Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 16

Integrali doppi e tripli.

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 21 maggio 2021)

1 Domini semplici nel piano $\mathbb{R}^2$

Dopo i rettangoli, i domini più semplici che possiamo considerare quando abbiamo a che fare con integrali in due variabili sono le porzioni di piano comprese tra il grafico di due funzioni definite sullo stesso intervallo.

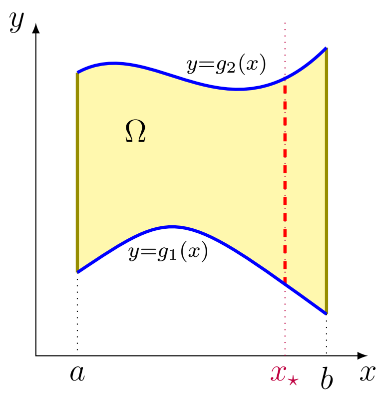
Definizione 1.1. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

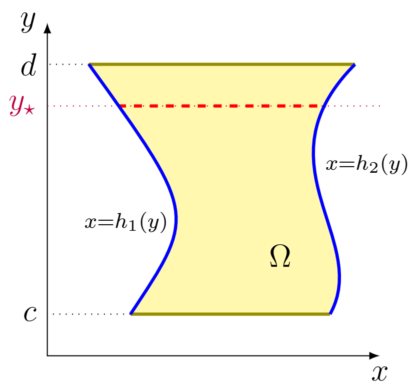
- L'insieme Ω si dice *dominio semplice rispetto all'asse y* quando esistono due funzioni continue $g_1, g_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definite sull'intervallo limitato $[a,b]$, tali che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\right\}. \tag{1}$$

- L'insieme Ω si dice *dominio semplice rispetto all'asse x* quando esistono due funzioni continue $h_1, h_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ definite sull'intervallo limitato $[c,d]$, tali che

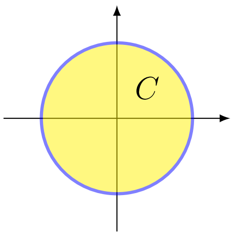
$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\right\}. \tag{2}$$

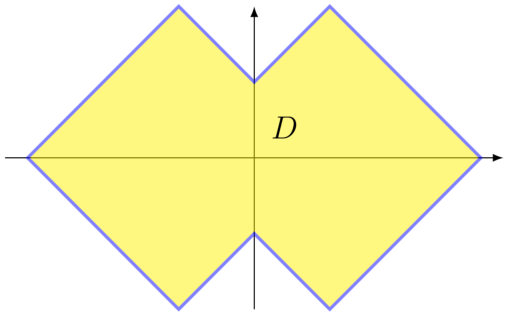




Per capire se una regione limitata del piano Ω è un dominio semplice rispetto ad y, un metodo grafico molto semplice è quello di verificare che per ogni $x_\star$ l'intersezione di Ω con la retta verticale di equazione $x = x_\star$ è non vuota solo per $x_\star$ che varia in un intervallo $[a, b]$ e per tali valori è costituita da un unico segmento verticale; mentre per capire se una regione limitata del piano Ω è un dominio semplice rispetto ad x, basta verificare che per ogni $y_\star$ l'intersezione di Ω con la retta orizzontale di equazione $y = y_\star$ è non vuota solo per $y_\star$ che varia in un intervallo $[c, d]$ e per tali valori è costituita da un unico segmento orizzontale.

Esempio 1.2. Il cerchio unitario $C := \{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ è un dominio semplice rispetto ad entrambi gli assi. L'insieme $D := \{(x, y): |x| + |y| \leqslant 3, |y| \leqslant |x| + 1\}$ è un dominio semplice rispetto ad y ma non è semplice rispetto ad x.





Osservazione 1.3. La frontiera di un dominio semplice nel piano è sempre un insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan, infatti è formata dall'unione di due grafici di funzioni continue e di due segmenti rettilinei, che sono tutti insiemi di misura nulla. Pertanto ogni dominio semplice è sempre un insieme misurabile secondo Peano-Jordan.

Esercizio 1.4. Disegna nel piano cartesiano i seguenti insiemi e determina se si tratta di domini semplici rispetto ad uno od entrambi gli assi; e in caso affermativo rappresentali nella forma (1) o (2) (determinando esplicitamente e funzioni $g_1(x)$ e $g_2(x)$, o $h_1(y)$ e $h_2(y)$, e gli intervalli su cui sono definite).

