Analisi Matematica 1B - Lezione 18

Limiti di funzioni di più variabili

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 18 maggio 2020)

Il concetto di limite di una funzione che abbiamo studiato nel corso del primo semestre si basa sulla nozione di *intorno* di un punto. Quando si lavora in *spazi metrici*, ovvero con insiemi sui quali è possibile misurare distanze tra punti, gli intorni sono facilmente definibili utilizzando palle metriche (intorni sferici). Abbiamo visto nella scorsa lezione come lo spazio $\mathbb{R}^n$ possieda una buona struttura metrica, e questo ci permette di definire limiti per funzioni di più variabili esattamente nello stesso modo in cui abbiamo definito limiti per funzioni di una variabile, con le stesse proprietà fondamentali.

1 Proprietà dei limiti

Siano $n, m \in \mathbb{N}$. Sia $\boldsymbol{f} \colon E \to \mathbb{R}^m$ una funzione definita sull'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1. Sia $\boldsymbol{p}$ un punto di accumulazione per il dominio E di $\boldsymbol{f}$, e sia $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^m$. Diciamo che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ tende al *limite* $\boldsymbol{\ell}$ per $\boldsymbol{x}$ che tende a $\boldsymbol{p}$ quando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \boldsymbol{x} \in E,\ \text{quando } 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \delta \text{ si ha } \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}\| < \varepsilon,$$

e in tal caso scriveremo

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{x} \in E}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell}.$$

Definizione 1.2. Sia $\boldsymbol{p}$ un punto appartenente al dominio E di $\boldsymbol{f}$. Diciamo che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ è *continua* nel punto $\boldsymbol{p}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \boldsymbol{x} \in E,\ \text{quando } \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \delta \text{ si ha } \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})\| < \varepsilon.$$

Quando $\boldsymbol{p}$ è anche un punto di accumulazione per E la continuità di $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{p}$ equivale a dire che il limite coincide con il valore della funzione nel punto,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}).$$

Queste definizioni sono sostanzialmente identiche a quelle che abbiamo usato per funzioni di una variabile, l'unica differenza è che, se nel caso di una variabile per misurare la distanza tra punti usavamo il valore assoluto della differenza, ora per misurare le distanze tra punti in $\mathbb{R}^n$ usiamo la norma euclidea della differenza (che è poi la stessa cosa in quanto per $n = 1$ la norma euclidea coincide con il valore assoluto).

Tutte le proprietà fondamentali che abbiamo già derivato per funzioni di una variabile continuano a valere anche nel caso di più variabili (e si dimostrano allo stesso modo, per cui omettiamo la dimostrazione):

- il limite quando esiste è unico;
- il limite $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell}$ è equivalente al limite $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}\| = 0$.
- Operando delle restrizioni al dominio della funzione il limite non cambia: se $A \subset E$ e $\boldsymbol{p}$ è di accumulazione per A allora
$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{x}\in E}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell} \implies \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{x}\in A}} \boldsymbol{f}|_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell}. \tag{1}$$
- per il limite di funzioni composte vale ancora il risultato che già conosciamo: supponiamo che $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ e $\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{q}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\ell}$, se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{q}$ definitivamente per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$, oppure se $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ è continua in $\boldsymbol{q}$, allora abbiamo $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\ell}$; come conseguenza di ciò abbiamo che composizioni di funzioni continue sono continue;
- se $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \colon E \to \mathbb{R}^m$ e $h \colon E \to \mathbb{R}$ sono funzioni che possiedono limiti per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ allora il limite di una somma è la somma dei limiti, il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti,
$$\begin{aligned} &\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\\ &\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \big(h(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \Big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} h(\boldsymbol{x})\Big)\Big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\Big),\\ &\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \Big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\Big)\cdot\Big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\Big). \end{aligned}$$

La seguente proposizione ci permette di ricondurre il calcolo del limite di una funzione a valori vettoriali al calcolo dei limiti di ciascuna delle sue componenti scalari.

