UNIFE - Corso di laurea triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica

Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 19

Integrali generalizzati in una variabile.

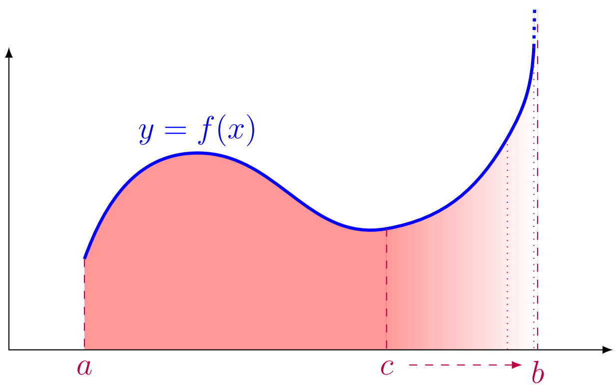
Damiano Foschi

(versione aggiornata il 21 giugno 2021)

Uno dei problemi della definizione di integrale di Riemann è quello di essere applicabile solo a funzioni *limitate* definite su domini *limitati*. Quando la funzione non è limitata (ad esempio se possiede asintotiti verticali) o quando si vuole integrarla su intervalli illimitati, la definizione che abbiamo dato di integrale non è più adeguata. Per estendere il concetto di integrale a funzioni o intervalli non limitati procediamo tramite approssimazioni con casi limitati e l'utilizzo di un passaggio al limite.

1 Integrali generalizzati per funzioni di una variabile

Cominciamo con la definizione di integrali generalizzati verso l'estremo destro dell'intervallo.



Definizione 1.1. Sia $[a, b[$ un intervallo di $\mathbb{R}$ (non necessariamente limitato). Sia $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione (non necessariamente limitata) tale che per ogni $c \in [a, b[$ la restrizione

di f all'intervallo (limitato) $[a,c]$ sia integrabile secondo Riemann. Definiamo *integrale generalizzato* di f su $[a,b[$, e lo indichiamo sempre con $\int_a^b f$, il limite

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se il valore del limite è finito l'integrale generalizzato si dice *convergente*, e la funzione f si dice che è *integrabile in senso generalizzato* su $[a,b[$; se il valore del limite è $+\infty$ o $-\infty$ l'integrale generalizzato si dice *divergente*; se il limite non esiste l'integrale generalizzato non è definito.

Analogamente definiamo integrali generalizzati verso l'estremo sinistro dell'intervallo.

Definizione 1.2. Sia $]a,b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$ (non necessariamente limitato). Sia $f\colon\,]a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione (non necessariamente limitata) tale che per ogni $c \in\,]a,b]$ la restrizione di f all'intervallo (limitato) $[c,b]$ sia integrabile secondo Riemann. Definiamo *integrale generalizzato* di f su $]a,b]$, e lo indichiamo sempre con $\int_a^b f$, il limite

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se il valore del limite è finito l'integrale generalizzato si dice *convergente*, e la funzione f si dice che è *integrabile in senso generalizzato* su $]a,b]$; se il valore del limite è $+\infty$ o $-\infty$ l'integrale generalizzato si dice *divergente*; se il limite non esiste l'integrale generalizzato non è definito.

Osservazione 1.3. Quando f è integrabile secondo Riemann su tutto l'intervallo $[a,b]$ l'integrale generalizzato e l'integrale di Riemann coincidono. Infatti, sappiamo che la funzione integrale $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è continua e dunque per integrali generalizzati verso destra abbiamo

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} F(c) = F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esempio 1.4. Forniamo alcuni esempi di integrali generalizzati, calcolati utilizzando le difinizioni date:

- integrale convergente per una funzione non limitata definita su un intervallo limitato:

$$\int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [x\log(x) - x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -1-\varepsilon\log\varepsilon+\varepsilon = -1;$$

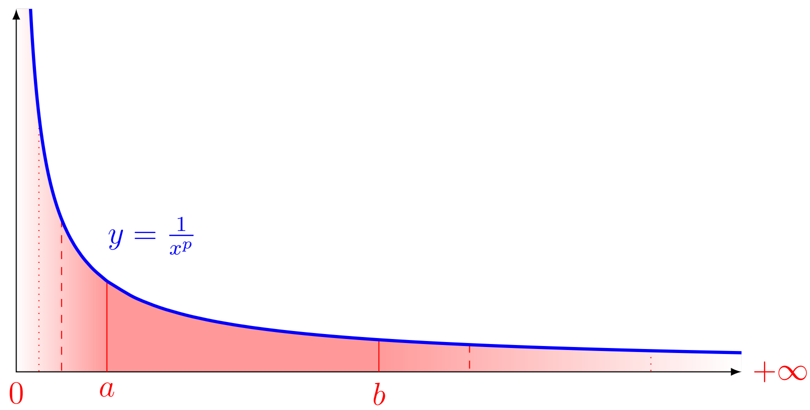
- integrale divergente per una funzione non limitata definita su un intervallo limitato:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \tan x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} [-\log(\cos(x))]_0^b = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} -\log(\cos(b)) = +\infty;$$