1. $A := \{(x, y): 0 \leqslant 4y \leqslant 3x,\ x^2 + y^2 \leqslant 25\}$;
2. $B := \{(x, y) \in [0, 3] \times [0, 2]: y \geqslant x^2\}$;
3. $C := \left\{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]: y \leqslant \sqrt{|x|},\ x \leqslant \sqrt{|y|}\right\}$;
4. $D := \{(x, y): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 4,\ (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 4\}$;
5. $E := \{(x, y): 1 \leqslant x + y \leqslant 3,\ 0 \leqslant y - x \leqslant 2\}$;
6. $F := \{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 4,\ |x^2 - y^2| \leqslant 1\}$;
7. $G := \{(x, y): y \geqslant x^2,\ xy \leqslant 1,\ x^2 + y^2 \leqslant 4\}$;
8. $H := \{(x, y): 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

---

2 Integrali doppi su domini semplici

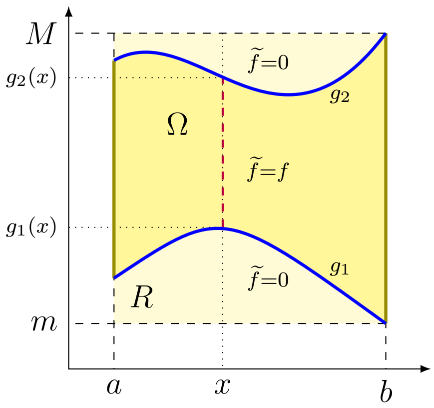
Utilizzando le formule di riduzione per integrali doppi di funzioni definite su rettangoli possiamo scrivere integrali di funzioni definite su domini semplici come integrali iterati integrando una variabile alla volta.

Proposizione 2.1. *Sia Ω un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile.*

- *Se Ω è un dominio semplice rispetto ad y della forma* (1)*, allora*
$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

- *Se Ω è un dominio semplice rispetto ad x della forma* (2)*, allora*
$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y.$$

Dimostrazione. Vediamo il primo caso, con Ω della forma (1). Il dominio Ω è contenuto nel rettangolo $R := [a,b] \times [m,M]$ dove $m := \min_{x\in[a,b]} g_1(x)$, $M := \max_{x\in[a,b]} g_2(x)$.



Sia $\widetilde{f}$ l'estensione a zero di f, abbiamo che $\widetilde{f}(x,y) = 0$ quando $y < g_1(x)$ oppure $y > g_2(x)$, mentre $\widetilde{f}(x,y) = f(x,y)$ quando $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$. Ne segue che per ogni $x \in [a,b]$ abbiamo

$$\int_m^M \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_m^{g_1(x)} \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^{M} \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_m^{g_1(x)} 0\,\mathrm{d}y + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^{M} 0\,\mathrm{d}y = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

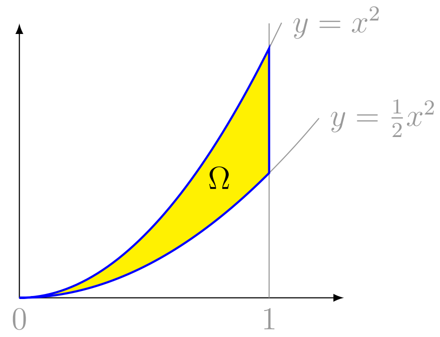
Dunque, utilizzando le formule di riduzione sui rettangoli applicati alla funzione $\widetilde{f}$, troviamo che

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_m^M \widetilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \\ = \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Esempio 2.2. Calcoliamo l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ \frac{1}{2}x^2\leqslant y\leqslant x^2\right\}.$$



Il dominio Ω è semplice sia rispetto all'asse y che all'asse x. Consideriamolo come dominio semplice rispetto a y; in questo caso la variabile x varia nell'intervallo $[0,1]$ e per ogni x fissata la variabile y varia nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}x^2, x^2\right]$; dalle formule di riduzione otteniamo

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Calcoliamo l'integrale interno con la sostituzione $t = y/x$, $y = xt$, $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}t$,

$$\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}x}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan x - \arctan\frac{x}{2}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \arctan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Una primitiva di arcotangente si trova facilmente procedendo per parti,

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2),$$
$$\int \arctan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{2} - \log\left(1+\frac{x^2}{4}\right).$$

Dunque,

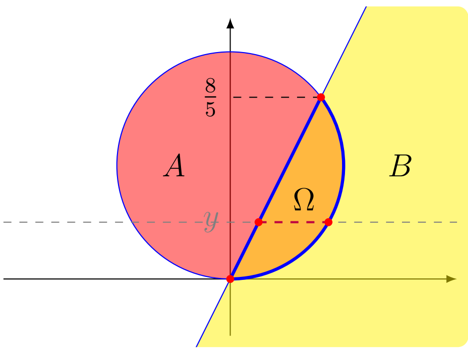
$$\int_0^1 \arctan x \, \mathrm{d}x = \arctan 1 - \frac{1}{2} \log 2, \qquad \int_0^1 \arctan \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \arctan \frac{1}{2} - \log \frac{5}{4}.$$