Proposizione 1.3. *Sia $\boldsymbol{f} \colon E \to \mathbb{R}^m$ una funzione a valori vettoriali e siano $f_k \colon E \to \mathbb{R}$ le sue componenti scalari, per $k = 1, \dots, m$, ovvero $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x})\big)$. Sia $\boldsymbol{p}$ un punto di accumulazione per E. Sia $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$. Allora abbiamo*
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell} \iff \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_k(\boldsymbol{x}) = \ell_k,\ \forall k = 1, \dots, m.$$

Dimostrazione. Basta osservare che per le proprietà della norma in $\mathbb{R}^m$ abbiamo
$$\max_{k=1,\dots,m} |f_k(\boldsymbol{x}) - \ell_k| \leqslant \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |f_k(\boldsymbol{x}) - \ell_k|.$$

$\square$

Osservazione 1.4. Mentre sulla retta reale $\mathbb{R}$ ci sono essenzialmente solo due modi per tendere all'infinito, verso $+\infty$ oppure verso $-\infty$, in $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 2$ ci sono innumerevoli direzioni e modalità di fuggire all'infinito, ovvero di allontanarsi da ogni regione limitata. Se consideriamo come intorno di ∞ in $\mathbb{R}^n$ ogni complementare di un insieme limitato, tra cui troviamo i complementari delle palle centrate nell'origine

$$B(\mathbf{0}, r)^c = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \|x\| \geqslant r\},$$

possiamo dare un senso a un limite con valore ∞ anche per funzioni vettoriali, e si ottiene che esso è equivalente a dire che la norma dei valori della funzione tende a $+\infty$,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \infty \iff \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| = +\infty.$$

2 Limiti di funzioni scalari

Concentriamoci dunque sul calcolo del limite per una funzione scalare di più variabili. Per semplificare l'esposizione considereremo solo il caso di una funzione di due variabili, che comunque contiene tutte le peculiarità del caso generale.

Sia $f \colon E \to \mathbb{R}$ una funzione definita sul dominio $E \subseteq \mathbb{R}^2$, sia $(x_\star, y_\star)$ un punto di accumulazione per E e sia $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Supponiamo che ci si possa avvicinare al punto $(x_\star, y_\star)$ muovendosi dentro E lungo la retta orizzontale $y = y_\star$, ovvero che $x_\star$ sia di accumulazione anche per l'insieme

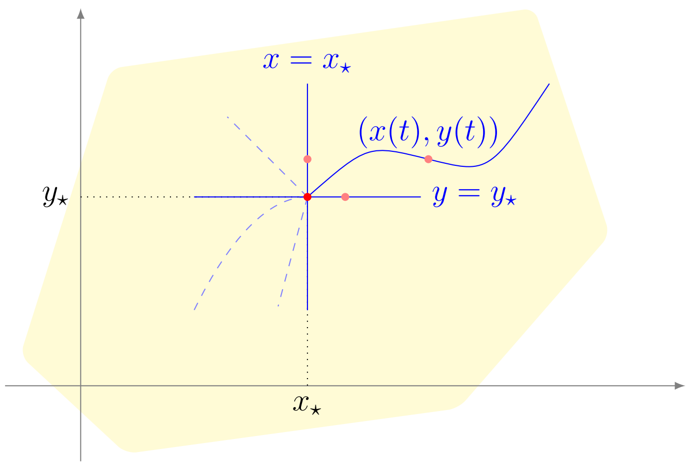
$$E_{y_\star} := \{x \in \mathbb{R} \colon (x, y_\star) \in E\};$$

per la proprietà (1) del limite della restrizione abbiamo che

$$\lim_{(x,y) \to (x_\star, y_\star)} f(x, y) = \ell \implies \lim_{x \to x_\star} f(x, y_\star) = \ell.$$

Dunque se sappiamo che esiste il limite a sinistra, in due variabili, allora il suo valore ℓ si può calcolare tramite il limite a destra, in una variabile. Analogamente se possiamo avvicinarsi al punto $(x_\star, y_\star)$ muovendosi dentro E lungo la retta verticale $x = x_\star$ allora abbiamo

$$\lim_{(x,y) \to (x_\star, y_\star)} f(x, y) = \ell \implies \lim_{y \to y_\star} f(x_\star, y) = \ell.$$



In generale possono esserci molti altri modi di avvicinarsi al punto in cui si sta considerando il limite muovendosi dentro E, possiamo farlo lungo qualsiasi retta o curva contenuta in E: sia $(x(t), y(t))$ la parametrizzazione di una curva con sostegno contenuto in E tale che

$$\lim_{t\to t_\star}\big(x(t), y(t)\big) = (x_\star, y_\star), \qquad \text{con } \big(x(t), y(t)\big) \neq (x_\star, y_\star) \text{ definitivamente per } t \to t_\star,$$

allora per il limite di funzioni composte abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(x_\star,y_\star)} f(x, y) = \ell \implies \lim_{t\to t_\star} f\big(x(t), y(t)\big) = \ell.$$

