Analisi Matematica 1B - Lezione 22

Calcolo differenziale vettoriale

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 11 giugno 2020)

L'operazione di derivazione parziale $\frac{\partial}{\partial x_j}$, quando è ben definita, può essere intesa come un'applicazione lineare che trasforma funzioni in altre funzioni,

$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Ad esempio possiamo vederla come una trasformazione lineare che prende funzioni di classe C^1 e restituisce funzioni continue,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : C^1 \to C^0.$$

Sia $k \in \mathbb{N}_0$. Indichiamo con la scrittura $C^k(A; B)$ l'insieme delle funzioni di classe C^k che hanno come dominio A e come codominio B. Essere di classe C^k significa possedere tutte le derivate fino all'ordine k ed esse sono tutte funzioni continue. Dato un sottoinsieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, l'operatore di derivazione parziale $\frac{\partial}{\partial x_j}$ agisce come operatore lineare che trasforma funzioni di $C^{k+1}(\Omega; \mathbb{R})$ in funzioni di $C^k(\Omega; \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : C^{k+1}(\Omega; \mathbb{R}) \to C^k(\Omega; \mathbb{R}), \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

La funzione $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ contiene informazioni su come $f(\boldsymbol{x})$ varia al variare della singola variabile x_j. Possiamo combinare queste derivate parziali in diversi modi per avere informazioni sulle modalità di variazione della funzione rispetto a tutte quante le variabili.

1 Gradiente

L'operatore gradiente associa ad una funzione scalare il campo vettoriale formato da tutte le sue derivate parziali.

Definizione 1.1. Sia $n \in \mathbb{N}$. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Definiamo l'operatore *gradiente* per funzioni di classe C^1:

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad}\colon C^1(\Omega;\mathbb{R}) \to C^0(\Omega;\mathbb{R}^n), \\ &\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) := \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\Big), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Il gradiente è un operatore lineare e valgono le seguenti proprietà:

$$\nabla(f+g) = (\nabla f) + (\nabla g), \qquad \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

Se indichiamo con $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, per linearità possiamo pensare al gradiente come una somma vettoriale delle sue derivate parziali

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\boldsymbol{e}_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j.$$

A livello simbolico, l'operatore gradiente possiamo pensarlo come un vettore le cui componenti sono operatori di derivazione parziale,

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big).$$

Per funzioni scalari di tre variabili, $f(x,y,z)$, abbiamo

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z), \qquad \nabla f = \partial_x f\, \vec{\boldsymbol{i}} + \partial_y f\, \vec{\boldsymbol{j}} + \partial_z f\, \vec{\boldsymbol{k}}.$$

Per funzioni differenziabili conoscere il gradiente permette di calcolare facilmente derivate direzionali rispetto a qualsiasi direzione $\boldsymbol{v}$:

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{p}) = \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Dal punto di vista geometrico il gradiente ci fornisce informazioni sulle direzioni di massima crescita della funzione. Se $\nabla f(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{0}$ allora la direzione di massima crescita per la funzione $f(\boldsymbol{x})$ nel punto $\boldsymbol{p}$ è data dal versore

$$\boldsymbol{u} := \frac{1}{\|\nabla f(\boldsymbol{p})\|}\nabla f(\boldsymbol{p})$$

e la velocità di crescita in tale direzione è data dalla derivata direzionale

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{p}) = \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{u} = \|\nabla f(\boldsymbol{p})\|.$$

Esempio 1.2. Consideriamo il campo scalare $f(x,y,z) := x^3 + y^2 z$. Il suo gradiente è il campo vettoriale

$$\nabla f(x,y,z) = 3x^2\vec{\boldsymbol{i}} + 2yz\vec{\boldsymbol{j}} + y^2\vec{\boldsymbol{k}}.$$

Esercizio 1.3. Sia $f(x,y)$ una funzione differenziabile nel punto $(x_\star, y_\star)$. Quali condizioni devono soddisfare due vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ affinché il gradiente $\nabla f(x_\star, y_\star)$ possa essere determinato dai valori delle derivate direzionali $D_{\boldsymbol{u}} f(x_\star, y_\star)$ e $D_{\boldsymbol{u}} f(x_\star, y_\star)$?

2 Divergenza

L'operatore di divergenza associa ad un campo vettoriale il campo scalare definito dalla traccia della sua matrice Jacobiana. (La traccia di una matrice è la somma degli elementi sulla sua diagonale principale.)

