Analisi Matematica 1B - Lezione 2

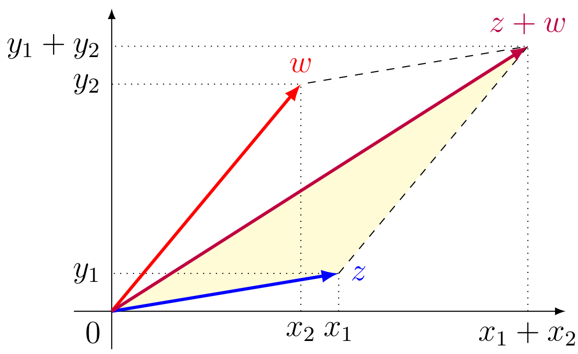
Geometria dei numeri complessi

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 17 marzo 2020)

1 Struttura vettoriale dei numeri complessi

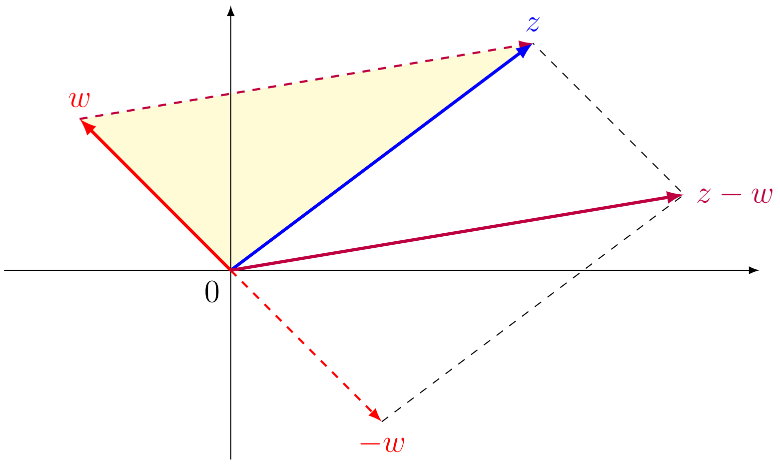
Abbiamo visto nella prima lezione come i numeri complessi possano essere rappresentati come punti nel piano cartesiano. Se $x, y \in \mathbb{R}$, al numero complesso $x + \mathrm{i}y$ corrisponde il punto del piano di coordinate (x, y) e viceversa. Tramite questa corrispondenza possiamo identificare l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con il piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Sappiamo già (dall'insegnamento di geometria e algebra) che $\mathbb{R}^2$ possiede una struttura di spazio vettoriale e si verifica facilmente che la corrispondenza tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ rispetta questa struttura. Se visualizziamo i due numeri complessi $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ e $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ come due vettori del piano che partono dall'origine e arrivano ai punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) la loro somma $z+w = (x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$ corrisponde al vettore che parte dall'origine e arriva al punto (x_1+x_2, y_1+y_2), che si può ottenere geometricamente con la regola del parallelogrammo (traslando uno dei due vettori dall'origine alla punta dell'altro vettore):



Guardando la figura si osserva che il modulo di $z + w$ è la lunghezza del lato di un triangolo in cui gli altri due lati hanno lunghezze pari ai moduli di z e di w. In ogni triangolo un lato ha una lunghezza che non può mai superare la somma delle lunghezze degli altri due. Ritroviamo dunque la *disuguaglianza triangolare*:

$$|z+w| \leqslant |z| + |w| \,, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

La differenza $z - w$ è la somma tra z e l'opposto di w, possiamo immaginarla come il vettore che applicato nella punta del vettore w arriva nella punta del vettore z; il suo modulo $|z - w|$ non è altro che la distanza euclidea di z da w nel piano complesso.



Scrivendo $z = (z-w) + w$ e applicando la disuguaglianza triangolare troviamo che

$$|z| \leqslant |z-w| + |w| \,.$$

Analogamente, scambiando il ruolo di z e w abbiamo

$$|w| \leqslant |w-z| + |z| \,.$$

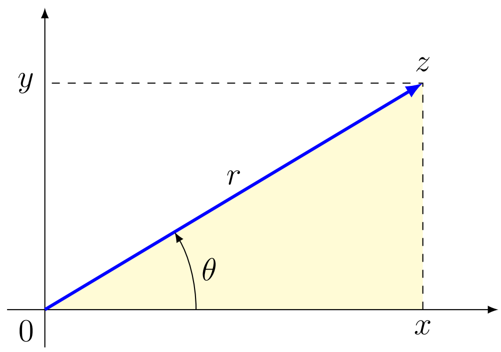
Dalle due disuguaglianze si ricava la disuguaglianza triangolare rovesciata:

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z-w| \,,$$

ovvero, la differenza dei moduli è sempre minore o uguale al modulo della differenza (che equivale a dire che in un triangolo la differenza tra le lunghezze di due lati non supera mai la lunghezza del terzo lato).

2 Forma polare dei numeri complessi

Un numero complesso non nullo $z = x + \mathrm{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \neq (0, 0)$, visto come vettore applicato nell'origine del piano può essere indivuato specificando le sue coordinate cartesiane (x, y), ma anche specificando la sua lunghezza, ovvero la distanza euclidea r della punta del vettore dall'origine, e la sua direzione, ovvero l'angolo θ che esso forma ad esempio con il semiasse positivo delle ascisse. Questi due parametri, lunghezza r e angolo θ, si dicono *coordinate polari*.