Dunque una volta che sappiamo che il limite esiste, per calcolarlo possiamo ricondurci (nel modo che ci fa più comodo) al calcolo di un limite in una variabile, avendo a disposizione tutti gli strumenti di calcolo che abbiamo esaminato durante il primo semestre. Rimane il problema di determinare se il limite in più variabili esiste o meno. Se esiste, qualsiasi sia il modo per avvicinarsi al punto i calcoli devono fornirci sempre lo stesso valore. Ciò significa che se calcolando il limite con due modi diversi di avvicinarsi al punto otteniamo due valori diversi allora il limite in più variabili non esiste.

Esempio 2.1. Cerchiamo di capire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Se fissiamo $y = 0$ e calcoliamo il limite per $x \to 0$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1;$$

mentre se fissiamo $x = 0$ e calcoliamo il limite per $y \to 0$ otteniamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} -\frac{y^2}{y^2} = -1.$$

Avendo ottenuto due valori diversi possiamo concludere che il limite (2) non esiste.

Esempio 2.2. Cerchiamo di capire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Se fissiamo $y = 0$ e calcoliamo il limite per $x \to 0$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0;$$

se fissiamo $x = 0$ e calcoliamo il limite per $y \to 0$ otteniamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{2 \cdot 0 \cdot y}{0^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Otteniamo lo stesso valore sia muovendoci in modo parallelo all'asse x che muovendoci in modo parallelo all'asse y. Purtroppo ciò non è sufficiente per assumere che il limite (3) esista. Infatti se ci muoviamo lungo la retta $y = x$, ovvero usando la parametrizzazione $x = t$ e $y = t$ con $t \to 0$, ci riconduciamo al limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{2 \cdot t \cdot t}{t^2 + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{2t^2} = 1,$$

che ha un valore diverso dai precendenti, e dunque il limite (3) non esiste.

Esempio 2.3. Cerchiamo di capire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}. \tag{4}$$

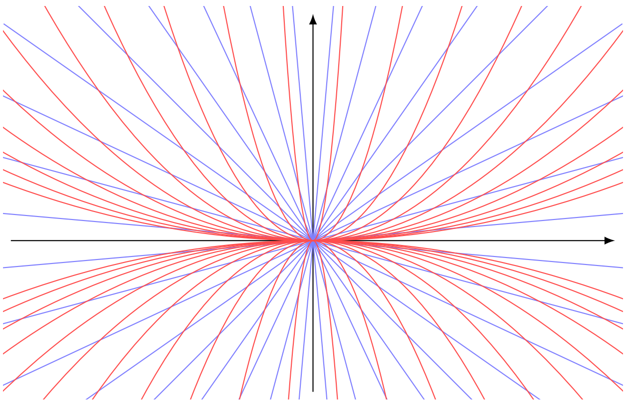
Proviamo a calcolare il limite muovendoci lungo una qualsiasi retta passante per l'origine: Leggendo la funzione lungo la retta di equazione $y = mx$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2(mx)}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx}{x^2 + m^2} = 0,$$