Prendendo la differenza dei due integrali e semplificando il risultato otteniamo

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \arctan 2 - \frac{\pi}{4} + \log 5 - \frac{5}{2} \log 2.$$

Esempio 2.3. Calcoliamo l'integrale $\iint_\Omega \frac{x \sin y}{y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, dove il dominio $\Omega = A \cap B$ è la porzione del cerchio A di centro $(0,1)$ e raggio 1 che si trova nel semipiano B che sta a destra (o sotto) della retta di equazione $y = 2x$. La circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1 ha equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1$, il cerchio è dato da $A = \{(x,y) \colon x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}$, mentre il semipiano è $B = \{(x,y) \colon y \leqslant 2x\}$, e dunque

$$\Omega = A \cap B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1, \, y \leqslant 2x\right\}.$$



Consideriamo Ω come un dominio semplice rispetto all'asse x. La retta $y = 2x$ interseca la circonferenza $x^2 + (y-1)^2 = 1$ nei punti $(0,0)$ e $(4/5, 8/5)$. I valori di y in Ω variano nell'intervallo $[0, 8/5]$; per ogni $y \in [0, 8/5]$ la variabile x in Ω varia nell'intervallo compreso tra l'ascissa $h_1(y)$ del punto della retta di ordinata y, e l'ascissa $h_2(y)$ del punto della circonferenza di ordinata y che si trova nel primo quadrante. Con semplici calcoli troviamo che

$$h_1(y) = \frac{1}{2} y, \qquad h_2(y) = \sqrt{1 - (y-1)^2}, \qquad y \in \left[0, \frac{8}{5}\right].$$

Integrando in lungo il segmento orizzontale in Ω di ordinata y abbiamo

$$\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{x \sin y}{y} \, \mathrm{d}x = \frac{\sin y}{y} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{1-(y-1)^2}} =$$

$$= \frac{\sin y}{y} \left(\frac{1}{2} \left(1 - (y-1)^2\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} y\right)^2 \right) = \left(1 - \frac{5}{8} y\right) \sin y.$$

E dunque,

$$\iint_\Omega \frac{x\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{8}{5}} \Big(\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{x\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\frac{8}{5}} \Big(1-\frac{5}{8}y\Big)\sin y\,\mathrm{d}y = 1-\frac{5}{8}\sin\frac{8}{5}.$$

Esercizio 2.4. I seguenti integrali iterati si riferiscono a integrali doppi su domini semplici sia rispetto ad y che ad x. Per ciascun integrale determina il corrispondente dominio di integrazione e disegnalo nel piano, poi riscrivi l'integrale scambiando l'ordine di integrazione.

$$\int_0^2\Big(\int_0^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1\Big(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x,\quad \int_{\frac{1}{5}}^1\Big(\int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\frac{1-x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 2.5. Calcola i seguenti integrali doppi:

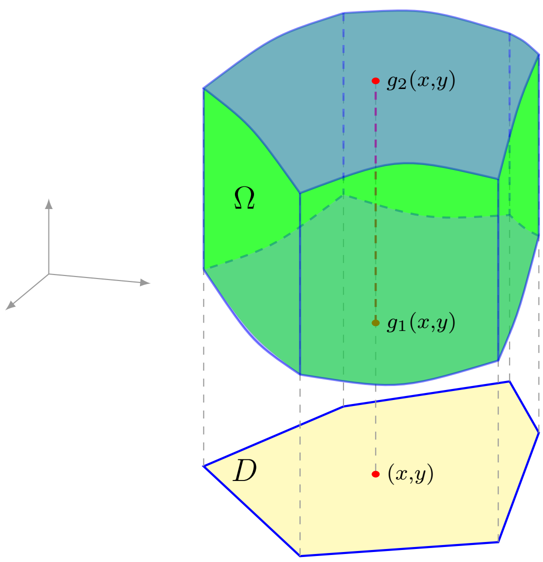
1. $\iint_A (x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove A è il rombo di vertici $(2,2)$, $(1,-1)$, $(-2,-2)$, $(-1,1)$;
2. $\iint_B y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $B := \{(x,y)\colon 0\leqslant y\leqslant \sin x,\ 0\leqslant x\leqslant \pi\}$;
3. $\iint_C y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $C := \{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 2+y-y^2\}$;
4. $\iint_D \frac{x}{1+x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $D := \{(x,y)\colon x\geqslant 0,\ x^2\leqslant y\leqslant x+1\}$;
5. $\iint_E \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $E := \{(x,y)\colon 0\leqslant y^3\leqslant x\leqslant y\}$.
6. $\iint_F (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove F è l'intersezione tra il cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1 e il cerchio di centro $(2,0)$ e raggio 2;
7. $\iint_G x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $G := \{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x^2\}$.