Il legame tra coordinate polari (r,θ) e coordinate cartesiane (x,y) si ricava facilmente usando un po' di trigonometria elementare ed è dato dalle formule

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

La lunghezza r non è altro che il modulo del numero complesso z, e dal teorema di Pitagora applicato al triangolo giallo della figura si ricava che

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|\,.$$

Osserviamo che tale valore è sempre un numero reale non negativo, $r \geqslant 0$, ed è nullo solo nel caso in cui $z=0$.

L'angolo θ viene detto *argomento* del numero z. Dalle formule (1) si ricava che

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Osserviamo che l'argomento θ è un numero reale che esprime il valore in radianti dell'angolo. Può assumere sia valori positivi che negativi. I valori di θ crescono procendendo in senso antiorario intorno all'origine; decrescono procedendo in senso orario; si annullano sul semiasse positivo delle ascisse.

Dalle formule (1) ricaviamo che $z = x + \mathrm{i}y$ si può scrivere nella forma

$$z = r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big), \tag{3}$$

che viene detta *forma trigonometrica* del numero complesso z.

Esempio 2.1. Il numero complesso z_1 che ha modulo 2 e argomento $\pi/6$ è

$$z_1 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\Big) = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Il numero complesso z_2 che ha modulo 4 e argomento $-\pi/4$ è

$$z_2 = 4\big(\cos(-\pi/4) + \mathrm{i}\sin(-\pi/4)\big) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Il numero complesso z_3 che ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/2$ è

$$z_3 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\Big) = \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

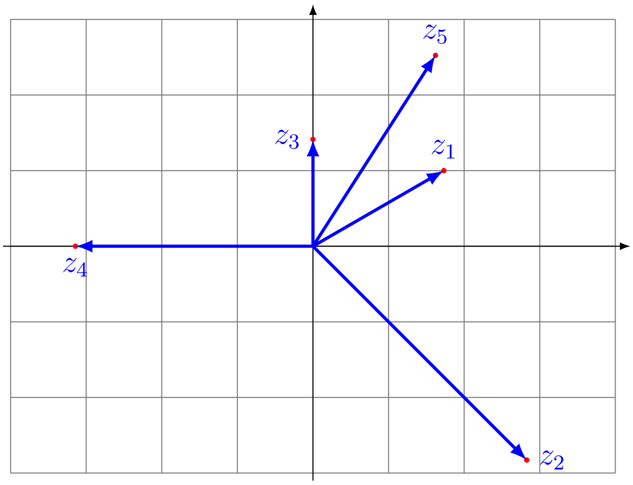
Il numero complesso z_4 che ha modulo π e argomento π è

$$z_4 = \pi\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -\pi.$$

Il numero complesso z_5 che ha modulo 3 e argomento 1 è

$$z_5 = 3\big(\cos(1) + \mathrm{i}\sin(1)\big) = 1.6209\ldots + \mathrm{i}\,2.5244\ldots$$

Rappresentiamo questi cinque numeri complessi nel piano cartesiano:



Esempio 2.2. Sia $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$. Il suo modulo è $|z_1| = \sqrt{4+12} = 4$. Il punto z_1 sta nel primo quadrante e dunque possiede un argomento in $]0, \pi/2[$ tale che $\cos\theta_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, quindi possiamo scegliere $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$. In forma trigonometrica abbiamo

$$z_1 = 4\Big(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big).$$

Sia $z_2 = -1 - \mathrm{i}$. Il suo modulo è $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Il punto z_2 sta nel terzo quadrante sulla diagonale principale (quella di equazione $y = x$) e quindi possiamo scegliere come argomento $\theta_2 = -\frac{3}{4}\pi$. In forma trigonometrica abbiamo

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\Big(-\frac{3}{4}\pi\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(-\frac{3}{4}\pi\Big)\right).$$

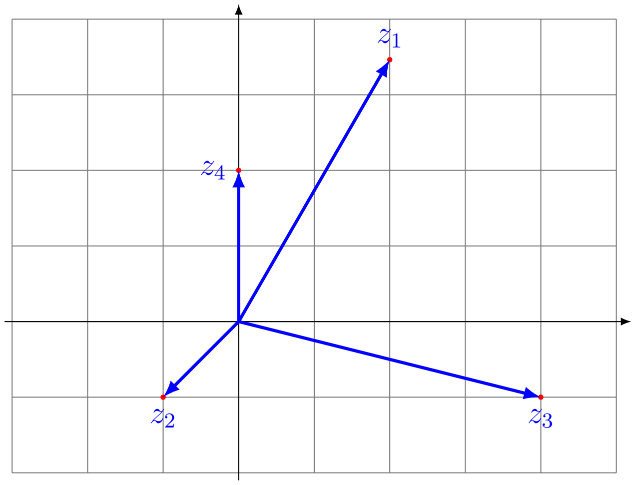
Sia $z_3 = 4 - \mathrm{i}$. Il suo modulo è $|z_3| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$. Il punto z_3 sta nel quarto quadrante e dunque possiede un argomento in $]-\pi/2, 0[$ tale che $\tan\theta_3 = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$, quindi possiamo scegliere $\theta_3 = \arctan(-1/4) = -\arctan(1/4)$. In forma trigonometrica abbiamo

$$z_3 = \sqrt{17}\Big(\cos\big(-\arctan(1/4)\big) + \mathrm{i}\sin\big(-\arctan(1/4)\big)\Big).$$