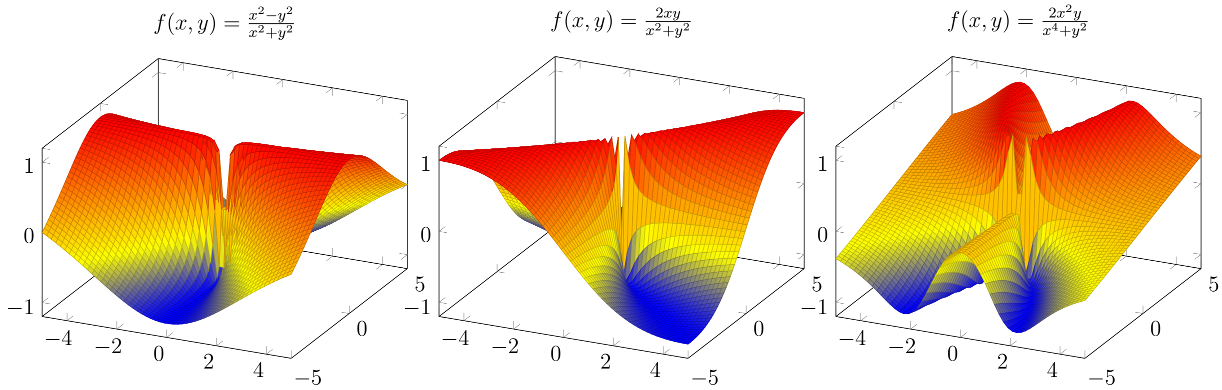
qualsiasi sia il coefficiente angolare m della retta che usiamo per avvicinarci all'origine. Questo calcolo sembra suggerire che il limite (4) abbia valore 0. Se però proviamo ad avvicinarci lungo archi di parabola con equazioni della forma $y = kx^2$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Il valore del limite non è costante, cambia a seconda della parabola scelta, dunque il limite (4) non esiste.



Osservazione 2.4. Le funzioni $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ e $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ (studiate negli esempi 2.1 e 2.2) sono definite per ogni $(x, y) \neq 0$ e sono costanti lungo le rette passanti per l'origine. I loro insiemi di livello sono formati da coppie di tali rette (private dell'origine) e, siccome ognuna di queste rette interseca ogni intorno dell'origine, abbiamo che in **ogni** intorno dell'origine la funzione assume **tutti** i valori della sua immagine (che coincide con l'intervallo $[-1, 1]$) e dunque la funzione non può avvicinarsi definitivamente a nessun valore particolare. Per la funzione $\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ (studiata nell'esempio 2.3) possiamo fare considerazioni analoghe, sostituendo alla famiglia di rette per l'origine la famiglia di parabole della forma $y = kx^2$.



Negli esempi fatti finora abbiamo considerato solo casi in cui il limite in due variabili risultava non esistente. Abbiamo bisogno di un metodo per capire quando il valore trovato con qualche restrizione sul modo di avvicinarci al punto sia effettivamente il valore del limite completo.

Sia $f(x,y)$ una funzione scalare definita in un intorno (forato) del punto $(x_\star, y_\star)$ e sia $\ell \in \mathbb{R}$. La scrittura $\lim_{(x,y)\to(x_\star,y_\star)} f(x,y) = \ell$, in base alla definizione di limite significa che

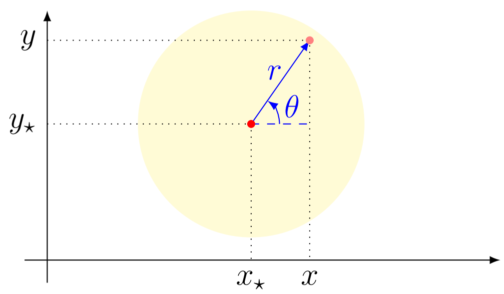
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \neq (x_\star, y_\star), \quad \text{se } \|(x,y) - (x_\star,y_\star)\| < \delta \text{ allora } \bigl|f(x,y) - \ell\bigr| < \varepsilon.$$

La quantità $r := \|(x,y) - (x_\star,y_\star)\|$ è la distanza euclidea del punto (x,y) dal punto $(x_\star, y_\star)$; quando il limite esiste, il modo con cui i valori della funzione si avvicinano al valore del limite è controllato unicamente da tale quantità r, indipendentemente dalla direzione di avvicinamento al punto. Introduciamo allora coordinate polari (r,θ) centrate nel punto $(x_\star, y_\star)$,

$$\begin{cases} x = x_\star + r\cos\theta, \\ y = y_\star + r\sin\theta, \end{cases}$$

dove $\theta \in]-\pi,\pi]$ è l'angolo che il vettore $(x,y) - (x_\star,y_\star)$ forma rispetto alla direzione del semiasse positivo delle ascisse e $r \geqslant 0$ è la norma di tale vettore:

$$r = \sqrt{(x-x_\star)^2 + (y-y_\star)^2} = \|(x,y) - (x_\star,y_\star)\|.$$



Riscriviamo la definizione di limite usando queste nuove coordinate e otteniamo

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \ \forall r > 0, \forall \theta \in]-\pi,\pi], \ \text{se } r < \delta \text{ allora } \bigl|f(x_\star + r\cos\theta, y_\star + r\sin\theta) - \ell\bigr| < \varepsilon.$$