---

3 Domini semplici nello spazio $\mathbb{R}^3$

Definizione 3.1. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$. L'insieme Ω si dice *dominio semplice rispetto all'asse z* in $\mathbb{R}^3$, quando esistono due funzioni continue $g_1, g_2\colon D\to\mathbb{R}$ definite su un insieme semplice D di $\mathbb{R}^2$, tali che

$$\Omega = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon (x,y)\in D,\ g_1(x,y)\leqslant z\leqslant g_2(x,y)\big\}\,. \tag{3}$$



Per capire se una regione limitata dello spazio Ω è un dominio semplice rispetto a z, un metodo grafico molto semplice è quello di verificare che per ogni $(x_\star, y_\star) \in \mathbb{R}^2$ l'intersezione di Ω con la retta verticale di equazione $(x = x_\star, y = y_\star)$ è non vuota solo per $(x_\star, y_\star)$ che varia in un insieme misurabile D del piano x-y e per tali valori è costituita da un unico segmento verticale.

Permutando il ruolo delle tre variabili x, y, z si definiscono in modo analogo i concetti di domini semplici rispetto all'asse y o rispetto all'asse x in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 3.2. La palla $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x - x_\star)^2 + (y - y_\star)^2 + (z - z_\star)^2 \leqslant r^2\}$ di centro $(x_\star, y_\star, z_\star)$ e raggio $r > 0$ è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$. Infatti, se consideriamo il disco $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x - x_\star)^2 + (y - y_\star)^2 \leqslant r^2\}$ in $\mathbb{R}^2$ di centro $(x_\star, y_\star)$ e raggio r e la funzione $g \colon D \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) := \sqrt{r^2 - (x - x_\star)^2 - (y - y_\star)^2},$$

abbiamo $B = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D,\ z_\star - g(x, y) \leqslant z \leqslant z_\star + g(x, y)\}$.

Esempio 3.3. Il cono retto C che ha come base il disco $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ nel piano x-y e altezza $h > 0$ è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$. Infatti, se consideriamo la funzione $g \colon D \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) := \frac{h}{r}\left(r - \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

abbiamo $C = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant g(x, y)\}$.

Esercizio 3.4. Verifica che l'ottaedro che ha come vertici i punti $\pm\vec{\boldsymbol{i}}, \pm\vec{\boldsymbol{j}}, \pm\vec{\boldsymbol{k}}$ è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$.

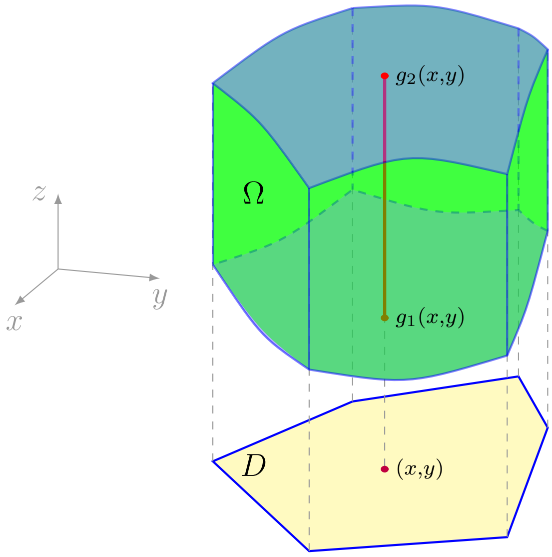
Esercizio 3.5. Sia A il cilindro infinito formato da tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ la cui distanza dall'asse x è minore o uguale a 1; Sia B il cilindro infinito formato da tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ la cui distanza dall'asse y è minore o uguale a 1. Verifica che l'intersezione $A \cap B$ è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$.

---

4 Integrali tripli su domini semplici

4.1 Integrazione per fili

Utilizzando le formule di riduzione per integrali in $\mathbb{R}^3$, possiamo trasformare un integrale triplo su un dominio semplice di $\mathbb{R}^3$ nella combinazione di un integrale in una variabile iterato con un integrale doppio. Per ogni punto (x, y) del dominio di base D integriamo prima lungo il segmento costituito dalla porzione della retta verticale passante per (x, y) che interseca Ω, poi quello che otteniamo lo integriamo al variare di (x, y) su D. Chiamiamo questo procedimento *integrazione per fili*.



