Analisi Matematica 1B - Lezione 23

Integrale di Riemann per funzioni di più variabili

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 6 giugno 2020)

Possiamo estendere il concetto di integrale di Riemann che abbiamo già definito per funzioni di una variabile anche al caso di funzioni di più variabili. Per semplicità di notazioni in questa lezione ci concentreremo su funzioni di due variabili definite su domini rettangolari. Tutto quello che presenteremo si estende in modo analogo e naturale anche al caso di n variabili.

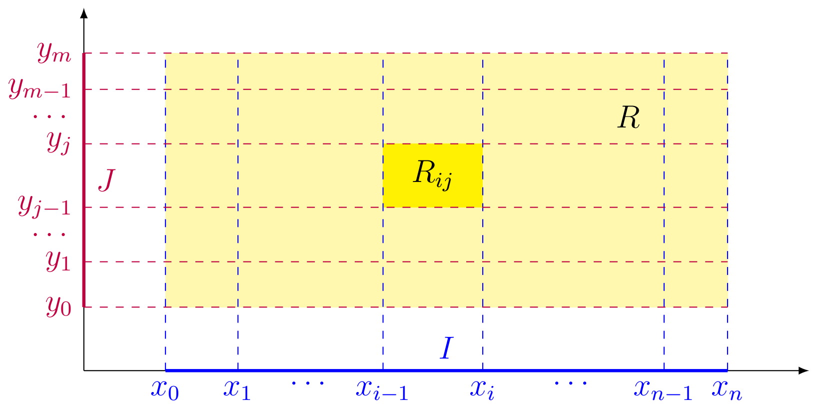
1 Suddivisioni di rettangoli

Un rettangolo di $\mathbb{R}^2$ con lati paralleli agli assi cartesiani non è altro che il prodotto cartesiano di due intervalli, a partire da suddivisioni di tali intervalli possiamo produrre una suddivisione del rettangolo in una griglia di rettangolini. Abbiamo definito le suddivisioni di un intervallo nella lezione 7.

Definizione 1.1. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a \leqslant b$ e $c \leqslant d$. Sia R il rettangolo ottenuto come prodotto cartesiano dei due intervalli chiusi e limitati $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$,

$$R := I \times J = [a, b] \times [c, d] = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\big\}.$$

Chiameremo *suddivisione* del rettangolo $\mathbb{R}$ il prodotto cartesiano $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \times \sigma_2$ di una suddivisione σ_1 dell'intervallo I e una suddivisione σ_2 dell'intervallo J.



Supponiamo che σ_1 scomponga I in n intervalli,

$$\sigma_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad [a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \quad I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \ldots, n,$$

e che σ_2 scomponga J in m intervalli,

$$\sigma_2 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d, \quad [c,d] = \bigcup_{j=1}^{m} J_j, \quad J_j = [y_{j-1}, y_j], \quad j = 1, \ldots, m;$$

allora abbiamo che $\boldsymbol{\sigma}$ scompone R nell'unione di nm rettangoli essenzialmente disgiunti (ovvero senza che due di essi abbiano punti interni in comune).

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \times \sigma_2 = \left\{(x_i, y_j) \colon i = 0, 1, \ldots, n,\ j = 0, 1, \ldots, m\right\},$$
$$R = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} R_{ij}, \quad R_{ij} = I_i \times J_j = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

L'area del rettangolo R coincide con la somma delle aree dei rettangoli in cui viene suddiviso,

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{L}(I)\mathcal{L}(J) = (b-a)(d-c) =$$
$$= \sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} \mathcal{A}(R_{ij}) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} \mathcal{L}(I_i)\mathcal{L}(J_j) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Date due suddivisioni $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \times \sigma_2$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \widetilde{\sigma}_1 \times \widetilde{\sigma}_2$ del rettangolo R, diremo che $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ è un *raffinamento* di $\boldsymbol{\sigma}$ quando $\widetilde{\sigma}_1$ è un raffinamento di σ_1 (come suddivisioni di I) e $\widetilde{\sigma}_2$ è un raffinamento di σ_2 (come suddivisioni di J).