Quando $r < \delta$, allora ε è un maggiorante della quantità $\big|f(x_\star + r\cos\theta, y_\star + r\sin\theta) - \ell\big|$ al variare di $\theta \in]-\pi, \pi]$. Dunque se poniamo

$$F(r) := \sup_{\theta\in]-\pi,\pi]} \big|f(x_\star + r\cos\theta, y_\star + r\sin\theta) - \ell\big|,$$

abbiamo che $r < \delta$ implica $F(r) \leqslant \varepsilon$. La definizione del nostro limite allora si trasforma in

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : \forall r > 0,\ \text{ se } r < \delta \text{ allora } F(r) \leqslant \varepsilon.$$

Essendo $F(r) \geqslant 0$, l'ultima scrittura equivale al limite $\lim_{r\to 0^+} F(r) = 0$. Riassumiamo nella seguente proposizione quanto abbiamo appena ottenuto.

Proposizione 2.5. *Sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione definita sul dominio $E \subseteq \mathbb{R}^2$, sia $(x_\star, y_\star)$ un punto interno ad E, e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Allora il limite in due variabili*

$$\lim_{(x,y)\to(x_\star,y_\star)} f(x,y) = \ell,$$

è equivalente al limite

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{\theta\in]-\pi,\pi]} \big|f(x_\star + r\cos\theta, y_\star + r\sin\theta) - \ell\big| = 0. \tag{5}$$

Per calcolare limiti di funzioni di due variabili utilizzando questa proposizione possiamo seguire i seguenti passi:

1. Per prima cosa determiniamo un candidato per il valore del limite ℓ. Per farlo basta eseguire il limite restringendoci ad una qualsiasi direzione di avvicinamento. Possibilmente scegliendo una direzione lungo la quale il calcolo del limite in una variabile che ne deriva sia il più semplice possibile.

2. Scriviamo la nostra funzione utilizzando coordinate polari centrate nel punto in cui stiamo calcolando il limite,

$$\widetilde{f}(r,\theta) := f(x_\star + r\cos\theta, y_\star + r\sin\theta).$$

3. Per piccoli valori positivi di r definiamo la quantità

$$F(r) := \sup_\theta \left|\widetilde{f}(r,\theta) - \ell\right|.$$

4. Calcoliamo il limite $\lim_{r\to 0^+} F(r)$, se otteniamo zero allora avremo la prova che $\lim_{(x,y)\to(x_\star,y_\star)} f(x,y) = \ell$, altrimenti se il limite di F non è nullo o non esiste allora il limite della funzione di due variabili non esiste.

Esempio 2.6. Proviamo a calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{3x^2 + |y|}.$$

Consideriamo la funzione $f(x,y) = \frac{xy^2}{3x^2+|y|}$ definita per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Abbiamo $f(x,0) = 0$ per ogni $x \neq 0$, dunque $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$, e quindi se il limite in due variabili esiste deve necessariamente essere $\ell = 0$. Introduciamo coordinate polari centrate nell'origine, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Poniamo

$$\widetilde{f}(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta(r\sin\theta)^2}{3(r\cos\theta)^2 + |r\sin\theta|} = \frac{r^2\cos\theta(\sin\theta)^2}{3r(\cos\theta)^2 + |\sin\theta|}.$$

Osserviamo che per ogni valore di θ abbiamo

$$\left|\widetilde{f}(r,\theta) - 0\right| = \frac{r^2\,|\cos\theta|\,|\sin\theta|^2}{3r(\cos\theta)^2 + |\sin\theta|} \leqslant \frac{r^2\,|\cos\theta|\,|\sin\theta|^2}{|\sin\theta|} = r^2\,|\cos\theta|\,|\sin\theta| \leqslant r^2.$$

e dunque

$$0 \leqslant F(r) := \sup_{\theta}\left|\widetilde{f}(r,\theta) - 0\right| \leqslant r^2.$$

Passando al limite per $r \to 0^+$, per le proprietà di confronto dei limiti otteniamo che $\lim_{r\to 0^+} F(r) = 0$; questo ci conferma che il limite in due variabili esiste e vale zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{3x^2+|y|} = 0.$$

Osservazione 2.7. Attenzione a non cadere nell'errore di pensare di poter sempre calcolare il limite direttamente in coordinate polari senza fare prima il passaggio di uniformità rispetto alla direzione θ. Infatti se anche per ogni θ abbiamo che

$$\lim_{r\to 0^+} f(x_\star + r\cos\theta, y_\star + r\sin\theta) = \ell,$$

questo non è sufficiente per concludere la validità del limite $\lim_{(x,y)\to(x_\star,y_\star)} f(x,y) = \ell$.