Proposizione 4.1 (Integrazione per fili verticali)**.** *Sia Ω un dominio semplice rispetto all'asse z della forma* (3) *e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora*

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ovviamente permutando l'ordine delle variabili possiamo avere formule analoghe anche per integrazioni lungo fili orizzontali su domini semplici rispetto all'asse y o rispetto all'asse x.

Non mettiamo i dettagli della dimostrazione della proposizione 4.1; comunque essa si ottiene facilmente, nello stesso modo con cui abbiamo ottenuto le formule per integrali doppi su domini semplici, dalle formule di riduzione per integrali tripli applicate all'estensione a zero della funzione f integrata su un parallepipedo contenente Ω.

Esempio 4.2. Calcoliamo l'integrale $\iiint_\Omega (x + 2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ sul dominio

$$\Omega := \left\{(x, y, z)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\right\}.$$

Si tratta di un dominio semplice rispetto all'asse z della forma (3) con

$$D = [0, 1] \times [0, 2], \quad g_1(x, y) = 0, \quad g_2(x, y) = x^2 + y^2.$$

Procediamo integrando per fili verticali, fissiamo $(x, y) \in D$ e integriamo rispetto a z che varia tra $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$,

$$F(x,y) := \int_0^{x^2+y^2} (x + 2z)\,\mathrm{d}z = \left[xz + z^2\right]_{z=0}^{z=x^2+y^2} = x(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 = \\ = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^3 + xy^2.$$

Poi integriamo ciò che abbiamo ottenuto sul rettangolo D,

$$\iiint_\Omega (x + 2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^3 + xy^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\ = \int_0^1 \left(2x^4 + \frac{16}{3}x^2 + \frac{32}{5} + 2x^3 + \frac{8}{3}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5} + \frac{16}{9} + \frac{32}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{937}{90}.$$

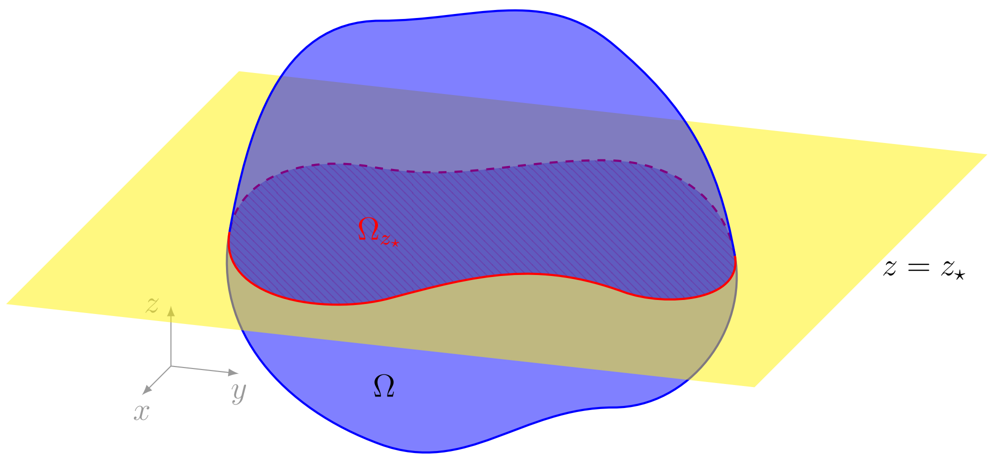
4.2 Integrazione per strati

In alternativa all'integrazione per fili, sempre utilizzando le formule di riduzione per integrali in $\mathbb{R}^3$, possiamo trasformare un integrale triplo su un dominio semplice di $\mathbb{R}^3$ nella combinazione di un integrale doppio iterato con un integrale in una variabile. Per ogni $z \in \mathbb{R}$ integriamo prima rispetto ad x e y sulla regione piana ottenuta intersecando il dominio Ω con il piano orizzontale ad altezza z, poi ciò che otteniamo lo integriamo al variare di z in $\mathbb{R}$. Chiamiamo questo procedimento *integrazione per strati*.

Definizione 4.3. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e sia $z_\star \in \mathbb{R}$. Definiamo *strato orizzontale* di Ω corrispondente all'altezza $z_\star$ il sottoinsieme $\Omega_{z_\star}$ di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$\Omega_{z_\star} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x, y, z_\star) \in \Omega\right\}.$$

Esso corrisponde alla proiezione sul piano x-y della sezione di Ω ottenuta intersecando Ω con il piano di equazione $z = z_\star$.