Date due suddivisioni di uno stesso intervallo, non è detto che una sia più fine dell'altra, ma è sempre possibile trovarne eventualmente un'altra che sia un raffinamento di entrambe.

Lemma 1.2. *Se $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \times \sigma_2$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \widetilde{\sigma}_1 \times \widetilde{\sigma}_2$ sono due suddivisioni del rettangolo R, allora la suddivisione definita da*

$$\boldsymbol{\sigma}_\star := \big(\sigma_1 \cup \widetilde{\sigma}_1\big) \times \big(\sigma_2 \cup \widetilde{\sigma}_2\big)$$

è ancora una suddivisione di R ed è un raffinamento sia di $\boldsymbol{\sigma}$ e sia di $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$.

2 Integrale di Riemann su rettangoli

Possiamo definire somme di Darboux inferiori e superiori per funzioni e suddivisioni definite su domini rettangolari procedendo nello stesso modo che abbiamo usato per funzioni di una variabile.

Definizione 2.1. Consideriamo ora una funzione $f\colon R \to \mathbb{R}$ definita sul rettangolo

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

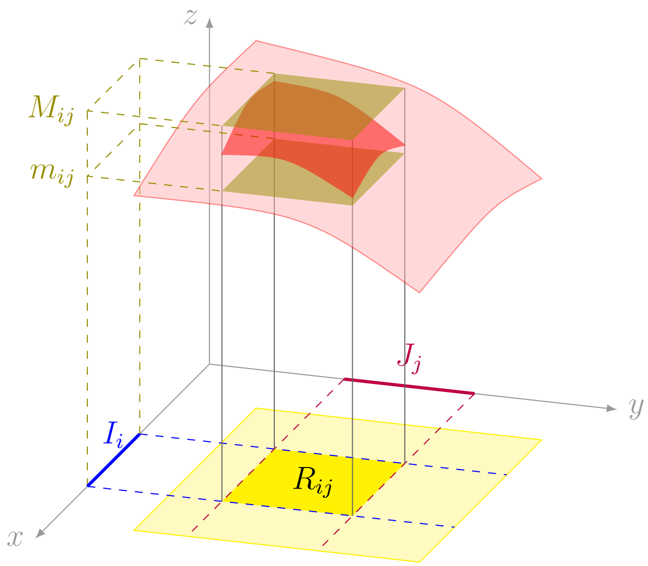
e richiediamo come unica ipotesi che f sia *limitata* (ovvero che assuma valori in un intervallo limitato di $\mathbb{R}$). Sia $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \times \sigma_2$ una suddivisione del rettangolo R. Utilizzando le notazioni usate nella definizione 1.1, per ogni $i = 1, \ldots, n$ e per ogni $j = 1, \ldots, m$, definiamo gli estremi dell'intervallo che contiene i valori che la funzione assume sul rettangolino R_{ij},

$$m_{ij} := \inf_{(x,y)\in R_{ij}} f(x, y), \qquad M_{ij} := \sup_{(x,y)\in R_{ij}} f(x, y).$$

Il parallelepido con base R_{ij} e altezza m_{ij} ha volume (algebrico) dato $m_{ij}\mathcal{A}(R_{ij})$; analogamente, il parallelepido con base R_{ij} e altezza M_{ij} ha volume (algebrico) dato $M_{ij}\mathcal{A}(R_{ij})$. Sommando algebricamente i volumi di tutti i parallelepidi otteniamo la *somma inferiore* e la *somma superiore* di Darboux associate alla funzione f e alla suddivisione $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) := \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} m_{ij}\mathcal{A}(R_{ij}), \qquad \overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) := \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} M_{ij}\mathcal{A}(R_{ij}), \tag{1}$$

dove $\mathcal{A}(R_{ij}) = \mathcal{L}(I_i)\mathcal{L}(J_j) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.



