widetilde{f}$ nulla fuori da Ω, questa definizione non dipende dalla scelta del rettangolo $\boldsymbol{R}$.

In generale l'estensione a zero $\widetilde{f}$ può presentare discontinuità lungo la frontiera $\partial\Omega$ del dominio Ω; ad esempio, l'insieme dei punti di discontinuità della funzione caratteristica χ_Ω coincide esattamente con la frontiera $\partial\Omega$. Pertanto l'integrabilità di f non è garantita nemmeno se f è continua su Ω, ma può dipendere dalle proprietà geometriche del dominio Ω.

2 Insiemi di misura nulla

Definizione 2.1. Diciamo che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ ha *misura nulla* (secondo Lebesgue) quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $(\boldsymbol{R}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di rettangoli n-dimensionali tale che la loro unione contiene E e la somma dei loro volumi complessivamente è minore di ε,

$$E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{R}_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}(\boldsymbol{R}_k) < \varepsilon.$$

Ricordiamo che il volume n-dimensionale di un rettangolo n-dimensionale è dato dal prodotto delle lunghezze degli n intervalli unidimensionali che determinano il rettangolo,

$$\mathcal{V}\big([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]\big) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

Osservazione 2.2. La sommatoria $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ di infiniti termini di una successione di valori non negativi $a_k \geqslant 0$, detta *serie numerica a termini non negativi*, si definisce come limite, o equivalentemente come estremo superiore, delle sue somme parziali:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

È evidente dalla definizione che ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla è ancora un insieme di misura nulla. Meno evidente invece è che l'unione di una infinità numerabile di insiemi di misura nulla è ancora un insieme di misura nulla.

Proposizione 2.3. *Se $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi di misura nulla in $\mathbb{R}^n$ allora anche la loro unione $E := \cup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ è un insieme di misura nulla.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $\varepsilon_k := 2^{-k}\varepsilon$. Siccome E_k ha misura nulla esisterà una successione $(\boldsymbol{R}_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ di rettangoli n-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ tali che

$$E_k \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \boldsymbol{R}_{k,j}, \qquad \sum_j \mathcal{V}(\boldsymbol{R}_{k,j}) < \varepsilon_k.$$

Dunque avremo che

$$E = \bigcup_{k\in N} E_k \subseteq \bigcup_{k,j\in\mathbb{N}} \boldsymbol{R}_{k,j},$$

ed inoltre

$$\sum_{k,j\in\mathbb{N}} \mathcal{V}(\boldsymbol{R}_{k,j}) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{V}(\boldsymbol{R}_{k,j}) < \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= \varepsilon \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Dunque E si può ricoprire con un successione numerabile di rettangoli con volume complessivo minore di ε. □

Un insieme formato da un singolo punto ha misura nulla. Un insieme si dice *numerabile* quando coincide con l'insieme formato dai valori di una successione. Ogni insieme numerabile di $\mathbb{R}^n$ ha misura nulla. Ad esempio l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ le cui coordinate sono tutte razionali è un insieme di misura nulla (essendo formato da una quantità numerabile di punti), pur essendo denso in tutto lo spazio. Il grafico di una funzione di n variabili integrabile è sempre un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^{n+1}$. In particolare rette nel piano $\mathbb{R}^2$, o rette e piani nello spazio $\mathbb{R}^3$, sono insiemi di misura nulla.

Proposizione 2.4. *Sia $f\colon \boldsymbol{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann sul rettangolo n-dimensionale $\boldsymbol{R}$. Il grafico di f,*

$$\text{grafico}(f) := \big\{ \big(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\big) \colon \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità di notazione il caso $n = 1$ di una funzione di una variabile integrabile su un intervallo $[a, b]$. Sia $\varepsilon > 0$. Per il criterio di integrabilità, abbiamo che esiste una suddivisione σ di $[a, b]$ per la quale abbiamo $\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) < \varepsilon$.