Sia $z_4 = 2\mathrm{i}$. Il suo modulo è 2. Il punto z_4 sta sull'asse dei numeri immaginari con parte immaginaria positiva e dunque un suo argomento è $\theta_4 = \pi/2$. In forma trigonometrica abbiamo

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Rappresentiamo questi quattro numeri complessi nel piano cartesiano:



Osservazione 2.3. Se $z = 0$ il vettore che lo rappresenta è il vettore nullo con modulo uguale a zero, $r = 0$. In questo caso non è possibile definire un argomento, in quanto non c'è nessun angolo determinato dal vettore con il semiasse positivo delle ascisse. La formula (3) risulta comunque valida per qualsiasi valore di θ.

Osservazione 2.4. Un argomento di un numero complesso non nullo è un angolo! Un angolo di 2π corrisponde ad un giro completo intorno all'origine. Se si incrementa l'argomento di un numero complesso, il vettore che lo rappresenta viene ruotato in senso orario di un angolo pari all'incremento dell'argomento. Ciò significa che, se si incrementa di 2π l'argomento di un numero complesso, ruotando di un giro completo esso ritorna nella posizione di partenza. Dunque se θ è un argomento di z anche $\theta + 2\pi$ sarà un argomento di z. Stessa cosa se la rotazione avviene in senso inverso, anche $\theta - 2\pi$ sarà un argomento di z. Compiendo un qualsiasi numero intero di giri completi in un senso o nell'altro si ritorna sempre nella stessa posizione, dunque abbiamo che $\theta + 2\pi k$ sarà anch'esso un argomento di z per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Ne segue che l'argomento di un numero complesso non è unico! Ogni numero complesso non nullo possiede una infinità numerabile di argomenti, che formano una progressione aritmetica di passo 2π. Una volta che conosciamo uno di questi argomenti, la sequenza di tutti gli altri è univocamente determinata. Se θ_1 e θ_2 sono due argomenti di uno stesso numero complesso non nullo allora la loro differenza $\theta_1 - \theta_2$ è necessariamente un multiplo intero di 2π; in questo caso diciamo che θ_1 e θ_2 coincidono *modulo* 2π:

$$\theta_1 = \theta_2 \pmod{2\pi} \iff \exists k \in \mathbb{Z}: \quad \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k.$$

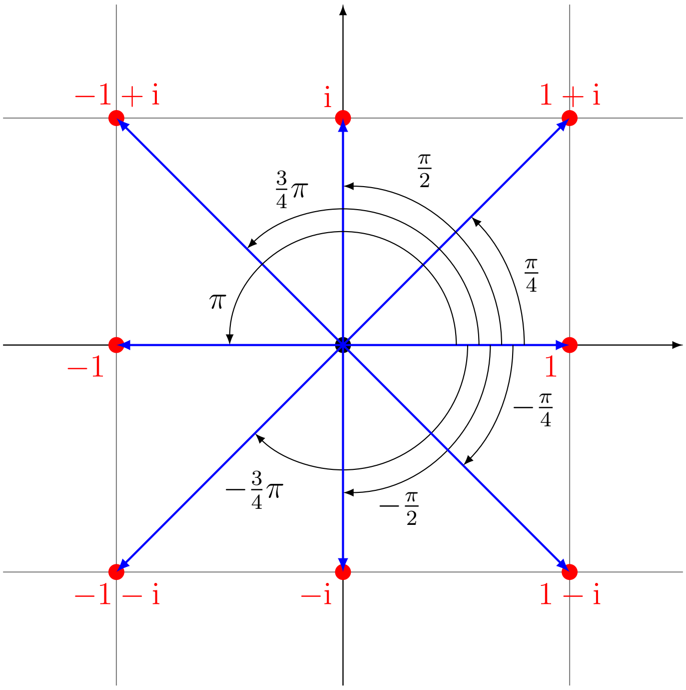
Possiamo comunque darci un criterio per selezionare, tra tutti i possibili valori che l'argomento di un numero complesso può assumere, un valore che possa essere considerato l'argomento principale.

Definizione 2.5. Dato un numero complesso z non nullo conveniamo di definire *argomento principale* di z quell'unico valore tra tutti i possibili argomenti di z che si trova nell'intervallo $]-\pi,\pi]$. Tale valore lo indichiamo con $\operatorname{Arg}(z)$.

Osservazione 2.6. Avremmo potuto scegliere come intervallo di riferimento per l'argomento principale un qualsiasi intervallo semiaperto di lunghezza 2π. Un'altra possibile scelta ragionevole sarebbe potuta essere quella di scegliere l'intervallo $[0,2\pi[$; la scelta dell'intervalllo di riferimento è semplicemente una questione di convenzioni.