- integrale non definito per una funzione non limitata definita su un intervallo limitato:
$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]_\varepsilon^1 = \cos(1) - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \nexists;$$
- integrale convergente per una funzione definita su un intervallo non limitato:
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to+\infty}\int_0^L \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to+\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^L = \lim_{L\to+\infty} -\mathrm{e}^{-L}+1 = 1;$$
- integrale divergente per una funzione definita su un intervallo non limitato:
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{L\to+\infty}\int_1^L\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{L\to+\infty}[\log x]_1^L = \lim_{L\to+\infty}\log L = +\infty;$$
- integrale non definito per una funzione definita su un intervallo non limitato:
$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to+\infty}\int_1^L\frac{\sin(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to+\infty}\int_0^{\log L}\sin t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \lim_{L\to+\infty}[-\cos t]_0^{\log L} = \lim_{L\to+\infty} -\cos(\log L)+1 = \nexists.$$

Esempi importanti di integrali generalizzati, che vengono spesso presi come semplici modelli di paragone per funzioni più complesse tramite confronti di cui parleremo nella prossima sezione, sono dati dagli integrali di funzioni potenza.

Esempio 1.5. Fissato $p > 0$, consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^p}$ definita per $x > 0$. Non è una funzione limitata in quanto $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^p} = +\infty$; si tratta comunque di una funzione continua, e dunque è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[a, b]$ con $0 < a < b < +\infty$. Una primitiva di f è data da $F(x) = \frac{1}{1-p}x^{1-p}$ quando $p \neq 1$ e da $F(x) = \log x$ quando $p = 1$. Abbiamo dunque che
$$\int_a^b \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \frac{b^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}, & \text{se } p \neq 1,\\ \log b - \log a, & \text{se } p = 1,\end{cases}$$



Studiamo l'integrabilità in senso generalizzato su intervalli della forma $]0, b]$, con $b > 0$, sui quali la funzione non è limitata. Siccome il limite $\lim_{a\to 0^+} a^\gamma$ è nullo per $\gamma > 0$ e infinito per $\gamma < 0$, otteniamo che l'integrale generalizzato di f su $]0, b]$ vale

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^b \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \frac{b^{1-p}}{1-p}, & \text{se } p < 1, \\ +\infty, & \text{se } p \geqslant 1. \end{cases}$$

Dunque, l'integrale generalizzato $\int_0^b x^{-p}\,\mathrm{d}x$ è convergente se e solo se $p < 1$ ed è divergente se e solo se $p \geqslant 1$.

Studiamo l'integrabilità in senso generalizzato su intervalli illimitati della forma $[a, +\infty[$, con $a > 0$. Siccome il limite $\lim_{b\to +\infty} b^\gamma$ è nullo per $\gamma < 0$ e infinito per $\gamma > 0$, otteniamo che l'integrale generalizzato di f su $[a, +\infty[$ vale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^p} = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ +\infty, & \text{se } p \leqslant 1. \end{cases}$$

Dunque, l'integrale generalizzato $\int_a^{+\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x$ è convergente se e solo se $p > 1$ ed è divergente se e solo se $p \leqslant 1$.

Esercizio 1.6. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Determina per quali valori di p si ha la convergenza degli integrali generalizzati

$$\int_{-\infty}^a \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}, \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}, \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}, \quad \int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}.$$

Le definizioni che abbiamo dato si riferiscono a situazioni di mancanza di limitatezza intorno ad uno dei due estremi dell'intervallo di integrazione; grazie alla proprietà di additività dell'integrale esse si possono estendere facilmente anche al caso in cui i problemi di mancanza di limitatezza si riscontrano ad entrambi gli estremi, o in qualche punto interno, basta spezzare l'integrale nella somma di più integrali in modo da separare ciascun problema dagli altri. L'integrale totale si considera convergente solo se tutti gli integrali in cui viene decomposto sono convergenti; l'integrale totale si considera divergente quando almeno uno degli integrali in cui viene decomposto è divergente e tutti gli integrali che sono divergenti divergono con lo stesso segno; negli altri casi l'integrale non sarà definito.