Osservazione 2.2. Quando la funzione f è non negativa il suo *sottografico* è dato dalla regione

$$\text{sottografico}(f) := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon a \leqslant x \leqslant b,\, c \leqslant y \leqslant d,\, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\right\}.$$

Il valore m_{ij} fornisce l'altezza del più alto parallelepido con base $\mathbb{R}_{ij}$ contenuto nel sottografico di f, mentre il valore M_{ij} fornisce l'altezza del più basso parallelepido con base $\mathbb{R}_{ij}$ che contiene tutta la porzione del sottografico di f soggiacente al rettangolino R_{ij}. Pertanto le somme inferiori e le somme superiori forniscono, rispettivamente, delle stime per difetto e delle stime per eccesso per il volume del sottografico di f.

Procedendo esattamente come nel caso unidimensionale si dimostra che ogni somma inferiore è minore o uguale ad ogni somma superiore.

Proposizione 2.3. *Siano $\boldsymbol{\sigma}$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ due suddivisioni del rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ su cui è definita la funzione limitata f. Allora si ha sempre che*

$$\underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) \leqslant \overline{S}(f, \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}).$$

Per la proposizione 2.3 abbiamo che l'insieme dei valori delle somme inferiori è superiormente limitato e l'insieme dei valori delle somme superiori è inferiormente limitato, ed inoltre,

$$\sup_{\boldsymbol{\sigma}} \underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) \leqslant \inf_{\boldsymbol{\sigma}} \overline{S}(f, \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}).$$

Definizione 2.4. Sia f una funzione limitata definita sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$. Chiamiamo *integrale inferiore* e *integrale superiore* di f su R i valori definiti da

$$\underline{\iint_R} f := \sup_{\substack{\boldsymbol{\sigma} \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } R}} \underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}), \qquad \overline{\iint_R} f := \sup_{\substack{\boldsymbol{\sigma} \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } R}} \overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}).$$

Esattamente come nel caso unidimensionale definiamo possiamo definire la condiione di integrabilità secondo Riemann.

Definizione 2.5. Data una funzione f limitata e definita sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ diremo che la funzione f è *integrabile secondo Riemann* su R quando i valori del suo integrale inferiore e del suo integrale superiore coincidono; questo valore comune definisce quello che chiameremo *integrale di Riemann* della funzione f su R, e che indicheremo con $\iint_R f$, oppure, per metter meglio in evidenza le variabili usate per descrivere il dominio di integrazione, con $\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Dunque,

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y := \underline{\iint_R} f = \overline{\iint_R} f.$$

quando queste ultime quantità coincidono.

Esattamente come nel caso unidimensionale definiamo possiamo dimostrare il seguente criterio di integrabilità.

Teorema 2.6. *Sia f una funzione limitata definita sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$. Le seguenti proposizioni sono tra loro equivalenti:*

(A) la funzione f è integrabile secondo Riemann su R;

(B) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\boldsymbol{\sigma}$ di R per la quale si ha

$$\overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) - \underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon.$$

Anche per il caso bidimensionale abbiamo che le funzioni continue definite su rettangoli risultano essere sempre integrabili; vedremo nella prossima lezione che l'integrabilità di una funzione è strettamente legata alla "misura nulla", in un certo senso, dell'insieme dei suoi punti di discontinuità. Inoltre, vale ancora il fatto che una funzione integrabile composta con una funzione lipschitziana è integrabile.

Come nel caso unidimensionale, anche per integrali su rettangoli continuano a valere le proprietà fondamentali. Siano f e g integrabili su R e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Proprietà algebriche: la somma $f + g$ e il prodotto fg sono ancora funzioni integrabili su R.
- Proprietà di monotonia: se $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ per $(x, y) \in R$ allora $\iint_R f \leqslant \iint_R g$.
- Proprietà di linearità: $\iint_R (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_R f + \mu \iint_R g$.
- Stima del valore assoluto: $\left|\iint_R f\right| \leqslant \iint_R |f|$.