Esempio 2.7. Vediamo gli argomenti principali di alcuni numeri complessi:

$$\operatorname{Arg}(1)=0,\qquad \operatorname{Arg}(-1)=\pi,\qquad \operatorname{Arg}(\mathrm{i})=\frac{\pi}{2},\qquad \operatorname{Arg}(-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2},$$
$$\operatorname{Arg}(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4},\quad \operatorname{Arg}(-1+\mathrm{i})=\frac{3}{4}\pi,\quad \operatorname{Arg}(-1-\mathrm{i})=-\frac{3}{4}\pi,\quad \operatorname{Arg}(1-\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}.$$



Grazie alle formule (2) utilizzando le funzioni inverse delle funzioni trigonometriche è possibile ricavare il valore dell'argomento principale di un numero complesso conoscendo la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Ricordiamo che:

- la funzione $\theta=\arccos(x)$ è la funzione inversa della funzione $x=\cos\theta$ ristretta all'intervallo $[0,\pi]$, per angoli compresi nell'intervallo $]-\pi,0[$ possiamo utilizzare il fatto che angoli opposti hanno lo stesso coseno,
$$\cos(\theta)=\cos(-\theta);$$
- la funzione $\theta=\arcsin(x)$ è la funzione inversa della funzione $x=\sin\theta$ ristretta all'intervallo $[-\pi/2,\pi/2]$, per angoli compresi negli intervalli $]-\pi,-\pi/2[$ e $]\pi/2,\pi[$ possiamo utilizzare il fatto che angoli supplementari hanno lo stesso seno
$$\sin(\theta)=\sin(\pi-\theta)=\sin(-\pi-\theta);$$

- la funzione $\theta = \arctan(x)$ è la funzione inversa della funzione $x = \tan\theta$ ristretta all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$, per angoli compresi negli intervalli $]-\pi, -\pi/2[$ e $]\pi/2, \pi[$ possiamo utilizzare la periodicità della tangente,

$$\tan(\theta) = \tan(\theta - \pi) = \tan(\theta + \pi).$$

Utilizzando queste osservazioni otteniamo le seguenti formule:

Proposizione 2.8. *Sia $z = x + \mathrm{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, un numero complesso non nullo.*

- *Se z sta nel primo quadrante, ovvero se $x > 0$ e $y > 0$, avrà argomento principale contenuto in $]0, \pi/2[$; dunque possiamo tranquillamente invertire le relazioni* (2)*:*

$$\mathrm{Arg}(z) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- *Se z sta nel secondo quadrante, ovvero se $x < 0$ e $y > 0$, avrà argomento principale contenuto in $]\pi/2, \pi[$; dunque quando invertiamo le relazioni* (2) *dobbiamo correggere i valori dell'arcoseno e dell'arcotangente:*

$$\mathrm{Arg}(z) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- *Se z sta nel terzo quadrante, ovvero se $x < 0$ e $y < 0$, avrà argomento principale contenuto in $]-\pi, -\pi/2[$; dunque quando invertiamo le relazioni* (2) *dobbiamo correggere i valori di arcocoseno, arcoseno e arcotangente:*

$$\mathrm{Arg}(z) = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- *Se z sta nel quarto quadrante, ovvero se $x > 0$ e $y < 0$, avrà argomento principale contenuto in $]-\pi/2, 0[$; dunque quando invertiamo le relazioni* (2) *dobbiamo correggere i valori dell'arcocoseno:*

$$\mathrm{Arg}(z) = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- *Se z sta sul semiasse reale positivo, ovvero se $x > 0$ e $y = 0$, il suo argomento principale è $\mathrm{Arg}(z) = 0$.*

- *Se z sta sul semiasse reale negativo, ovvero se $x < 0$ e $y = 0$, il suo argomento principale è $\mathrm{Arg}(z) = \pi$.*

- *Se z sta sul semiasse immaginario con parte immaginaria positiva, ovvero se $x = 0$ e $y > 0$, il suo argomento principale è $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$.*

- *Se z sta sul semiasse immaginario con parte immaginaria negativa, ovvero se $x = 0$ e $y < 0$, il suo argomento principale è* $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$.

Esempio 2.9.

- Il numero $z_1 = 3+4\mathrm{i}$ sta nel primo quadrante, ha argomento principale $\theta_1 \in]0, \pi/2[$; siccome $\tan\theta_1 = \frac{4}{3}$, abbiamo

$$\operatorname{Arg}(z_1) = \theta_1 = \arctan\frac{4}{3} = 0.927\ldots.$$

- Il numero $z_2 = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ sta nel secondo quadrante, il suo modulo è

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3};$$

  ha argomento principale $\theta_2 \in]\pi/2, \pi[$, dunque $\pi - \theta_2 \in]0, \pi/2[$; siccome

$$\sin(\pi - \theta_2) = \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

  abbiamo

$$\operatorname{Arg}(z_2) = \theta_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi.$$

- Il numero $z_3 = -2 - 2\mathrm{i}$ sta nel terzo quadrante, il suo modulo è

$$|z_3| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2};$$

  ha argomento principale $\theta_3 \in] - \pi, -\pi/2[$, dunque $-\theta_3 \in]\pi/2, \pi[$; siccome

$$\cos(-\theta_3) = \cos(\theta_3) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

  abbiamo

$$\operatorname{Arg}(z_3) = \theta_3 = -\arccos\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = -\frac{3}{4}\pi.$$