Ad esempio, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, possiamo definire l'integrale generalizzato di f su tutta la retta $\mathbb{R}$ decomponendolo nella somma di due integrali generalizzati fatti su due semirette,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to -\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to +\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

dove c è un qualsiasi punto di $\mathbb{R}$. Oppure, se $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua, ma con asintoti verticali sia in a che in b, possiamo definire l'integrale generalizzato di f

su $]a,b[$ decomponendolo nella somma di due integrali generalizzati ottenuti spezzando l'intervallo in un suo punto qualsiasi $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{k\to 0^+} \int_c^{b-k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esempio 1.7. Consideriamo la funzione continua $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ definita su tutto $\mathbb{R}$. Abbiamo

$$\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \log(1+b^2) - \log(1+a^2).$$

L'integrale di f su tutto $\mathbb{R}$ sarebbe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ma

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \log(1+b^2) = +\infty,$$
$$\int_{-\infty}^0 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} -\log(1+a^2) = -\infty.$$

Dunque $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ non ha un valore definito.

Osserviamo che se avessimo fatto il limite dell'integrale su $[a,b]$ facendo tendere simultaneamente all'infinito gli estremi con un rapporto fisso tra i due valori, diciamo ad esempio $a = -L$ e $b = kL$, per un certo $k > 0$ fissato, avremmo ottenuto un valore dell'integrale dipendente da k,

$$\lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{kL} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to+\infty} \log\Big(\frac{1+(kL)^2}{1+L^2}\Big) = 2\log k.$$

Esercizio 1.8. Calcola, usando la definizione, i seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^4+1}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1}, \qquad \int_1^5 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}},$$
$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-6}, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-6}, \qquad \int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} \sin(1/x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$
$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\log x}}, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\log x}}, \qquad \int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.9. Determina per quali valori del parametro p si ha che i seguenti integrali generalizzati convergono:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^p}, \qquad \int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^p}.$$

Esercizio 1.10. Decomponi i seguenti integrali nella somma di due o più integrali generalizzati, in modo che ciascuna componente sia un integrale generalizzato definito con un solo limite ad uno solo dei suoi estremi.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}, \qquad \int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-2x|}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| \mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.11. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, verifica che l'integrale generalizzato

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

è convergente e calcola il suo valore. [Suggerimento: prova prima a considerare il caso con $a = -1$ e $b = 1$.]

Nel seguito l'integrale generalizzato di una funzione f sull'intervallo I con estremi a e b lo indicheremo anche con la notazione $\int_I f := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

L'operazione di integrazione e l'operazione di limite godono entrambe della proprietà di linearità, e quindi l'operazione di integrazione in senso generalizzato, che non è altro che una loro composizione, gode anch'essa della proprietà di linearità: se gli integrali generalizzati $\int_I f$ e $\int_I g$ sono convergenti e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora anche $\int_I (\lambda f + \mu g)$ è convergente e abbiamo

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

2 Criteri del confronto per integrali di funzioni non negative

Quando si ha a che fare con un integrale generalizzato, prima ancora di porsi il problema del calcolo del suo valore è importante riuscire a capire se si tratta di un integrale convergente. Spesso poi capita di non essere in grado di calcolare a mano il valore dell'integrale, e quindi affidiamo il compito a calcolatori elettronici che tramite metodi numerici possono darci ottime approssimazioni del valore degli integrali. Sapere in anticipo che l'integrale diverge ci può risparmiare la fatica del calcolo numerico manuale o automatico. Vediamo ora alcuni criteri che ci permettono di stabilire il carattere di convergenza per integrali generalizzati di funzioni che assumono valori non negativi.

Quando una funzione integrabile f assume solo valori non negativi, ogni sua corrispondente funzione integrale F sarà una funzione monotona non decrescente: se $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in [a, b[$ e $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ allora quando $a \leqslant x_1 \leqslant x_2$ abbiamo

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant F(x_1),$$

in quanto $\int_{x_1}^{x_2} f \geqslant 0$. Dunque l'integrale generalizzato verso l'estremo di destra $\int_a^b f$ è definito da un limite sinistro di una funzione monotona, e abbiamo visto (nel corso del primo semestre) che i limiti laterali di funzioni monotone esistono sempre finiti o infiniti,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) = \sup_{x<b} F(x).$$

Questo significa che l'integrale generalizzato può convergere o divergere, ma non può essere non definito. La stessa cosa si applica in modo analogo per integrali generalizzati verso l'estremo di sinistra. Otteniamo così la seguente proprietà.