Quando Ω è un dominio semplice rispetto all'asse z della forma (3) allora il suo strato Ω_z è diverso dal vuoto se solo se $z \in [m, M]$ dove

$$m := \min_{(x,y)\in D} g_1(x,y), \qquad M := \max_{(x,y)\in D} g_2(x,y). \tag{4}$$

Proposizione 4.4 (Integrazione per strati orizzontali). *Sia Ω un dominio semplice rispetto all'asse z della forma (3) e siano m e M i valori definiti in (4). Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Se per ogni $z \in [m, M]$ lo strato Ω_z è misurabile e la funzione $(x,y) \mapsto f(x,y,z)$ è integrabile su Ω_z, allora*

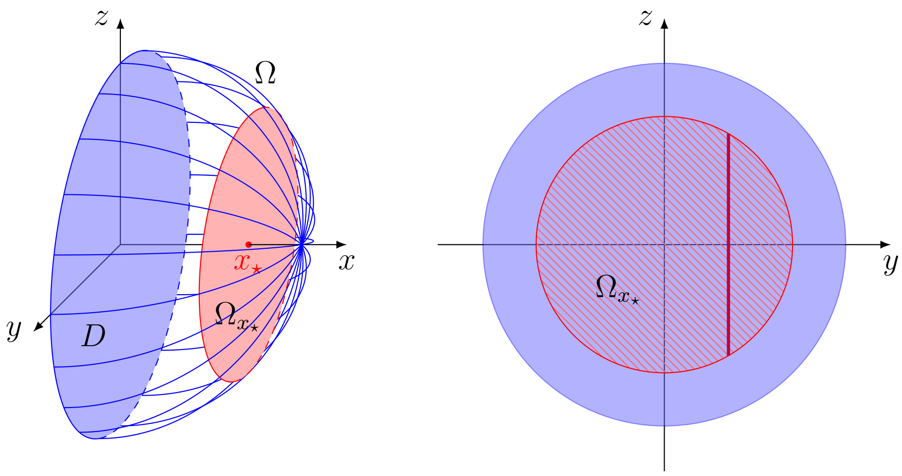
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_m^M \Big(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z.$$

Ovviamente permutando l'ordine delle variabili possiamo avere formule analoghe anche per integrazioni per strati verticali su domini semplici rispetto all'asse y o rispetto all'asse x.

Anche per la dimostrazione della proposizione 4.4 omettiamo i dettagli; comunque essa si ottiene facilmente, nello stesso modo con cui abbiamo ottenuto le formule per integrali doppi su domini semplici, dalle formule di riduzione per integrali tripli applicate all'estensione a zero della funzione f integrata su un parallepipedo contenente Ω.

Esempio 4.5. Calcoliamo l'integrale $\iiint_\Omega (x+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ sul dominio

$$\Omega := \left\{(x,y,z)\colon x \geqslant 0, x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\right\}.$$



Si tratta della metà della palla di centro l'origine e raggio 2 che si trova nel semispazio $x \geqslant 0$. Consideriamo Ω come un dominio semplice rispetto a x. Procediamo integrando per strati. Per ogni $x \in [0,2]$ lo strato verticale Ω_x di Ω parallelo al piano y-z è un cerchio di raggio $\sqrt{4-x^2}$,

$$\Omega_x = \left\{(y,z)\colon y^2+z^2 \leqslant 4-x^2\right\}.$$

Integrando sullo strato troviamo

$$F(x) := \iint_{\Omega_x} (x + 2z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = x \iint_{\Omega_x} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2 \iint_{\Omega_x} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Il primo dei due integrali a destra coincide con l'area del cerchio Ω_x,

$$\iint_{\Omega_x} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathcal{A}(\Omega_x) = \pi(4 - x^2).$$

Il secondo integrale invece è nullo per questioni di simmetria, infatti ogni retta verticale che interseca il disco Ω_x determina un intervallo per la variabile z simmetrico rispetto all'origine, e la funzione $z \mapsto z$ è dispari, per tanto il suo integrale è sempre nullo su ogni intervallo simmetrico rispetto all'origine,

$$\iint_{\Omega_x} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 0\,\mathrm{d}y = 0.$$

Troviamo così che l'integrale sullo strato vale $F(x) = \pi x(4 - x^2)$. Rimane da calcolare l'integrale rispetto a x,

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x + 2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (4 - x^2)2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^4 (4 - s)\,\mathrm{d}s = \\ = \frac{\pi}{2}\left[4s - \frac{1}{2}s^2\right]_{s=0}^{s=4} = 4\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 4.6. Calcola i seguenti integrali tripli:

1. $\iiint_A \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, dove $A := \{(x, y, z) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ -1 \leqslant z \leqslant 4\}$;

2. $\iiint_B (x + y + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, dove B è il tetraedro di vertici $\mathbf{0}$, $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$;

3. $\iiint_C z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, dove C è la regione che si ottiene intersecando la palla interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con la regione di spazio che trova sopra al paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$;

4. $\iiint_D 3xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, dove $D := \{(x, y, z) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant x,\ 0 \leqslant y \leqslant xz\}$.