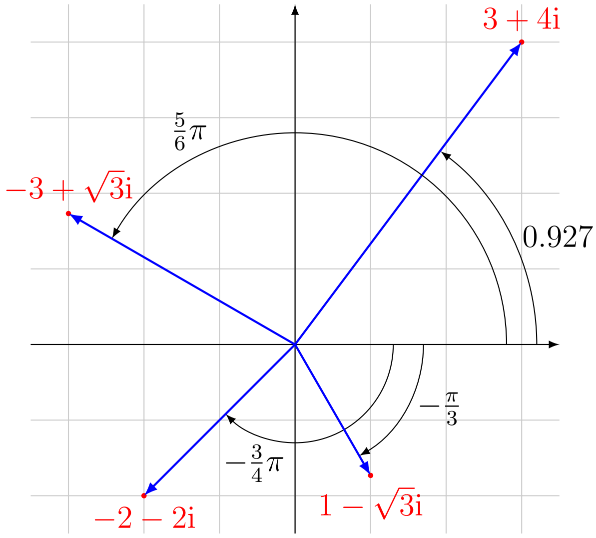
- Il numero $z_4 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ sta nel quarto quadrante, il suo modulo è

$$|z_4| = \sqrt{1+3} = 2,$$

  ha argomento principale $\theta_4 \in] - \pi/2, 0[$; siccome $\tan\theta_4 = -\sqrt{3}$, abbiamo

$$\operatorname{Arg}(z_4) = \theta_4 = \arctan\big(-\sqrt{3}\big) = -\frac{\pi}{3}.$$

Rappresentiamo questi quattro numeri complessi nel piano cartesiano:



Esercizio 2.10. Calcola modulo e argomento principale dei seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \pi, \qquad z_2 = -\frac{\pi}{2}\mathrm{i}, \qquad z_3 = -\sqrt{15} + \mathrm{i}\sqrt{5}, \qquad z_4 = (1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})\mathrm{i},$$
$$z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_6 = \frac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_7 = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\sqrt{3}, \qquad z_8 = -\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}\mathrm{i}.$$

Esercizio 2.11. Riscrivi le formule della proposizione 2.8 per calcolare l'argomento principale di un numero complesso nell'ipotesi di scegliere come convenzione che l'argomento principale sia quello contenuto nell'intervallo $[0, 2\pi[$.

3 Esponenziale ad esponente immaginario

Consideriamo la formula (3) che esprime un numero complesso in forma trigonometrica:

$$z = r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big).$$

Osserviamo che in questa forma il numero complesso z viene scritto come prodotto di due fattori: il primo fattore è un numero non negativo, $r \geqslant 0$, che rappresenta il modulo di z; il secondo fattore è una quantità a valori complessi che dipende solo dal valore reale dell'argomento θ. Per esaminare meglio questo secondo fattore definiamo una funzione $E \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ponendo

$$E(t) := \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Così ora la forma trigonometrica (3) si può riscrivere più brevemente come $z = rE(\theta)$.

Proposizione 3.1. *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ il numero complesso $E(t)$ ha modulo 1 e argomento t:*

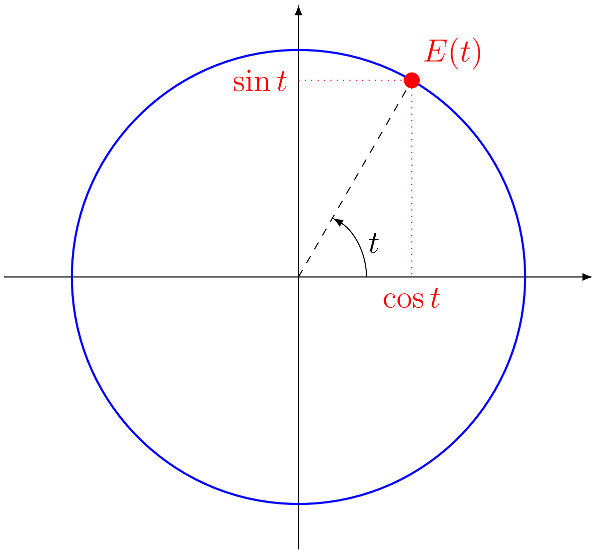
$$|E(t)| = 1, \qquad \operatorname{Arg}\big(E(t)\big) = t \pmod{2\pi}.$$

Dimostrazione. Abbiamo: $|E(t)|^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$. Inoltre, per via di (2) deve valere:

$$\cos \operatorname{Arg}\big(E(t)\big) = \cos t, \qquad \sin \operatorname{Arg}\big(E(t)\big) = \sin t, \qquad \tan \operatorname{Arg}\big(E(t)\big) = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t,$$

e dunque per la periodicità delle funzioni trigonometriche $\operatorname{Arg}\big(E(t)\big)$ e t devono coincidere a meno di multipli interi di 2π. □

Dunque al variare di t il valore $E(t)$ è un punto che si muove sulla circonferenza trigonometrica, quella che ha centro nell'origine e raggio 1, nel piano complesso.



Cosa succede quando moltiplichiamo tra loro due valori della funzione $E(t)$? Utilizzando le formule di addizione per coseno e seno otteniamo:

$$\begin{aligned} E(x)E(y) &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + \mathrm{i}(\cos x \sin y + \sin x \cos y) = \\ &= \cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) = E(x+y). \end{aligned}$$

Dunque, il prodotto di due numeri complessi di modulo 1 è ancora un numero complesso di modulo 1 il cui argomento è la somma degli argomenti dei due fattori. La formula

$$E(x+y) = E(x)E(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

è del tutto analoga alla legge esponenziale per esponenziali reali,

$$\mathrm{e}^{\lambda(x+y)} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{\lambda y},$$

che vale per ogni $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.