Esercizio 2.7. Ripassa le cose che abbiamo visto per l'integrale di Riemann per funzioni di una variabile e verifica che le proprietà enunciate in questa sezione possono essere dimostrate allo stesso modo.

3 Formule di riduzione per integrali doppi

Per quanto riguarda il calcolo di un integrale di una funzione di due variabili possiamo ricondurci al calcolo di due integrali in una variabile, integrando prima la funzione rispetto ad una varibile e poi integrando quello che si ottiene rispetto alla seconda variabile. Valgono infatti le formule di riduzione descritte dal seguente teorema.

Teorema 3.1. *Sia $f(x, y)$ integrabile sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$.*

1. *Se per ogni $y \in [c, d]$ la funzione di una variabile $x \mapsto f(x, y)$ è integrabile sull'intervallo $[a, b]$, allora la funzione $y \mapsto \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ è integrabile sull'intervallo $[c, d]$ e vale la formula*

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

2. *Se per ogni $x \in [a,b]$ la funzione di una variabile $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile sull'intervallo $[c,d]$, allora la funzione $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ è integrabile sull'intervallo $[a,b]$ e vale la formula*

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Dimostrazione. Vediamo come dimostrare il punto 1), per il punto 2) poi basterà ripetere la dimostrazione scambiando il ruolo delle variabili x e y.

Per ipotesi è ben definita la funzione $F(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ per $y \in [c,d]$. Consideriamo una suddivisione σ_1 dell'intervallo $[a,b]$ e una suddivisione σ_2 dell'intervallo $[c,d]$. Utilizziamo le notazioni introdotta a pagina 2 per indicare i punti delle due suddivisioni e a pagina 3 per definire le somme di Darboux. Fissato $y \in [c,d]$ sia $g(x) := f(x,y)$ per ogni $x \in [a,b]$; abbiamo dunque $F(y) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Per ogni $i = 1,\dots,n$ e ogni $y \in [c,d]$ poniamo

$$m_i(y) := \inf_{x\in I_i} g(x) = \inf_{x\in I_i} f(x,y), \qquad M_i(y) := \sup_{x\in I_i} g(x) = \sup_{x\in I_i} f(x,y).$$

Quando $y \in J_j$ abbiamo $m_{ij} \leqslant m_i(y)$ e $M_i(y) \leqslant M_{ij}$ e dunque

$$F(y) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \underline{S}(g,\sigma_1) = \sum_i m_i(y)\mathcal{L}(I_i) \geqslant \sum_i m_{ij}\mathcal{L}(I_i), \tag{4}$$

$$F(y) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}(g,\sigma_1) = \sum_i M_i(y)\mathcal{L}(I_i) \leqslant \sum_i M_{ij}\mathcal{L}(I_i). \tag{5}$$

Per ogni $j = 1,\dots,m$ poniamo

$$m_j := \inf_{y\in J_j} F(y), \qquad M_j := \sup_{y\in J_j} F(y).$$

Per via delle disuguaglianze (4) e (5) abbiamo

$$m_j \geqslant \sum_i m_{ij}\mathcal{L}(I_i), \qquad M_j \leqslant \sum_i M_{ij}\mathcal{L}(I_i).$$

Otteniamo così che

$$\underline{S}(F,\sigma_2) = \sum_j m_j\mathcal{L}(J_j) \geqslant \sum_j \Big(\sum_i m_{ij}\mathcal{L}(I_i)\Big)\mathcal{L}(J_j) = \sum_{i,j} m_{ij}\mathcal{A}(R_{ij}) = \underline{S}(f,\sigma_1\times\sigma_2),$$

$$\overline{S}(F,\sigma_2) = \sum_j M_j\mathcal{L}(J_j) \leqslant \sum_j \Big(\sum_i M_{ij}\mathcal{L}(I_i)\Big)\mathcal{L}(J_j) = \sum_{i,j} M_{ij}\mathcal{A}(R_{ij}) = \overline{S}(f,\sigma_1\times\sigma_2).$$