Supponiamo che σ scomponga $[a,b]$ negli intervalli $I_1, I_2, \dots$, se poniamo $m_k = \inf_{I_k} f$ e $M_k = \sup_{I_k} f$ allora

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) = \sum_k (M_k - m_k)\mathcal{L}(I_k) = \sum_k \mathcal{A}(R_k).$$

dove R_k è il rettangolo in $\mathbb{R}^2$ definito da $R_k := I_k \times [m_k, M_k]$. Quando $x \in I_k$ abbiamo $f(x) \in [m_k, M_k]$ e dunque $(x, f(x)) \in R_k$. Otteniamo dunque che

$$\text{grafico}(f) \subseteq \bigcup_k R_k, \qquad \sum_k \mathcal{A}(R_k) = \overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Dunque il grafico di f può essere ricoperto con una sequenza di rettangoli con area complessiva inferiore a qualsiasi quantità positiva, il che significa che è un insieme di misura (bidimensionale) nulla in $\mathbb{R}^2$. □

Un importante teorema dovuto a Lebesgue, che enunciamo ma di cui non diamo la dimostrazione, afferma che l'integrabilità di una funzione è determinata dall'insieme dei suoi punti di discontinuità.

Teorema 2.5 (Lebesgue)**.** *Sia $f\colon \boldsymbol{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata definita sul rettangolo n-dimensionale $\boldsymbol{R}$, allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di f è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.*

3 Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan

Definizione 3.1. Sia Ω un sottoinsieme *limitato* di $\mathbb{R}^n$. L'insieme Ω si dice *misurabile* secondo Peano-Jordan quando la sua funzione caratteristica χ_Ω è integrabile secondo Riemann su un rettangolo n-dimensionale $\boldsymbol{R}$ che contiene Ω, ovvero quando la funzione costante 1 è integrabile secondo Riemann su Ω. Quando Ω è misurabile, la sua *misura* n-dimensionale secondo Peano-Jordan è data da

$$\mathcal{V}(\Omega) := \int_\Omega 1 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}} \chi_\Omega(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Proposizione 3.2. *Un sottoinsieme limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se la sua frontiera $\partial\Omega$ è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Per il teorema 2.5 abbiamo che Ω è misurabile se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di χ_Ω è un insieme di misura nulla, e tale insieme coincide con $\partial\Omega$. □

Proposizione 3.3. *Siano A e B due insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Allora l'unione $A \cup B$, l'intersezione $A \cap B$ e la differenza $A \setminus B$ sono ancora insiemi misurabili secondo Peano-Jordan.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che le frontiere dell'unione, dell'intersezione e della differenza sono contenute nell'unione delle frontiere dei due insiemi,

$$\partial\,(A \cup B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B), \qquad \partial\,(A \cap B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B), \qquad \partial\,(A \setminus B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B).$$

□

Osservazione 3.4. Collegandoci all'osservazione 1.3, se A e B sono due insiemi misurabili secondo Peano-Jordan allora per le proprietà di monotonia e di linearità dell'integrale abbiamo che

- se $A \subseteq B$ allora $\mathcal{V}(A) \leqslant \mathcal{V}(B)$;
- $\mathcal{V}(A \cup B) = \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(A \cap B)$.

Proposizione 3.5. *Sia Ω un sottoinsieme misurabile secondo Peano-Jordan contenuto nel rettangolo n-dimensionale $\boldsymbol{R}$. Se f è una funzione integrabile secondo Riemann su $\boldsymbol{R}$, allora la restrizione di f ad Ω è integrabile secondo Riemann su Ω.*

Dimostrazione. L'integrabilità di f su Ω equivale all'integrabilità di $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\chi_\Omega(\boldsymbol{x})$, l'estensione a zero della restrizione di f ad Ω. La funzione g è integrabile su R essendo il prodotto di due funzioni integrabili su R. □

Per l'integrale di Riemann vale la proprietà di additività rispetto a domini misurabili.