Cosa succede se proviamo a derivare la funzione $E(t)$? Indichiamo con D_t l'operatore di derivazione rispetto a t e procediamo per linearità,

$$D_t[E(t)] = D_t[\cos t] + \mathrm{i}D_t[\sin t] = -\sin t + \mathrm{i}\cos t = \mathrm{i}(\mathrm{i}\sin t + \cos t) = \mathrm{i}E(t). \tag{5}$$

Osserviamo che anche questa proprietà è del tutto analoga ad una proprietà delle funzioni esponenziali reali,

$$D_t[\mathrm{e}^{\lambda t}] = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Il confronto tra le formule (4) e (5) e le analoghe formule per esponenziali reali sembra suggerire che la funzione $E(t)$ si comporti proprio come l'esponenziale $\mathrm{e}^{\lambda t}$ in cui il parametro assume il valore immaginario $\lambda = \mathrm{i}$. In base a queste osservazioni è giustificata la seguente definizione:

Definizione 3.2. Per ogni valore $t \in \mathbb{R}$ definiamo l'esponenziale ad esponente immaginario it ponendo

$$\mathrm{e}^{it} := E(t) = \cos t + \mathrm{i} \sin t.$$

In base a questa definizione le formule (4) e (5) diventano

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}, \qquad D_t[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}] = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Il coniugato di $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, con $t \in \mathbb{R}$, è dato da

$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \overline{\cos t + \mathrm{i} \sin t} = \cos t - \mathrm{i} \sin t = \cos(-t) + \mathrm{i} \sin(-t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t};$$

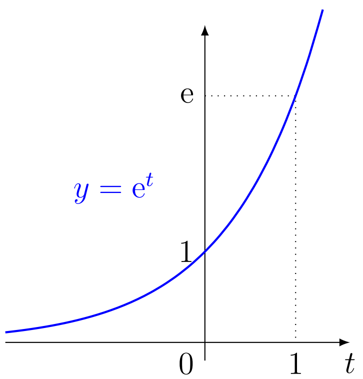
inoltre, siccome $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, abbiamo anche che il coniugato coincide con il reciproco

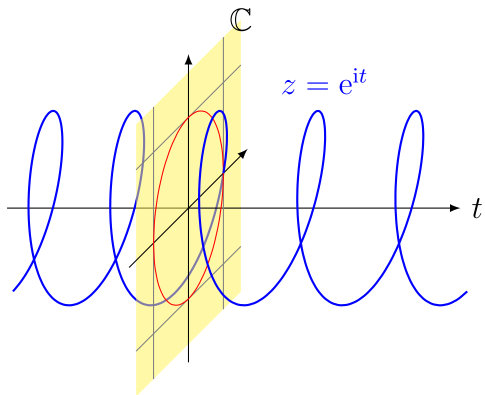
$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

Osservazione 3.3. Ci sono dunque forti analogie tra la funzione esponenziale ad esponente reale e^t e la funzione esponenziale ad esponente immaginario $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, ma esse presentano anche profonde differenze, si tratta di funzioni che si comportano in modo estremamente diverso:

- la funzione $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^t$ assume valori reali, è strettamente crescente e dunque iniettiva e invertibile, è infinitesima per $t \to -\infty$ e infinita per $t \to +\infty$;
- la funzione $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ assume valori complessi, è limitata in quanto i suoi valori stanno sulla circonferenza trigonometrica, è periodica con periodo 2π, infatti essendo $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ abbiamo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+2\pi)}$, dunque non è iniettiva e quindi non è invertibile.

In figura vediamo rappresentati il grafico di $t \mapsto \mathrm{e}^t$ (a sinistra) e il grafico di $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ (a destra).





Lemma 3.4. *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$ allora $\alpha = \beta \pmod{2\pi}$, ovvero esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\alpha = \beta + 2\pi k$.*

Dimostrazione. Per la legge esponenziale

$$e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha}e^{-i\beta} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = 1.$$

Ne deduciamo che $\alpha - \beta$ è un argomento del numero 1 e dunque deve essere un multiplo intero dell'angolo giro 2π. $\square$

Sommando e sottraendo tra loro le formule

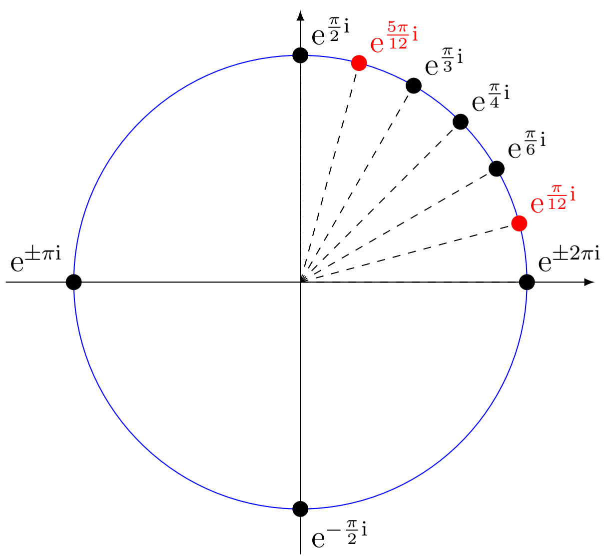
$$\cos t + i \sin t = e^{it},$$
$$\cos t - i \sin t = e^{-it},$$