Dunque per ogni suddivisione $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \times \sigma_2$ del rettangolo R abbiamo che

$$\overline{S}(F,\sigma_2) - \underline{S}(F,\sigma_2) \leqslant \overline{S}(f,\boldsymbol{\sigma}) - \underline{S}(f,\boldsymbol{\sigma}). \tag{6}$$

Siccome per ipotesi f è integrabile su R, per il criterio di integrabilità del teorema 2.6 abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \times \sigma_2$ del rettangolo R per la quale si ha che $\overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) - \underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon$; per (6) ne segue che $\overline{S}(F, \sigma_2) - \underline{S}(F, \sigma_2) < \varepsilon$, quindi per il criterio di integrabilità (per funzioni di una variabile) abbiamo che $F(y)$ è integrabile su $[c, d]$. Inoltre abbiamo

$$\underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) \leqslant \underline{S}(F, \sigma_2) \leqslant \int_c^d F(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \overline{S}(F, \sigma_2) \leqslant \overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}),$$

da cui, prendendo l'estremo superiore delle somme inferiori e l'estremo inferiore delle somme superiori, ricaviamo che

$$\iint_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d F(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

□

Osservazione 3.2. Se abbiamo come ipotesi che

- per ogni $y \in [c, d]$ la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è integrabile su $[a, b]$,
- e la funzione $y \mapsto \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ è integrabile su $[c, d]$,

non possiamo concludere che $f(x, y)$ è integrabile su $[a, b] \times [c, d]$. Infatti, consideriamo la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x), & \text{se } x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ -\operatorname{sgn}(x), & \text{se } x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

definita per $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ (rettangolo di area 2). Per ogni $y \in [0, 1]$ la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è monotona su $[-1, 1]$ e dunque integrabile; inoltre $y \mapsto \int_{-1}^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x = 0$ è costante su $[0, 1]$ e dunque integrabile. Ma la funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ non è integrabile su $[-1, 1] \times [0, 1]$, infatti, su ogni rettangolino R_{ij} di qualsiasi suddivisione abbiamo che f assume sia il valore 1 che il valore -1 e dunque $m_{ij} = -1$ e $M_{ij} = 1$. Quindi avremo che $\underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) = -2$ per ogni somma inferiore e $\overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) = +2$ per ogni somma superiore. Ne segue che l'integrale inferiore e l'integrale superiore non coincidono e quindi la funzione non è integrabile secondo Riemann.

Quando sono valide entrambe le formule di riduzione (2) e (3) abbiamo due modi alternativi per poter calcolare l'integrale doppio e inoltre vale la formula dello scambio dell'ordine di integrazione,

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

L'integrazione risulta particolarmente semplice quando la funzione integranda ha la forma di prodotto del tipo $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ con φ integrabile su $[a, b]$ e ψ integrabile su $[c, d]$. In tal caso applicando le formule di riduzione otteniamo

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \varphi(x)\psi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Big(\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y\Big).$$

Esempio 3.3. Calcoliamo l'integrale di $f(x,y) = x^2y^3$ sul rettangolo $R := [0,3] \times [2,6]$. Si tratta di una funzione continua su R e quindi integrabile; inoltre la funzione è il prodotto di una funzione di x per una funzione di y, dunque

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x \int_2^6 y^3\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=3} \left[\frac{1}{4}y^4\right]_{y=2}^{y=6} = (9-0)(324-4) = 2880.$$

Esempio 3.4. Calcoliamo l'integrale di $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}$ sul rettangolo $R := [2,4]\times[0,1]$. Procediamo con le formule di riduzione integrando prima rispetto ad x e poi rispetto ad y. Per integrare rispetto ad x osserviamo che $\partial_x \sqrt{x-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}}$ e dunque abbiamo

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_2^4 \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}}\,\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{x-y^2}\right]_{x=2}^{x=4} = 2\sqrt{4-y^2} - 2\sqrt{2-y^2}.$$