Lemma 2.1. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione a valori non negativi definita sull'intervallo I e integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I allora l'integrale generalizzato $\int_I f$ o converge ad un valore finito oppure diverge a $+\infty$ e inoltre abbiamo che*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{[a,b]\subseteq I}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Cominciamo con il primo criterio di convergenza, detto criterio di confronto semplice.

Proposizione 2.2. *Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili su ogni intervallo $[a,b]$ contenuto nell'intervallo I. Supponiamo che*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \quad \forall x \in I. \tag{2}$$

Allora abbiamo che

$$0 \leqslant \int_I f \leqslant \int_I g. \tag{3}$$

In particolare valgono le seguenti implicazioni:

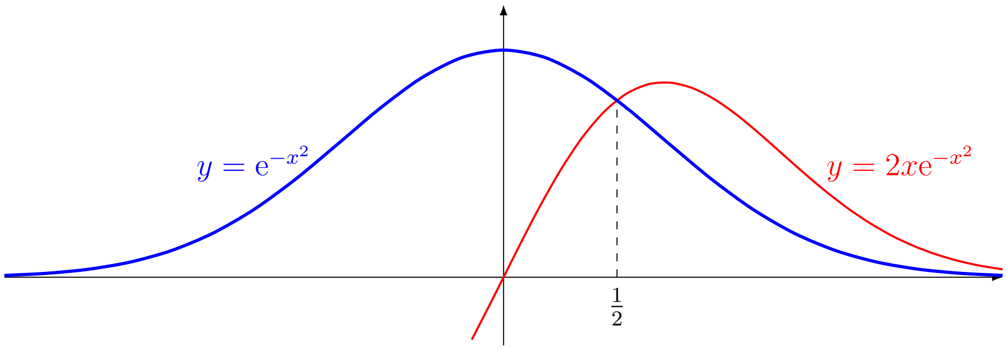
- *se l'integrale generalizzato $\int_I g$ è convergente allora anche $\int_I f$ è convergente;*
- *se l'integrale generalizzato $\int_I f$ è divergente allora anche $\int_I g$ è divergente.*

Dimostrazione. Per l'ipotesi (2) e la proprietà di monotonia dell'integrale abbiamo che

$$0 \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g,$$

per ogni intervallo $[a,b]$ contenuto in I. Dunque, per la formula (1), segue la disuguaglianza (3) per gli integrali generalizzati. In particolare, se $\int_I g$ ha un valore finito anche $\int_I f$ ha un valore finito, mentre se $\int_I f = +\infty$ necessariamente anche $\int_I g = +\infty$. □

Esempio 2.3. Consideriamo l'integrale $I := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ della funzione gaussiana e^{-x^2}, che è sempre positiva. Cerchiamo di stabilire se l'integrale converge, $I < +\infty$, o diverge, $I = +\infty$. La funzione gaussiana e^{-x^2} è una funzione pari, pertanto per simmetria abbiamo $I = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Non è possibile esprimere una primitiva di e^{-x^2} in termini di funzioni elementari, però possiamo provare ad operare dei confronti tra la funzione gaussiana e altre funzioni di tipo esponenziale che siamo in grado di integrare.



Osserviamo che quando $x \geqslant \frac{1}{2}$ abbiamo $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ e dunque applicando il criterio del confronto otteniamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{L\to+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-L} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}.$$

Quindi l'integrale della gaussiana in un intorno di $+\infty$ converge e abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) \leqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} < +\infty,$$

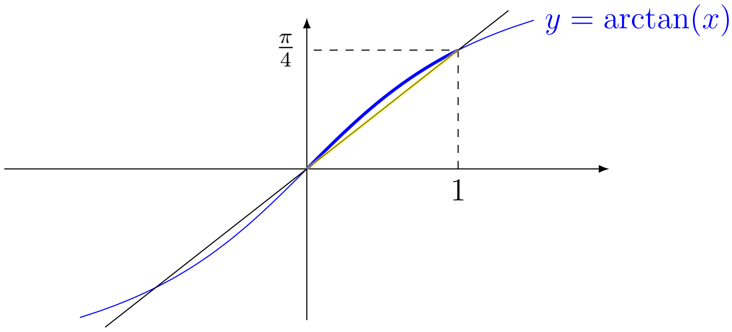
in quanto l'integrale (di Riemann) $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ non ha problemi di convergenza, essendo un integrale definito su un intervallo limitato di una funzione continua e limitata.

Esempio 2.4. Consideriamo l'integrale $I := \int_0^1 \frac{\arctan(1+x^2)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Poiché $0 \leqslant \arctan(1+x^2) < \frac{\pi}{2}$, applicando il criterio del confronto troviamo

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\arctan(1+x^2)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \pi \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = \pi,$$

e dunque l'integrale generalizzato I converge.