ricaviamo le *formule di Eulero* che permettono di esprimere coseno e seno come combinazione lineare di esponenziali ad esponente immaginario:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Esempio 3.5. Presentiamo alcuni valori speciali, facilmente calcolabili, dell'esponenziale ad esponente immaginario:

$$\begin{array}{llll} e^{0i} = 1, & e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, & e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, & e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i, & e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i, & e^{i\pi} = -1, & e^{-i\pi} = -1, \\ e^{2\pi i} = 1, & e^{k\pi i} = (-1)^k, & e^{2\pi k i} = 1, & (k \in \mathbb{Z}). \end{array}$$



Esempio 3.6. Utilizzando le proprietà dell'esponenziale ad esponente immaginario possiamo ottenere il valore di coseno e seno per alcuni angoli un po' meno standard dei soliti. Ad esempio per l'angolo $\pi/12$ (ovvero 15 gradi). Siccome $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ abbiamo

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Da questa uguaglianza deduciamo che

$$\cos\frac{\pi}{12} = \operatorname{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\big) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \operatorname{Im}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\big) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Esercizio 3.7. Esprimi in termini di radicali i valori del coseno e del seno per gli angoli $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{12}\pi$ e $\frac{11}{12}\pi$.

Grazie all'esponenziale con esponente immaginario possiamo scrivere la forma trigonometrica di un numero complesso in maniera più compatta e (3) diventa

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{6}$$

dove $r = |z|$ e $\theta = \operatorname{Arg}(z) \pmod{2\pi}$; tale forma prende il nome di *forma esponenziale* del numero complesso z. Quando le informazioni su un numero complesso sono date in coordinate polari è preferibile utilizzare la forma esponenziale (6) rispetto alla forma trigonometrica (3) in quanto esprime le stesse informazioni in modo più sintetico e più facile da manipolare. Dati $r \geqslant 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, la forma esponenziale $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ indica il numero complesso che ha modulo r e un suo argomento è θ.

Esempio 3.8. Il numero complesso con modulo 2π e argomento $\pi/3$ è il numero:

$$2\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\pi\Big(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2\pi\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \pi + \mathrm{i}\pi\sqrt{3}.$$

Il numero complesso con modulo 3 e argomento 2 è il numero:

$$3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}} = 3(\cos 2 + \mathrm{i}\sin 2) = -1.24844\ldots + \mathrm{i}\,2.72789\ldots.$$

Esercizio 3.9. Scrivi prima in forma esponenziale e poi in forma cartesiana i numeri complessi che hanno modulo r e argomento θ nei seguenti casi e rappresentali nel piano complesso:

$$r = 2,\ \theta = \frac{\pi}{6}, \qquad r = \sqrt{3},\ \theta = -\frac{2}{3}\pi, \qquad r = 1,\ \theta = 1,$$
$$r = \mathrm{e},\ \theta = -\pi, \qquad r = \frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad r = \pi,\ \theta = \mathrm{e}.$$

Osservazione 3.10. Siccome $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$ vale la formula

$$0 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi}.$$

Questa formula rappresenta una delle più belle poesie che si possano esprimere con simboli matematici; nella sua essenzialità contiene gli elementi fondamentali della matematica: un'uguaglianza, una somma, un prodotto, una potenza, lo zero, l'unità reale, l'unità immaginaria, il pigreco, il numero di Nepero, tutto quanto fuso insieme in un unica armoniosa identità.

4 Prodotti in forma polare

Essendo la forma esponenziale un prodotto, calcolare prodotti o quozienti di numeri complessi scritti in forma esponenziale diventa molto semplice.

Consideriamo due numeri complessi z e w e scriviamoli in forma esponenziale:

$$\begin{aligned} z &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, & r &= |z|\,, & \theta &= \operatorname{Arg}(z) \pmod{2\pi}, \\ w &= s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, & s &= |w|\,, & \varphi &= \operatorname{Arg}(w) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Moltiplicando tra loro i due numeri otteniamo

$$zw = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = (rs)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)},$$

dove l'ultima espressione non è altro che una forma esponenziale, in quanto $rs \geqslant 0$ e $\theta + \varphi \in \mathbb{R}$, e dunque il prodotto ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti

$$|zw| = rs = |z|\,|w|\,, \qquad \operatorname{Arg}(zw) = \theta + \varphi \pmod{2\pi} = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \pmod{2\pi}.$$

Dividendo tra loro i due numeri, nell'ipotesi che sia $w \neq 0$, otteniamo

$$\frac{z}{w} = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)},$$

dove l'ultima espressione non è altro che una forma esponenziale, in quanto $\frac{r}{s} \geqslant 0$ e $\theta - \varphi \in \mathbb{R}$, e dunque il quoziente ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{r}{s} = \frac{|z|}{|w|}, \qquad \operatorname{Arg}\!\left(\frac{z}{w}\right) = \theta - \varphi \pmod{2\pi} = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(w) \pmod{2\pi}.$$

Dato $n \in \mathbb{N}$, calcolando la potenza z^n in forma esponenziale otteniamo

$$z^n = \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{7}$$

e dunque la potenza z^n ha come modulo la potenza del modulo e come argomento il multiplo dell'argomento,

$$|z^n| = r^n = |z|^n\,, \qquad \operatorname{Arg}(z^n) = n\theta \pmod{2\pi} = n\operatorname{Arg}(z) \pmod{2\pi}. \tag{8}$$

Esercizio 4.1. Verifica che se $z \neq 0$ le formule (7) e (8) sono valide anche per ogni esponente intero $n \in \mathbb{Z}$.