Proposizione 3.6. *Siano A e B due insiemi misurabili secondo Peano-Jordan la cui intersezione è un insieme di misura nulla. Sia $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$. Se f è integrabile secondo Riemann sia su A che su B allora f è integrabile secondo Riemann su $A \cup B$ e abbiamo*

$$\int_{A\cup B} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_B f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

Dimostrazione. Sia $\widetilde{f}$ l'estensione a zero di f; allora vale

$$\widetilde{f}\chi_{A\cup B} = \widetilde{f}\chi_A + \widetilde{f}\chi_B - \widetilde{f}\chi_{A\cap B}. \tag{2}$$

Siccome $A \cap B$ ha misura nulla (per ipotesi) avremo che $\int_{A\cap B} f = 0$ e dunque la formula (1) segue da (2) per linearità dell'integrale. □

La proprietà di additività ci permette di calcolare integrali su domini "complicati" decomponendoli nell'unione di parti più "semplici". Un dominio semplice per noi sarà una regione delimitata dal grafico di due funzioni continue.

4 Domini semplici nel piano $\mathbb{R}^2$

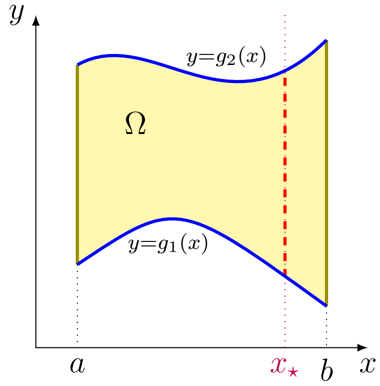
Definizione 4.1. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

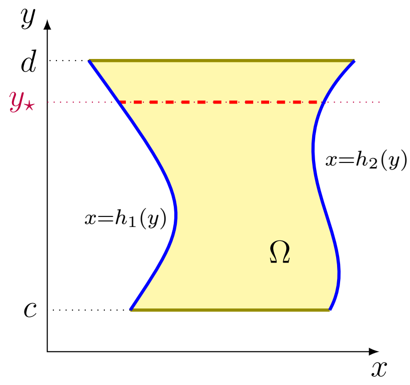
- L'insieme Ω si dice *dominio semplice rispetto all'asse* y quando esistono due funzioni continue $g_1, g_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definite sull'intervallo limitato $[a,b]$, tali che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\right\}. \tag{3}$$

- L'insieme Ω si dice *dominio semplice rispetto all'asse* x quando esistono due funzioni continue $h_1, h_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ definite sull'intervallo limitato $[c,d]$, tali che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\right\}. \tag{4}$$



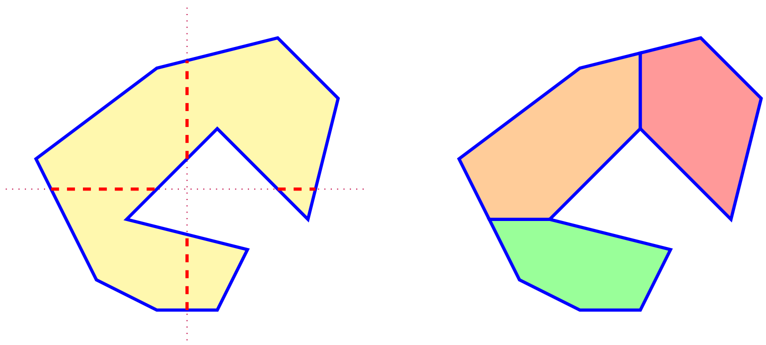


Per capire se una regione limitata del piano Ω è un dominio semplice rispetto ad y, un metodo grafico molto semplice è quello di verificare che per ogni $x_\star$ l'intersezione di Ω con la retta verticale di equazione $x = x_\star$ è non vuota solo per $x_\star$ che varia in un intervallo $[a,b]$ e per tali valori è costituita da un unico segmento verticale; mentre per capire se una regione limitata del piano Ω è un dominio semplice rispetto ad x, basta verificare che per ogni $y_\star$ l'intersezione di Ω con la retta orizzontale di equazione $y = y_\star$ è non vuota solo per $y_\star$ che varia in un intervallo $[c,d]$ e per tali valori è costituita da un unico segmento orizzontale.