Esempio 2.5. Consideriamo l'integrale $I := \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Per $0 \leqslant t \leqslant 1$ abbiamo $\arctan(t) \geqslant \frac{\pi}{4}t$, in quanto nel primo quadrante il grafico dell'arcotangente ha la concavità verso il basso e quindi sta sopra la corda che unisce l'origine con il punto $(1, \pi/4)$; lo si può capire anche dalla seguente figura:



Applicando il criterio del confronto troviamo

$$\int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}} = +\infty,$$

in quanto $3/2 > 1$, e dunque l'integrale generalizzato I diverge.

Esercizio 2.6. Utilizzando la disuguaglianza $\log x \leqslant x-1$, valida per ogni $x > 0$, verifica che gli integrali $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$ e $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$ divergono. Cosa puoi dire degli integrali $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\log x}}$ e $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\log x}}$?

Il criterio di confronto semplice che abbiamo visto può essere raffinato tenedo conto che ciò che determina veramente il carattere di convergenza di un integrale generalizzato è il comportamento asintotico della funzione integranda intorn al punto in cui si verificano i problemi di mancanza di limitatezza (della funzione o del dominio).

Proposizione 2.7 (Criterio del confronto asintotico per integrali generalizzati)**.** *Siano $f, g\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann su ogni intervallo $[a,c]$ con $c \in [a,b[$. Supponiamo che:*

- *$f(x)$ e $g(x)$ sono definitivamente positivi per $x \to b^-$;*
- *$f(x) \approx g(x)$ (asintoticamente equivalenti) per $x \to b^-$.*

Allora gli integrali generalizzati $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ hanno lo stesso carattere di convergenza, ovvero o sono entrambi convergenti, o sono entrambi divergenti.

Dimostrazione. L'equivalenza asintotica ci dice che $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e dunque e abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ il rapporto $f(x)/g(x)$ è definitivamente compreso tra $1-\varepsilon$ e $1+\varepsilon$ per $x \to b^-$. Scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ otteniamo che $\frac{1}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3}{2}$, definitivamente per $x \to b^-$. Siccome $g(x)$ è definitivamente positiva per $x \to b^-$, otteniamo che esisterà un intorno sinistro $[c,b[$ di b sul quale valgono le disuguaglianze

$$0 \leqslant \frac{1}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}g(x), \quad \forall x \in [c,b[$$

Se $\int_c^b g$ converge, per linearità converge anche $\int_c^b \frac{3}{2}g$, e quindi per il criterio del confronto semplice avremo che converge anche $\int_c^b f$. Viceversa se $\int_c^b f$ diverge, per il criterio del confronto semplice avremo che converge anche $\int_c^b \frac{1}{2}g$, e per linearità, moltiplicando per 2, avremo che converge anche $\int_c^b g$. Quindi sull'intervallo $[c,b[$, se converge l'integrale di una delle due funzioni, converge anche l'integrale dell'altra. E dunque, se diverge l'integrale di una delle due funzioni, non può essere convergente l'integrale dell'altra, e quindi trattandosi di funzioni positive dovrà essere un integrale divergente. Per passare poi dall'intervallo $[c,b[$ a tutto l'intervallo $[a,b[$ basta utilizzare la proprietà di additività dell'integrale, $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ ed osservare che gli integrali su $[a,c]$ sono integrali di Riemann, den definiti, senza problemi di convergenza. $\square$

Questo criterio del confronto asintotico è uno strumento molto potente che ci permette in molti casi di stabilire la convergenza di un integrale generalizzato senza dover necessariamente calcolare la primitiva della funzione integranda se riusciamo a descrivere in modo semplice il comportamento di tale funzione negli estremi di integrazione in cui si possono avere problemi di mancanza di limitatezza.

Esempio 2.8. Studiamo l'integrale $\int_0^1 \frac{\arccos x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Per la funzione integranda è una funzione continua, e osserviamo che il suo denominatore si annulla quando $x = 1$, dunque potremmo avere dei problemi di integrabilità intorno all'estremo 1 dell'intervallo di integrazione, infatti applicando la regola di De L'Hopital troviamo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-2x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Per capire se l'integrale converge determiniamo il comportamento asintotico della funzione integranda per $x \to 1^-$. Sempre per la regola di De L'Hopital abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}.$$