Definizione 2.1. Sia $n \in \mathbb{N}$. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Definiamo l'operatore di *divergenza* per funzioni di classe C^1:

$$\operatorname{div}\colon C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \to C^0(\Omega;\mathbb{R}),$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \operatorname{tr} J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

La divergenza è un operatore lineare e valgono le seguenti proprietà:

$$\nabla\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}) = (\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f}) + (\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{g}), \qquad \nabla\boldsymbol{\cdot}(\varphi\boldsymbol{f}) = \varphi(\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f}) + (\nabla\varphi)\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f},$$

per ogni coppia di campi vettoriali $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ e per ogni campo scalare φ.

A livello simbolico, l'operatore di divergenza applicato ad un campo vettoriale possiamo pensarlo come il prodotto scalare tra l'operatore gradiente e il campo vettoriale,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f} = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n.$$

Attenzione però all'ordine dei fattori: le scritture $\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{f}\boldsymbol{\cdot}\nabla$ non significano la stessa cosa: il primo è un campo scalare (la divergenza di $\boldsymbol{f}$), mentre il secondo è un operatore differenziale scalare. Se φ è un campo scalare abbiamo

$$(\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f})\varphi = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\varphi + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\varphi,$$
$$(\boldsymbol{f}\boldsymbol{\cdot}\nabla)\varphi = f_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}.$$

Per funzioni vettoriali scalari di tre variabili a valori in $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\big), \tag{1}$$

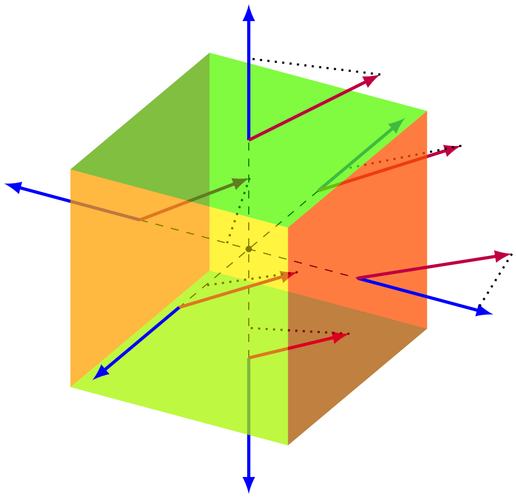
abbiamo

$$\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f} = \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3.$$

Dal punto di vista geometrico il valore della divergenza di un campo vettoriale in un punto è una misura di quanto i vettori del campo tendono ad "aprirsi" (ad allontanarsi tra loro). Da un punto di vista fisico, se immaginiamo il vettore $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ come la velocità della particella di un fluido che si trova nel punto $\boldsymbol{x}$ allora $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ indica la densità del flusso del fluido nel punto $\boldsymbol{x}$: immaginiamo di misurare la quantità di fluido che esce (o entra) attraverso la superficie di un piccolo intorno regolare del punto $\boldsymbol{x}$, il rapporto tra il flusso misurato e il volume dell'intorno tende (sotto ragionevoli ipotesi di regolarità) al valore della divergenza nel punto, quando l'intorno tende a concentrarsi nel punto. Ad esempio, nel caso $n = 3$, consideriamo un campo vettoriale della forma (1) di classe C^1 definito in un intorno del punto $(x_\star, y_\star, z_\star)$. Per piccoli valori $\varepsilon > 0$, consideriamo il cubo Q di centro $(x_\star, y_\star, z_\star)$ e lato 2ε con spigoli paralleli agli assi cartesiani,

$$Q := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ |x - x_\star| \leqslant \varepsilon, |y - y_\star| \leqslant \varepsilon, |z - z_\star| \leqslant \varepsilon\big\} = \\ = [x_\star - \varepsilon, x_\star + \varepsilon] \times [y_\star - \varepsilon, y_\star + \varepsilon] \times [z_\star - \varepsilon, z_\star + \varepsilon].$$

La superficie di tale cubo (che coincide con la frontiera ∂Q) è formata da tre coppie di facce, ciascuna coppia è formata da due quadrati di lato 2ε, paralleli tra loro e ortogonali ad uno degli assi cartesiani.