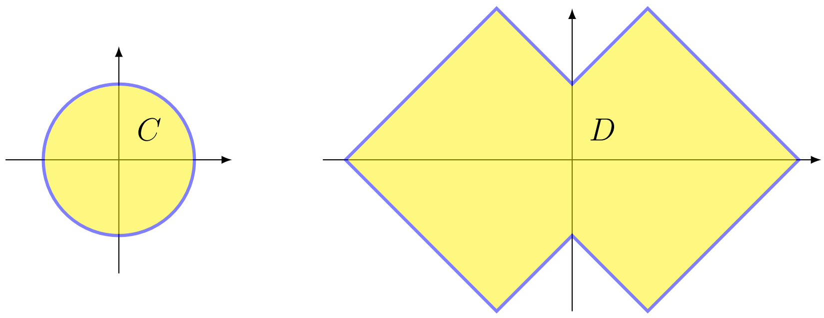
Definizione 4.2. Diciamo che un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^2$ è *semplicemente decomponibile* quando può essere decomposto nell'unione di un numero finito di domini semplici Ω_k essenzialmente disgiunti, nel senso che non possiedono punti interni in comune,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} \Omega_k, \qquad \mathring{\Omega}_j \cap \mathring{\Omega}_k = \varnothing, \quad \text{se } j \neq k.$$

Esempio 4.3. Il dominio nella seguente figura non è semplice né rispetto ad y e né rispetto a x, ma è semplicemente decomponibile: è possibile decomporlo nell'unione di tre domini semplici essenzialmente disgiunti.



Esempio 4.4. Il cerchio unitario $C := \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant 1\}$ è un dominio semplice rispetto ad entrambi gli assi. L'insieme $D := \{(x,y)\colon |x|+|y| \leqslant 3,\ |y| \leqslant |x|+1\}$ è un dominio semplice rispetto ad y ma non è semplice rispetto ad x.



Osservazione 4.5. La frontiera di un dominio semplice nel piano è sempre un insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan, infatti è formata dall'unione di due grafici di funzioni continue e di due segmenti rettilinei, che sono tutti insiemi di misura nulla. Pertanto ogni dominio semplice è sempre un insieme misurabile secondo Peano-Jordan.

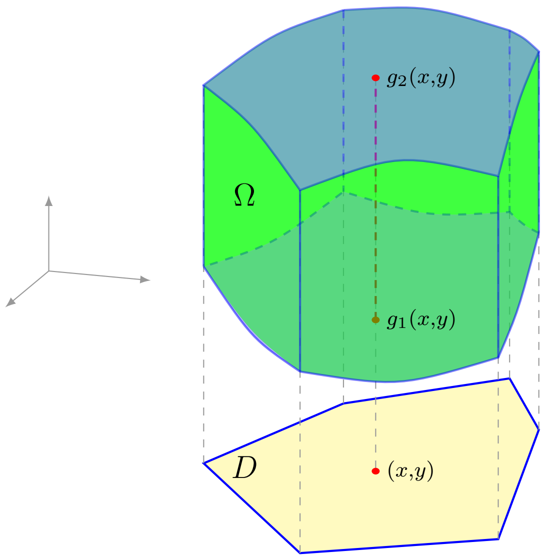
Esercizio 4.6. Disegna nel piano cartesiano i seguenti insiemi e determina se si tratta di domini semplici rispetto ad uno od entrambi gli assi; e in caso affermativo rappresentali nella forma (3) o (4) (determinando esplicitamente e funzioni g_1, g_2, o h_1, h_2, e gli intervalli su cui sono definite).