Esempio 4.2. Siano $z = 2 - 2\mathrm{i}$ e $w = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$. Calcoliamo zw, z/w, z^6, w^3.

Abbiamo $|z| = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$, $|w| = 2$, $\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{3}$, e dunque

$$\begin{aligned}
z &= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \\
w &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \\
zw &= 2 \cdot 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2(\sqrt{3}+1) + 2(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}, \\
\frac{z}{w} &= \frac{2\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7}{12}\pi} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \\
z^6 &= (2\sqrt{2})^6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{6}{4}\pi} = 512\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi} = 512\mathrm{i}, \\
w^3 &= 2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{\pi}{3}} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -8.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.3. Siano $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ e $w = \sqrt{6} - \sqrt{2}\mathrm{i}$. Calcola z^3w^5 e $\frac{z^2}{w^3}$.

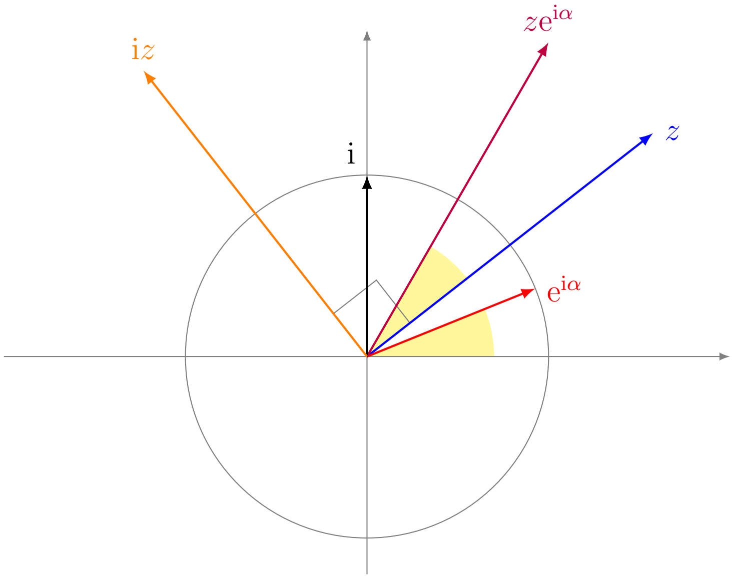
Esercizio 4.4. Dopo avere verificato che la successione dei numeri $\mathrm{e}^{n\mathrm{i}}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ forma una progressione geometrica, calcola il valore della somma $\sum_{n=1}^{2020} \mathrm{e}^{n\mathrm{i}}$.

Esercizio 4.5. Calcola modulo e argomento dei seguenti numeri e riscrivili in forma esponenziale: $z_1 = -\mathrm{e}^2$, $z_2 = \mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$, $z_3 = -\pi\mathrm{i}$, $z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Osservazione 4.6. Sia $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ un numero complesso con modulo r e argomento θ. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Quando moltiplichiamo z per l'esponenziale $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, ovvero per il numero complesso di modulo 1 e argomento α, otteniamo

$$z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)},$$

ovvero il numero complesso con lo stesso modulo di z e con argomento $\theta+\alpha$: l'argomento di z dopo la moltiplicazione con $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ viene incremento dell'angolo α. Variare l'argomento senza cambiare il modulo, geometricamente si traduce nell'effettuare una rotazione intorno all'origine. Dunque in campo complesso moltiplicare un numero per $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ equivale a ruotare di un angolo α il vettore corrispondente al numero. In particolare, siccome $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, abbiamo che moltiplicare per l'unità immaginaria i equivale ad effettuare una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ (ovvero 90 gradi) in senso antiorario.



5 Ulteriori esercizi

Esercizio 5.1. Determina per quali $z \in \mathbb{C}$ sono soddisfatte ciascuna delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z^2) &= \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2, \\
\mathrm{Im}(z^2) &= \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2, \\
\overline{z^2} &= \overline{z}^2, \\
\left|z^2\right| &= |z|^2, \\
\mathrm{Arg}(z^2) &= \big(\mathrm{Arg}(z)\big)^2.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ determina esplicitamente la forma esponenziale e la forma cartesiana del numero complesso z_n individuato dalle seguenti due condizioni:

- l'argomento del quadrato di z_n è uguale a $\frac{1}{n^2}$;
- la parte immaginaria del reciproco del coniugato di z_n è uguale a $\frac{1}{n^2}$.

Esercizio 5.3. Sfruttando la formula per la somma dei termini di una progressione geometrica ricava una formula sintetica per calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i cosidetti *nuclei di Dirichlet* $D_n(\theta)$ definiti da

$$D_n(\theta) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},$$

Verifica che le funzioni $D_n(\theta)$ assumono sempre valori reali e prova a studiarne il grafico al variare di $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.