Esercizio 4.7. Sia A il cilindro infinito formato da tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ la cui distanza dall'asse x è minore o uguale a 1; Sia B il cilindro infinito formato da tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ la cui distanza dall'asse y è minore o uguale a 1. Considera la regione $\Omega := A \cap B$. Per ogni $z \in [-1, 1]$, descrivi in dettaglio come è fatto lo strato orizzontale Ω_z.

---

5 Integrali su domini che non sono semplici

Quando dobbiamo calcolare un integrale su un dominio che non è semplice possiamo provare a decomporre il dominio in più parti, in modo che ciascuna parte sia un dominio semplice e sia essenzialmente disgiunta dalle altre, poi utilizzando la proprietà di additività dell'integrale scriviamo l'integrale su tutto il dominio come somma di integrali su ciascuna della parti.

Proposizione 5.1 (Proprietà di additività)**.** *Siano A e B due domini semplici senza punti interni in comune, $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \varnothing$. Sia f una funzione integrabile su $A \cup B$. Allora abbiamo*

$$\int_{A\cup B} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_B f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Dimostrazione. Sia R un rettangolo che contiene $A \cup B$ e sia $\widetilde{f}$ l'estensione a zero di f su R. Poiché A e B non hanno punti interni in comune, l'intersezione $A \cap B$ contiene solo punti che stanno sulla frontiera di A o di B,

$$A \cap B \subseteq \partial A \cup \partial B,$$

ma le frontiere di A e B sono insiemi di misura nulla, quindi anche $A \cap B$ ha misura nulla, ne segue che $\int_{A\cap B} f = 0$. Siccome $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$, abbiamo

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f = \int_A f + \int_B f.$$

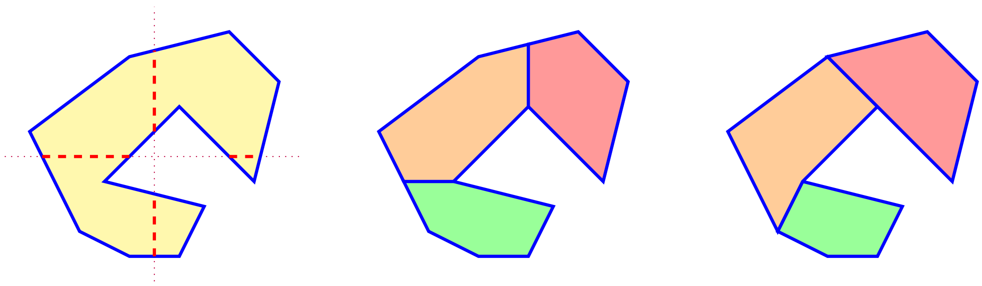
□

La proposizione (5.1) si estende in modo naturale anche al caso di una unione di un qualsiasi numero finito di insiemi che siano a due a due essenzialmente disgiunti (ovvero senza punti interni in comune).

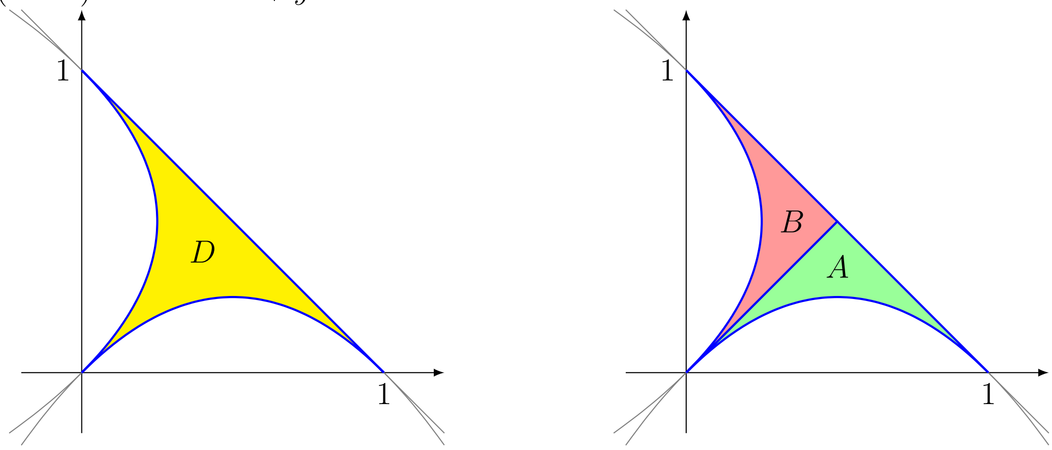
Definizione 5.2. Diciamo che un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^n$ è *semplicemente decomponibile* quando può essere decomposto nell'unione di un numero finito di domini semplici Ω_k essenzialmente disgiunti, nel senso che non possiedono punti interni in comune,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} \Omega_k, \qquad \mathring{\Omega}_j \cap \mathring{\Omega}_k = \varnothing, \quad \text{se } j \neq k.$$