1. $A := \{(x,y)\colon 0 \leqslant 4y \leqslant 3x,\ x^2+y^2 \leqslant 25\}$;
2. $B := \{(x,y) \in [0,3] \times [0,2]\colon y \geqslant x^2\}$;
3. $C := \left\{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]\colon y \leqslant \sqrt{|x|},\ x \leqslant \sqrt{|y|}\right\}$;
4. $D := \{(x,y)\colon (x-1)^2+(y-1)^2 = 4,\ (x+1)^2+(y+1)^2 = 4\}$;
5. $E := \{(x,y)\colon 1 \leqslant x+y \leqslant 3,\ 0 \leqslant y-x \leqslant 2\}$;
6. $F := \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant 4,\ |x^2-y^2| \leqslant 1\}$;
7. $G := \{(x,y)\colon y \geqslant x^2,\ xy \leqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 4\}$;
8. $H := \{(x,y)\colon 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

5 Domini semplici nello spazio $\mathbb{R}^3$

Definizione 5.1. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$. L'insieme Ω si dice *dominio semplice rispetto all'asse* z in $\mathbb{R}^3$, quando esistono due funzioni continue $g_1, g_2 \colon D \to \mathbb{R}$ definite su un insieme semplicemente decomponibile D di $\mathbb{R}^2$, tali che

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in D,\ g_1(x, y) \leqslant z \leqslant g_2(x, y)\right\}. \tag{5}$$



Per capire se una regione limitata dello spazio Ω è un dominio semplice rispetto a z, un metodo grafico molto semplice è quello di verificare che per ogni $(x_\star, y_\star) \in \mathbb{R}^2$ l'intersezione di Ω con la retta verticale di equazione $(x = x_\star, y = y_\star)$ è non vuota solo per $(x_\star, y_\star)$ che varia in un insieme misurabile D del piano x-y e per tali valori è costituita da un unico segmento verticale.

Permutando il ruolo delle tre variabili x, y, z si definiscono in modo analogo i concetti di domini semplici rispetto all'asse y o rispetto all'asse x in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 5.2. La palla $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x - x_\star)^2 + (y - y_\star)^2 + (z - z_\star)^2 \leqslant r^2\}$ di centro $(x_\star, y_\star, z_\star)$ e raggio $r > 0$ è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$. Infatti, se consideriamo il disco $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x - x_\star)^2 + (y - y_\star)^2 \leqslant r^2\}$ in $\mathbb{R}^2$ di centro $(x_\star, y_\star)$ e raggio r e la funzione $g \colon D \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) := \sqrt{r^2 - (x - x_\star)^2 - (y - y_\star)^2},$$

abbiamo $B = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D,\ z_\star - g(x, y) \leqslant z \leqslant z_\star + g(x, y)\}$.

Esempio 5.3. Il cono retto C che ha come base il disco $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ nel piano x-y e altezza $h > 0$ è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$. Infatti, se consideriamo la funzione $g \colon D \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) := \frac{h}{r}\left(r - \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

abbiamo $C = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant g(x, y)\}$.

Esercizio 5.4. Verifica che l'ottaedro che ha come vertici i punti $\pm\vec{\boldsymbol{i}}$, $\pm\vec{\boldsymbol{j}}$, $\pm\vec{\boldsymbol{k}}$ è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5.5. Sia A il cilindro infinito formato da tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ la cui distanza dall'asse x è minore o uguale a 1; Sia B il cilindro infinito formato da tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ la cui distanza dall'asse y è minore o uguale a 1. Verifica che l'intersezione $A \cap B$ è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 5.6. Diciamo che un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^3$ è *semplicemente decomponibile* quando può essere decomposto nell'unione di un numero finito di domini semplici Ω_k essenzialmente disgiunti, nel senso che non possiedono punti interni in comune,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} \Omega_k, \qquad \mathring{\Omega}_j \cap \mathring{\Omega}_k = \varnothing, \quad \text{se } j \neq k.$$