Dunque, per $x \to 1^-$ valgono le equivalenze asintotiche

$$\arccos x \approx \sqrt{2}\sqrt{1-x}, \qquad 1-x^2 \approx 2(1-x).$$

Quindi

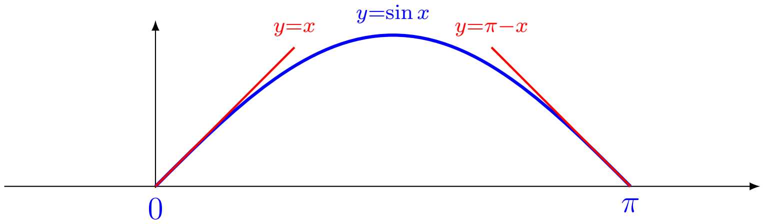
$$\frac{\arccos x}{1-x^2} \approx \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}{2(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}, \quad \text{per } x \to 1^-.$$

Per il criterio del confronto asintotico gli integrali $\int_0^1 \frac{\arccos x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$ hanno lo stesso carattere di convergenza. Il secondo si calcola facilmente e si verifica che è convergente,

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \left[-\sqrt{1-x}\right]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Dunque anche il primo integrale converge.

Esempio 2.9. Determiniamo per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ si ha che l'integrale $\int_0^\pi \frac{(\sin x)^\gamma}{\pi x^2 - x^3}\,\mathrm{d}x$ risulta convergente. Il denominatore si annulla sia per $x = 0$ che per $x = \pi$, dunque possiamo aver problemi di integrabilità in entrambi gli estremi. Spezziamo il dominio di integrazione in due intervalli per separare i problemi. Per studiare il comportamento asintotico della funzione integranda osserviamo che $\sin x \approx x$ per $x \to 0$, mentre $\sin x \approx \pi - x$ per $x \to \pi$.



Abbiamo quindi che

$$\frac{(\sin x)^\gamma}{\pi x^2 - x^3} \approx \begin{cases} \frac{x^\gamma}{x^2(\pi - x)} = \frac{1}{\pi} x^{\gamma - 2}, & \text{per } x \to 0^+, \\ \frac{(\pi - x)^\gamma}{x^2(\pi - x)} = \frac{1}{\pi^2}(\pi - x)^{\gamma - 1}, & \text{per } x \to \pi^-. \end{cases}$$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^\gamma}{\pi x^2 - x^3}\,\mathrm{d}x$ ha lo stesso carattere dell'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2-\gamma}}$ il quale converge se e solo se $2 - \gamma < 1$, ovvero $\gamma > 1$; invece l'integrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(\sin x)^\gamma}{\pi x^2 - x^3}\,\mathrm{d}x$ ha lo stesso carattere dell'integrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(\pi - x)^{1-\gamma}}$ il quale converge se e solo se $1 - \gamma < 1$, ovvero $\gamma > 0$. Mettendo insieme i due pezzi troviamo che l'integrale $\int_0^{\pi} \frac{(\sin x)^\gamma}{\pi x^2 - x^3}\,\mathrm{d}x$ converge se e solo se $\gamma > 1$.

Esempio 2.10. Determiniamo il carattere di convergenza dell'integrale

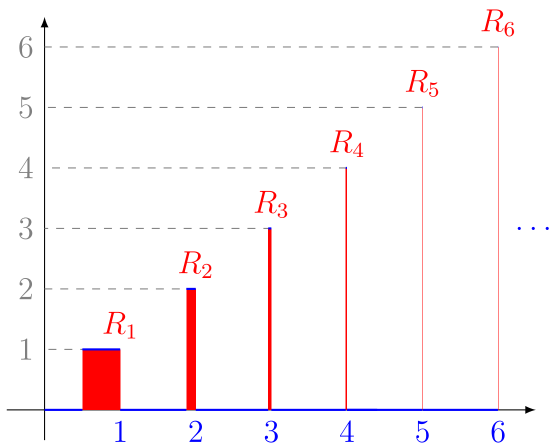
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x + \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}}\,\mathrm{d}x.$$

La funzione integranda è continua e limitata, ma l'intervallo di integrazione è illimitato; potremmo avere problemi di integrabilità per solo per $x \to +\infty$. Studiamo il comportamento asintotico della funzione integranda per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} &\text{Numeratore:} && x + \mathrm{e}^{-x} \approx x, \\ &\text{Denominatore:} && \sqrt{1 + x^2 + x^4} \approx x^2, \\ &\text{Integrando:} && \frac{x + \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}} \approx \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Dunque per il criterio del confronto asintotico il nostro integrale ha lo stesso carattere di convergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ che sappiamo essere divergente.

Osservazione 2.11. Si potrebbe pensare che se $f(x)$ è una funzione a valori non negativi e l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ è convergente allora necessariamente si debba avere che $f(x)$ è infinitesima per $x \to +\infty$. Questa affermazione in generale è falsa. Ecco un esempio di una funzione non negativa che non è nemmeno limitata negli intorni di $+\infty$ e che comunque ha integrale convergente. Consideriamo la funzione $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = k$ quando $x \in \left[k - \frac{1}{k2^k}, k\right]$ per un $k \in \mathbb{N}$ e $f(x) = 0$ altrimenti.