Può risultare utile osservare che una primitiva di $2\sqrt{1-t^2}$ è data da

$$\int 2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \arcsin(t) + t\sqrt{1-t^2}.$$

Integriamo rispetto ad y, usando le sostituzioni $y = 2t$ e $y = \sqrt{2}s$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 2\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 2\sqrt{2-y^2}\,\mathrm{d}y = \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s = \\
&= 4\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} - 2\left[\arcsin s + s\sqrt{1-s^2}\right]_{s=0}^{s=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\
&= 4\left(\arcsin\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\right) - 2\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1.
\end{aligned}$$

Potevamo anche procedere con le formule di riduzione integrando prima rispetto ad y e poi rispetto ad x. Se integriamo prima rispetto ad y, operando la sostituzione $y = \sqrt{x}\,t$ otteniamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin t]_{t=0}^{t=\frac{1}{\sqrt{x}}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Integriamo poi rispetto ad x,

$$\int_2^4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Per calcolare quest'ultimo integrale proviamo con la sostituzione

$$\theta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x = \frac{1}{(\sin\theta)^2}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{2\cos\theta}{(\sin\theta)^3}\,\mathrm{d}\theta.$$

Otteniamo

$$\int_2^4 \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \theta\cdot\Big(-\frac{2\cos\theta}{(\sin\theta)^3}\Big)\,\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \theta\cdot\Big(\frac{2\cos\theta}{(\sin\theta)^3}\Big)\,\mathrm{d}\theta.$$

Il fattore $\frac{2\cos\theta}{(\sin\theta)^3}$ è la derivata di $-\frac{1}{(\sin\theta)^2}$, quindi procedendo per parti abbiamo

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \theta\cdot\Big(\frac{2\cos\theta}{(\sin\theta)^3}\Big)\,\mathrm{d}\theta = \Big[\theta\cdot\frac{-1}{(\sin\theta)^2}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Possiamo integrare $\frac{1}{(\sin\theta)^2}$ tramite la sostituzione parametrica,

$$t = \tan\theta, \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad (\sin\theta)^2 = \frac{t^2}{1+t^2};$$

troviamo

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \sqrt{3}-1.$$

Mettendo insieme tutti i passaggi ritroviamo

$$\int_2^4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1.$$

Possiamo notare come cambiando l'ordine di integrazione otteniamo comunque lo stesso risultato, ma i due percorsi di integrazione ci hanno portato a svolgere calcoli assai diversi tra loro.

Esempio 3.5. L'ordine con cui si scelgono le variabili di integrazione può rivelarsi cruciale. Calcoliamo l'integrale di $f(x,y) = 2xy\mathrm{e}^{xy^2}$ sul rettangolo $R := [0,2]\times[1,3]$. Integrando prima in x e poi in y abbiamo

$$\iint_R 2xy\mathrm{e}^{xy^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 2y\Big(\int_0^2 x\mathrm{e}^{xy^2}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_1^3 2y\Big[\frac{x\mathrm{e}^{xy^2}}{y^2} - \frac{\mathrm{e}^{xy^2}}{y^4}\Big]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y =$$
$$= \int_1^3 \Big(\frac{4\mathrm{e}^{2y^2}}{y} - \frac{2\mathrm{e}^{2y^2}}{y^3} + \frac{2}{y^3}\Big)\,\mathrm{d}y = ???$$

Mentre una primitiva di $\frac{1}{y^3}$ è data da $-\frac{2}{y^2}$, una primitiva di $\frac{\mathrm{e}^{2y^2}}{y^k}$ con $k=1,3$ non è possibile esprimerla come combinazione o composizione di funzioni elementari, e dunque non riusciamo a portare a termine il calcolo. Se invece integriamo prima in y e poi in x troviamo che i calcoli sono molto semplici e riusciamo facilmente ad arrivare al risultato,

$$\iint_R 2xy\mathrm{e}^{xy^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\Big(\int_1^3 \mathrm{e}^{xy^2}\,2xy\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \Big[\mathrm{e}^{xy^2}\Big]_{y=1}^{y=3}\mathrm{d}x = \int_0^2 \big(\mathrm{e}^{9x} - \mathrm{e}^{x}\big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \Big[\frac{1}{9}\mathrm{e}^{9x} - \mathrm{e}^{x}\Big]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{18} - \mathrm{e}^2 + \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.6. Calcola gli integrali delle seguenti funzioni sui rettangoli indicati:

1. $f(x,y) = 2xy^2 + 3\frac{x^2}{y}$ su $R = [-2,3] \times [-2,-1]$;
2. $f(x,y) = x\,|x-y|$ su $R = [-1,2] \times [0,3]$;
3. $f(x,y) = \log(1+x) + \log(1+y^2)$ su $R = [0,1] \times [0,1]$;
4. $f(x,y) = \log(1+x)\log(1+y^2)$ su $R = [0,1] \times [0,1]$;
5. $f(x,y) = \log\left(\frac{1+x}{1+y^2}\right)$ su $R = [0,1] \times [0,1]$;
6. $f(x,y) = \frac{y}{1+x}$ su $R = [2,3] \times [0,1]$;
7. $f(x,y) = \frac{1}{(2x+y)^2}$ su $R = [0,1] \times [1,2]$;
8. $f(x,y) = \frac{y}{1+xy}$ su $R = [0,2] \times [0,1]$;
9. $f(x,y) = x\sin(xy)$ su $R = [0,1] \times [0,\pi]$;
10. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ su $R = [1,2] \times [1,2]$;
11. $f(x,y) = x^{-3}\mathrm{e}^{x/y}$ su $R = [1,2] \times [0,1]$;
12. $f(x,y) = \log(1+2x+3y)$ su $R = [0,1] \times [0,1]$;
13. $f(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ su $R = [0,1] \times [0,1]$;
14. $f(x,y) = \sin(x+y)\cos(x-y)$ su $R = [0,\pi/4] \times [0,\pi/4]$;
15. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ su $R = [1,2] \times [1,2]$;
16. $f(x,y) = \mathrm{sgn}(xy-1)$ su $R = [0,2] \times [0,2]$.

4 Integrali di funzioni di n variabili

Sia $n \in \mathbb{N}$. Tutto quanto abbiamo definito e dimostrato per integrali su intervalli e su rettangoli può essere ripetuto allo stesso modo anche per funzioni di n variabili definite su rettangoli n-dimensionali,

$$\boldsymbol{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Il volume n-dimensionale di $\boldsymbol{R}$ è dato da

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{R}) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}([a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n).$$

Data una funzione scalare $f(\boldsymbol{x})$ definita per $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$, la definizione dell'integrale $\int_{\boldsymbol{R}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ si ottiene tramite approssimazioini per difetto e per eccesso con somme inferiori e somme superiori costruite tramite suddivisioni $\boldsymbol{\sigma}$ di $\boldsymbol{R}$ in rettangolini n-dimensionali,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_n,$$

dove σ_k è una suddivisione dell'intervallo $[a_k, b_k]$,

$$\sigma_k : a_k = x_{1,k} < x_{2,k} < \cdots < x_{m_k,k} = b_k.$$

Per ogni scelta di indici $i_1, \ldots, i_n$ con $i_k = 1, \ldots, m_k$, poniamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{i_1,i_2,\ldots,i_n} &:= [x_{i_1-1,1}, x_{i_1,1}] \times [x_{i_2-1,2}, x_{i_2,2}] \times \cdots \times [x_{i_n-1,n}, x_{i_n,n}], \\ m_{i_1,i_2,\ldots,i_n} &:= \inf_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}} f(\boldsymbol{x}), \qquad M_{i_1,i_2,\ldots,i_n} := \sup_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}} f(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

e quindi possiamo definire le somme inferiori e superiori

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) &:= \sum_{\substack{i_1=1,\ldots,m_1 \\ i_2=1,\ldots,m_2 \\ \vdots \\ i_n=1,\ldots,m_n}} m_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \mathcal{V}(\boldsymbol{R}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}), \\ \overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) &:= \sum_{\substack{i_1=1,\ldots,m_1 \\ i_2=1,\ldots,m_2 \\ \vdots \\ i_n=1,\ldots,m_n}} M_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \mathcal{V}(\boldsymbol{R}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}). \end{aligned}$$