Basti pensare al limite nell'esempio 2.3. Scriviamo la funzione $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ in coordinate polari centrate in $(0,0)$,

$$\widetilde{f}(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r(\cos\theta)^2\sin\theta}{r^2(\cos\theta)^4 + (\sin\theta)^2},$$

Per ogni θ abbiamo

$$\lim_{r\to 0^+} \widetilde{f}(r,\theta) = \lim_{r\to 0^+} \frac{2r(\cos\theta)^2\sin\theta}{r^2(\cos\theta)^4 + (\sin\theta)^2} = 0,$$

ma come è stato dimostrato nell'esempio 2.3 il limite per (x,y) che tende a $(0,0)$ della funzione $f(x,y)$ non esiste.

Le funzioni scalari assumono valori in $\mathbb{R}$ che è un insieme ordinato. Possiamo quindi fare confronti tra i valori di funzioni scalari. Anche per funzioni scalari di più variabili continuano ad esser valide le proprietà di confronto per i limiti. Supponiamo che per le funzioni scalari f e g abbiamo i limiti

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \ell, \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{x}) = m.$$

Valgono le seguenti proprietà di confronto (che già conosciamo per funzioni di una variabile):

- se $f(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x})$ definitivamente per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ allora $\ell \leqslant m$;
- se $\ell < m$ allora $f(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x})$ definitivamente per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$;
- se $\ell > 0$ allora $f(\boldsymbol{x}) > 0$ definitivamente per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$;
- se $f(\boldsymbol{x}) \leqslant h(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x})$ definitivamente per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ e $m = \ell$ allora $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} h(\boldsymbol{x}) = \ell$.

Osservazione 2.8. Attenzione anche a non complicarsi troppo la vita nel calcolo dei limiti, non è necessario dover utilizzare sempre coordinate polari, a volte osservando bene la funzione che si ha davanti si possono trovare scorciatoie semplici e veloci.

- Quando la funzione di cui si vuole calcolare il limite è continua nel punto in cui si vuole calcolare il limite basta calcolare il valore della funzione nel punto. Ad esempio, la funzione $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ è continua (in quanto funzione razionale) e dunque
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{2^2-3^2}{2^2+3^2} = -\frac{5}{13}.$$
- Quando la funzione ha una struttura di funzione composta in cui sono evidenti le componenti che la compongono conviene studiare separatamente le varie parti e poi combinarle insieme. Ad esempio, calcoliamo il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ per la funzione
$$f(x, y) = \frac{\sin(|x| + y^2)}{|x| + y^2}.$$
Tale funzione può essere vista come composizione di due funzioni,
$$f(x, y) = g(h(x, y)), \qquad g(t) = \frac{\sin t}{t}, \qquad h(x, y) = |x| + y^2.$$
La funzione h è continua in $(0, 0)$ e dunque
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y) = h(0, 0) = |0| + 0^2 = 0,$$
mentre la funzione g è una funzione di una variabile il cui limite in 0 è un limite notevole che conosciamo bene
$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$
Inoltre la funzione $h(x, y)$ è sempre diversa da 0 quando $(x, y) \neq (0, 0)$, possiamo allora applicare la formula per i limiti di funzioni composte e ottenere
$$\lim_{(x,y)} \frac{\sin(|x| + y^2)}{|x| + y^2} = \lim_{(x,y)} g(h(x, y)) = \lim_{t\to 0} g(t) = 1.$$

Esercizio 2.9. Studia i seguenti limiti di funzioni in due variabili.

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{xy}{x+y}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6 + y^4},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + 2y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^{2x+y} - 1}{2x + y},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^{x+2y} - 1}{2x + y}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \log(x^2 + y^2), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}\sin(y)}{|x| + |y|},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \log(1 + x^2 + 3y^2)}{2x^2 + 5y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan \frac{1}{xy}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+y)}{\log(x^2 + y^2)}.$$