Se calcoliamo il suo integrale su $[0, +\infty[$ otteniamo la somma delle aree di una successione di rettangoli $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dove R_k ha base $\frac{1}{k2^k}$ e altezza k e dunque $\mathcal{A}(R_k) = 2^{-k}$,

$$\int_0^{+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \mathcal{A}(R_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n 2^{-k} = \lim_{n\to+\infty} 1 - 2^{-k} = 1.$$

E quindi l'integrale generalizzato converge, malgrado la funzione integranda non solo non è infinitesima all'infinito, ma nemmeno limitata.

Esercizio 2.12. Dimostra che se $f(x)$ è una funzione *monotona* e l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ è convergente allora necessariamente ha che $f(x)$ è infinitesima per $x \to +\infty$.

Esercizio 2.13. Determina il carattere di convergenza dei seguenti integrali.

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}-\log(2-x)}, \qquad \int_{-1}^1 \frac{|\arcsin x|}{|x|^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{|x|^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{\log(1+x)\sqrt{1-\mathrm{e}^{x-1}}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log(x)\log(\log(x))}, \qquad \int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log(x)\big(\log(\log(x))\big)^2}, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Esercizio 2.14. Considera l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin(x)}{x^p(1+x^3)}\,\mathrm{d}x.$$

Determina per quali valori del parametro $p \in \mathbb{R}$ l'integrale converge ad un valore finito.

Esercizio 2.15. Determina per quali valori di $p \in \mathbb{R}$ il seguente integrale generalizzato è convergente o divergente:

$$\int_0^1 \frac{1}{(\arccos x)^p}\,\mathrm{d}x.$$

[Suggerimento: può essere utile effettuare la sostituzione $\theta = \arccos x$ nell'integrale.]

Esercizio 2.16. Determina per quali valori del parametro $p > 0$ il seguente integrale generalizzato risulta essere convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{2p}+x^{p/2}}\,\mathrm{d}x.$$

---

3 Assoluta convergenza

Nella precedente sezione abbiamo discusso alcuni criteri per stabilire la convergenza di integrali generalizzati di funzioni non negative. Ora esaminiamo il problema di stabilire la convergenza anche nei casi in cui la funzione integranda presenti dei cambi di segno.

Sappiamo (vedi lezione 9) che quando f è integrabile secondo Riemann su un intervallo $[a, b]$ allora anche $|f|$ è integrabile secondo Riemann e inoltre vale la stima

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|\,. \tag{4}$$

Per gli integrali generalizzati non è detto che se l'integrale di f è convergente lo sia anche quello di $|f|$. Vedremo più avanti esempi di funzioni tali che $\int_I f$ converge mentre $\int_I |f|$ diverge. Grazie alla disuguaglianza (4) la convergenza dell'integrale di $|f|$ risulterà essere una condizione più forte della semplice convergenza dell'integrale di f. Introduciamo quindi una nuova nozione di convergenza per gli integrali generalizzati.

Definizione 3.1. Una funzione f definita sull'intervallo I si dice che è *assolutamente integrabile in senso generalizzato* su I quando la funzione $|f|$ è integrabile in senso generalizzato su I, ovvero quando risulta definito e convergente l'integrale $\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

L'assoluta integrabilità implica l'integrabilità (semplice).

Teorema 3.2. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'intervallo I. Se f è assolutamente integrabile in senso generalizzato sull'intervallo I allora f integrabile (semplicemente) in senso generalizzato su I. Inoltre vale la stima*

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|\,. \tag{5}$$

Dimostrazione. Siano f_+ e f_- le funzioni parte positiva e parte negativa di f,

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \quad f_-(x) = \max\{0, -f(x)\}\,, \quad \forall x \in I.$$

Abbiamo che $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$, inoltre valgono le disuguaglianze

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|\,, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|\,, \quad \forall x \in I.$$

Dunque possiamo applicare il criterio del confronto semplice che abbiamo visto nella scorsa lezione e dedurre che se l'integrale $\int_I |f|$ è convergente, allora sono convergenti anche gli integrali $\int_I f_+$ e $\int_I f_-$; inoltre abbiamo

$$0 \leqslant \int_I f_+ \leqslant \int_I |f|\,, \quad 0 \leqslant \int_I f_- \leqslant \int_I |f|\,.$$