Quando al variare della suddivisione $\boldsymbol{\sigma}$ l'estremo superiore delle somme inferiori coincide con l'estremo inferiore delle somme superiori allora la funzione f si dice integrabile secondo Riemann e il valore di tali estremi definisce l'integrale di f su $\boldsymbol{R}$,

$$\int_{\boldsymbol{R}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sup_{\boldsymbol{\sigma}} \underline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\boldsymbol{\sigma}} \overline{S}(f, \boldsymbol{\sigma}).$$

Tutte le proprietà valide per integrali bidimensionali valgono anche per integrali n dimensionali. Se la funzione f è continua su $\boldsymbol{R}$ allora è sicuramente integrabile e valgono le formule di riduzione che trasformano l'integrale su $\boldsymbol{R}$ in una sequenza di n integrali unidimensionali, integrando una variabile alla volta,

$$\int_{\boldsymbol{R}} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \ldots \,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

Inoltre il valore dell'integrale è indipendente dall'ordine con cui si scelgono le variabili di integrazione, che può essere scelto tra le $n!$ possibili permutazioni delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Quindi, ad esempio per integrali tripli abbiamo $3! = 6$ modi diversi per poter calcolare l'integrale usando le formule di riduzione.

Esempio 4.1. Calcoliamo l'integrale di $f(x,y,z) = \frac{2x}{(y+2z)^2}$ sulla regione

$$P = [1,2] \times [2,4] \times [0,3].$$

Possiamo scegliere qualsiasi ordine per le variabili di integrazione, proviamo ad integrare prima rispetto a z, poi rispetto ad x, ed infine rispetto a y. Integriamo rispetto a z su $[0,3]$,

$$g(x,y) := \int_0^3 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = x\int_0^3 \frac{2\,\mathrm{d}z}{(y+2z)^2} = x\left[-\frac{1}{y+2z}\right]_{z=0}^{z=3} = x\Big(-\frac{1}{y+6}+\frac{1}{y}\Big);$$

poi integriamo quello che abbiamo ottenuto rispetto a x su $[1,2]$,

$$h(y) := \int_1^2 g(x,y)\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+6}\Big)\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+6}\Big)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+6}\Big),$$

e infine integriamo rispetto a y su $[2,,4]$,

$$\begin{aligned}\int_2^4 h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int_2^4\Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+6}\Big)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\big[\log(y)-\log(y+6)\big]_{y=2}^{y=4} &= \\ = \frac{3}{2}\big(\log 4 - \log 10 - \log 2 + \log 8\big) &= \frac{3}{2}\log\frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Per le formule di riduzione abbiamo

$$\begin{aligned}\iiint_P f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_2^4\bigg(\int_1^2\Big(\int_0^3 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\bigg)\,\mathrm{d}y &= \\ = \int_2^4\Big(\int_1^2 g(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_2^4 h(y)\,\mathrm{d}y &= \frac{3}{2}\log\frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Esercizio 4.2. Calcola in tutti i 6 modi possibili (variando l'ordine delle variabili di integrazione) il valore dell'integrale

$$\iiint_P xy^2\cos(x+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

dove $P = [0,\pi/2] \times [0,\pi/3] \times [0,\pi/4]$.

Esercizio 4.3. Calcola l'integrale delle seguenti funzioni sui domini indicati:

1. $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$ su $[0,5] \times [1,4] \times [2,3]$;
2. $f(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z}$ su $[1,2] \times [1,2] \times [1,2]$;
3. $f(x,y,z,t) = \frac{t-z}{x+y}$ su $[0,1] \times [1,2] \times [2,3] \times [3,4]$.
4. $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$ su $[0,1]^n$, con $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$.