Esempio 5.3. Il dominio rappresentato nella seguente figura non è semplice né rispetto ad y e né rispetto a x, ma è semplicemente decomponibile: è possibile decomporlo nell'unione di tre domini semplici essenzialmente disgiunti, tale decomposizione non è unica.



Esempio 5.4. Calcoliamo l'integrale $\iint_D \frac{y}{1+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove D è la regione nel primo quadrante del piano cartesiano compresa tra le parabole di equazione $y = x(1-x)$ e $x = y(1-x)$ e la retta $x+y=1$.



Il dominio D non è semplice, ma possiamo suddividerlo nell'unione dei due domini semplici A e B tagliandolo con la retta $y = x$,

$$\begin{aligned}
D &:= \{(x,y) \colon y \geqslant x(1-x),\ x \geqslant y(1-y),\ x+y \leqslant 1\}\,,\\
A &:= \{(x,y) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x(1-x) \leqslant y \leqslant \min\{x, 1-x\}\}\,,\\
B &:= \{(x,y) \colon 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y(1-y) \leqslant x \leqslant \min\{y, 1-y\}\}\,.
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale su A integrando prima rispetto ad y,

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{y}{1+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\Big(\int_{x(1-x)}^{\min\{x,1-x\}} y\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac12} \frac{1}{1+x}\Big(\int_{x(1-x)}^{x} y\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac12}^1 \frac{1}{1+x}\Big(\int_{x(1-x)}^{1-x} y\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac12} \frac{1}{1+x}\Big(\frac12 x^2 - \frac12 x^2(1-x)^2\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac12}^1 \frac{1}{1+x}\Big(\frac12 (1-x)^2 - \frac12 x^2(1-x)^2\Big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac12 \int_0^{\frac12} \frac{2x^3 - x^4}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac12 \int_{\frac12}^1 (1-x)^3\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac58 - \frac32 \log\frac32.
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale su B integrando prima rispetto ad x,

$$
\begin{aligned}
\iint_B \frac{y}{1+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 y\Big(\int_{y(1-y)}^{\min\{y,1-y\}} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} y\Big(\int_{y(1-y)}^{y} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^1 y\Big(\int_{y(1-y)}^{1-y} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} y\big(\log(1+y)-\log(1+y-y^2)\big)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^1 y\big(\log(2-y)-\log(1+y-y^2)\big)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} y\log(1+y)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^1 y\log(2-y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 y\log(1+y-y^2)\,\mathrm{d}y = \\
&= \dots = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{4}\log\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Per additività abbiamo

$$
\iint_D \frac{y}{1+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A \frac{y}{1+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_B \frac{y}{1+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{9}{8} - \frac{\sqrt{5}}{4}\log\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}.
$$

Esercizio 5.5. Dopo averli rappresentati graficamente nel piano, decomponi i seguenti domini come unione di un numero finito di domini semplici a due a due essenzialmente disgiunti:

- $A := \{(x,y)\colon (x-1)^2+y^2 \geqslant 1,\ (x-2)^2+y^2 \leqslant 4\}$;
- $B := \{(x,y)\colon 1 \leqslant |x|+|y| \leqslant 2\}$;
- $C := \{(x,y)\colon\ |y| \leqslant 1+x^2,\ x+y^2 \geqslant 0,\ |x| \leqslant 4-y^2\}$.

Esercizio 5.6. Calcola i seguenti integrali definiti sui domini semplicemente decomponibili definiti nel precedente esercizio:

$$
\iint_A x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \qquad \iint_B \frac{1}{4+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \qquad \iint_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
$$