Per la proprietà di linearità otteniamo che è convergente anche l'integrale di $f_+ - f_- = f$, e (5) segue da

$$\int_I f = \int_I f_+ - \int_I f_- \leqslant \int_I f_+ \leqslant \int_I |f|\,,$$
$$-\int_I f = -\int_I f_+ + \int_I f_- \leqslant \int_I f_- \leqslant \int_I |f|\,.$$

□

Esempio 3.3. Consideriamo l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$. Siccome il coseno è una funzione limitata che assume valori compresi tra -1 e 1 abbiamo

$$\left|\frac{\cos x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si verifica facilmente che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ è convergente, in quanto $\frac{3}{2} > 1$, e quindi per il criterio del confronto semplice converge anche l'integrale $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right| \mathrm{d}x$. Per il teorema possiamo allora concludere che pure l'integrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ è convergente, in quanto risulta essere assolutamente convergente.

Esempio 3.4. Consideriamo l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ e verifichiamo se è assolutamente convergente. Osserviamo che la funzione $|\sin x|$ è periodica con periodo π. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}\right| \mathrm{d}x &\geqslant \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{1+n\pi}}\,\mathrm{d}x && \text{(perché } 1+x \leqslant 1+n\pi\text{)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+n\pi}} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x && \text{(per l'additività dell'integrale)}\\
&= \frac{n}{\sqrt{1+n\pi}} \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x && \text{(per la periodicità di } |\sin x|\text{)}\\
&= \frac{2n}{\sqrt{1+n\pi}} && \text{(dal calcolo dell'ultimo integrale).}
\end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}\right| \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}\right| \mathrm{d}x \geqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\sqrt{1+n\pi}} = +\infty.$$

Dunque l'integrale non converge assolutamente.

Per studiare la convergenza semplice procediamo per parti, integrando il fattore $\sin x$ e derivando il fattore $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$,

$$\int_0^L \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{\sqrt{1+x}}\right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \frac{-\cos x}{-2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\cos L}{\sqrt{1+L}} - \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\cos x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$$

Passando al limite per $L \to +\infty$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Abbiamo visto nell'esempio precedente che l'integrale di destra è convergente, e dunque converge (semplicemente) anche l'integrale di sinistra.

Esercizio 3.5. Spiega perché pur sapendo che l'integrale di destra in (6) è assolutamente convergente non possiamo concludere che anche l'integrale di sinistra in (6) sia assolutamente convergente.

Esempio 3.6. Vediamo ulteriori esempi dello studio della convergenza semplice e assoluta di alcuni integrali di funzioni oscillanti. Fissiamo $a > 0$.

1. Gli integrali $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ sono assolutamente convergenti (e quindi anche semplicemente convergenti).

   Segue per confronto semplice, dal fatto che $|\cos x|$ e $|\sin x|$ assumono valori compresi tra 0 e 1 e che l'integrale $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sappiamo essere convergente.

2. Gli integrali $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ sono (semplicemente) convergenti.

   Vediamo in dettaglio il primo e lasciamo il secondo come esercizio. Integrando per parti abbiamo
   $$\int_a^L \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin L}{L} - \frac{\sin a}{a} + \int_a^L \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   Passando al limite per $L \to +\infty$ otteniamo
   $$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin a}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   Per il punto precedente, l'integrale a destra è (assolutamente) convergente, dunque risulta convergente anche l'integrale a sinistra.

3. Gli integrali $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ non sono assolutamente convergenti.

   Vediamo in dettaglio il primo e lasciamo il secondo come esercizio. Osserviamo che, siccome $|\cos x|$ assume valori compresi tra 0 e 1, abbiamo
   $$|\cos x| \geqslant (\cos x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2},$$
   dunque per confronto deduciamo che
   $$\int_a^L \left|\frac{\cos x}{x}\right|\mathrm{d}x \geqslant \int_a^L \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\frac{L}{a} - \frac{1}{2}\int_{2a}^{2L} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
   Per quanto visto nel punto precedente, facendo tendere $L \to +\infty$, l'integrale di destra dell'ultima espressione converge ad un valore finito, mentre il termine con il logaritmo diverge, dunque l'integrale $\int_a^L \left|\frac{\cos x}{x}\right|\mathrm{d}x$ diverge.

Esercizio 3.7. Studia la convergenza semplice e/o assoluta dell'integrale $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 3.8. Verifica che gli integrali $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ e $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ convergono semplicemente ma non assolutamente. *(Può esserti d'aiuto studiare gli integrali tra 1 e L tramite la sostituzione $t = x^2$, oppure integrando per parti dopo aver osservato che $\cos(x^2) = 2x\cos(x^2)\cdot\frac{1}{2x}$.)*