Quando ε è piccolo, possiamo approssimare il flusso uscente dal cubo attraverso una delle facce moltiplicando l'area della faccia per la lunghezza della componente normale (ovvero ortogonale alla faccia) del campo $\boldsymbol{f}$ misurata nel centro della faccia, tale componente la misuriamo facendo il prodotto scalare con il versore normale *esterno* della faccia, ovvero il vettore unitario perpendicolare alla faccia che punta verso l'esterno del cubo. Per le due facce ortogonali all'asse x abbiamo un contributo al flusso approssimabile con

$$(2\varepsilon)^2 \boldsymbol{f}(x_\star + \varepsilon, y_\star, z_\star) \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{\imath}} - (2\varepsilon)^2 \boldsymbol{f}(x_\star - \varepsilon, y_\star, z_\star) \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{\imath}} = \\ = 4\varepsilon^2 \big(f_1(x_\star + \varepsilon, y_\star, z_\star) - f_1(x_\star - \varepsilon, y_\star, z_\star)\big) = \\ = 4\varepsilon^2 \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_\star, y_\star, z_\star)\varepsilon - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_\star, y_\star, z_\star)(-\varepsilon) + o(\varepsilon)\Big) = \\ = 8\varepsilon^3 \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_\star, y_\star, z_\star) + o(\varepsilon^3).$$

Per le altre due coppie otteniamo formule analoghe. La variazione totale di flusso attraverso il cubo possiamo dunque approssimarla sommando i contributi delle sei facce:

$$\text{flusso} \approx 8\varepsilon^3 \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_\star, y_\star, z_\star) + 8\varepsilon^3 \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_\star, y_\star, z_\star) + 8\varepsilon^3 \frac{\partial f_3}{\partial z}(x_\star, y_\star, z_\star) + o(\varepsilon^3) = \\ = \text{volume} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x_\star, y_\star, z_\star) + o(\varepsilon^3).$$

Otteniamo la densità di flusso nel punto $(x_\star, y_\star, z_\star)$ calcolando il rapporto tra flusso e volume del cubo (che è uguale a $8\varepsilon^3$), e facendo tendere ε a zero,

$$\text{densità di flusso} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\text{flusso}}{\text{volume}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x_\star, y_\star, z_\star) + o(1) = \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x_\star, y_\star, z_\star).$$

Esempio 2.2. Consideriamo il campo vettoriale $\boldsymbol{f}(x,y,z) := (x^3, y^2 z, xz + y)$. La sua divergenza è il campo scalare

$$\nabla\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{f}(x,y,z) = 3x^2 + 2yz + x.$$

Esercizio 2.3. Calcola la divergenza dei seguenti campi vettoriali:

1. $\boldsymbol{F}(x,y) = \Big(\log\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\Big)$;
2. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = yz\vec{\boldsymbol{i}} + xz\vec{\boldsymbol{j}} + xy\vec{\boldsymbol{k}}$;
3. $\boldsymbol{F}(x,y,z,t) = \nabla(xy^2z^3\mathrm{e}^t)$.

Esercizio 2.4. Sia $f(r)$ una funzione derivabile di una variabile. Dimostra che per $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vale la formula

$$\nabla\boldsymbol{\cdot}\big(f(\|\boldsymbol{x}\|)\,\boldsymbol{x}\big) = \|\boldsymbol{x}\|\, f'(\|\boldsymbol{x}\|) + nf(\|\boldsymbol{x}\|).$$

3 Rotore

L'operatore rotore associa ad un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$ un altro campo vettoriale, operando simbolicamente il prodotto vettoriale tra l'operatore gradiente e il campo vettoriale dato.

Definizione 3.1. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$. Definiamo l'operatore *rotore* per funzioni di classe C^1:

$$\operatorname{rot}\colon C^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \to C^0(\Omega;\mathbb{R}^3),$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla\times\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \Big(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big)\vec{\boldsymbol{i}} + \Big(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\Big)\vec{\boldsymbol{j}} + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big)\vec{\boldsymbol{k}}, \quad \forall \boldsymbol{x}\in\Omega.$$

Il rotore è un operatore lineare e valgono le seguenti proprietà:

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}) = (\nabla\times\boldsymbol{f}) + (\nabla\times\boldsymbol{g}), \qquad \nabla\times(\varphi\boldsymbol{f}) = \varphi(\nabla\times\boldsymbol{f}) + (\nabla\varphi)\times\boldsymbol{f},$$

per ogni coppia di campi vettoriali $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ e per ogni campo scalare φ.

A livello simbolico, l'operatore rotore applicato ad un campo vettoriale possiamo pensarlo come il determinante di una matrice simbolica,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \nabla\times\boldsymbol{f} = \det\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}.$$

Dal punto di vista geometrico il vettore rotore di un campo vettoriale in un punto è una misura di quanto i vettori del campo tendano a "ruotare" intorno al punto.

Da un punto di vista fisico, se facciamo ruotare un corpo rigido che occupa lo spazio $\mathbb{R}^3$ intorno all'origine con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, allora il campo di velocità che descrive la velocità in ogni punto dello spazio è descritto dal campo vettoriale dato da

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \boldsymbol{\omega} \times (x,y,z) = (\omega_2 z - \omega_3 y)\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\vec{\boldsymbol{k}}.$$

In questo caso $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ risulta essere proporzionale alla velocità angolare,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v} &= (\partial_y v_3 - \partial_z v_2)\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\partial_z v_1 - \partial_x v_3)\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\partial_x v_2 - \partial_y v_1)\,\vec{\boldsymbol{k}} = \\ &= (\omega_1 - (-\omega_1))\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\omega_2 - (-\omega_2))\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\omega_3 - (-\omega_3))\,\vec{\boldsymbol{k}} = 2\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

Esempio 3.2. Consideriamo il campo vettoriale $\boldsymbol{f}(x,y,z) := (x^3, y^2 z, xz + y)$. Il suo rotore è il campo vettoriale

$$\nabla\times\boldsymbol{f}(x,y,z) = (1-y^2)\vec{\boldsymbol{\imath}} + (0-z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (0-0)\vec{\boldsymbol{k}} = (1-y^2)\vec{\boldsymbol{\imath}} - z\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (1-y^2, -z, 0).$$

Osservazione 3.3. Se abbiamo un campo vettoriale dipendente da due variabili e a valori in $\mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{g} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2),$$

definito su Ω aperto in $\mathbb{R}^2$, possiamo estenderlo ad un campo dipendente da tre variabili a valori in $\mathbb{R}^3$ ponendo

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) := \big(g_1(x,y), g_2(x,y), 0\big), \quad \forall (x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Se calcoliamo il rotore di $\boldsymbol{G}$ otteniamo

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{G} = (\partial_y 0 - \partial_z g_2)\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\partial_z g_1 - \partial_x 0)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\partial_x g_2 - \partial_y g_1)\vec{\boldsymbol{k}} = (\partial_x g_2 - \partial_y g_1)\vec{\boldsymbol{k}} = (0, 0, \partial_x g_2 - \partial_y g_1).$$

Osserviamo che si tratta sempre di un vettore parallelo all'asse z. L'informazione utile in questo calcolo è tutta contenuta nella terza componente, che è un campo scalare che dipende solo dalle variabili x e y, ed essa definisce il *rotore* (bidimensionale) del campo $\boldsymbol{g}$,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{g}(x,y) := \partial_x g_2(x,y) - \partial_y g_1(x,y).$$

Esercizio 3.4. Calcola il rotore dei seguenti campi vettoriali:

1. $\boldsymbol{F}(x,y) = \Big(\log\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\Big)$;
2. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = yz\vec{\boldsymbol{\imath}} + xz\vec{\boldsymbol{\jmath}} + xy\vec{\boldsymbol{k}}$;
3. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \nabla\times(z, x^2, y^3)$.

4 Composizione di operatori

Per campi di classe C^2 possiamo considerare la composizione di coppie di operatori differenziali in vari modi.

Sia $f(x, y, z)$ un campo scalare di classe C^2 e sia $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vettoriale di classe C^2.

- Il rotore del gradiente di un campo scalare è sempre nullo, infatti per il teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste abbiamo

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = \\ &\qquad = \big(\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f\big)\vec{\boldsymbol{i}} + \big(\partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f\big)\vec{\boldsymbol{j}} + \big(\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f\big)\vec{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

- La divergenza del rotore di un campo vettoriale è sempre nulla, infatti sempre per il teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste abbiamo

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \\ &\qquad = \partial_x(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \partial_y(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \partial_z(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) = \\ &\qquad\qquad = \partial_y \partial_z F_1 - \partial_z \partial_y F_1 + \partial_z \partial_x F_2 - \partial_x \partial_z F_2 + \partial_x \partial_y F_3 - \partial_y \partial_x F_3 = 0.\end{aligned}$$

- La divergenza del gradiente di un campo scalare definisce un operatore differenziale del secondo ordine, detto *laplaciano*, esso coincide con la traccia della matrice Hessiana,

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \partial_{x_1} \partial_{x_1} f + \cdots + \partial_{x_n} \partial_{x_n} f = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 f = \operatorname{tr} H_f.$$

Esercizio 4.1. Sia $\boldsymbol{F}$ un campo vettoriale di classe C^2 su $\mathbb{R}^3$ a valori in $\mathbb{R}^3$. Calcola, cercando di semplicare al meglio il risultato il campo vettoriale $\boldsymbol{G}$ che si ottiene dalla differenza tra il rotore del rotore e il gradiente della divergenza,

$$\boldsymbol{G} := \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}).$$

Esercizio 4.2. Dato il campo vettoriale

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) := (x^2 y, xyz, xz^2),$$

Calcola il campo vettoriale

$$\boldsymbol{g} := \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{f}).$$