Analisi Matematica 1B - Lezione 16

Funzioni di più variabili

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 16 maggio 2020)

1 Esempi di funzioni di più variabili

Nel corso del primo semestre abbiamo studiato funzioni di una variabile reale a valori reali, ovvero il cui dominio e codominio erano sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Nella realtà molte grandezze necessitano di più di un parametro per essere descritte, possono essere rappresentate quindi da funzioni di più di una variabile. Ad esempio:

- Un cilindro circolare con raggio di base r e altezza h ha un volume dato da $V = \pi r^2 h$; tale volume V è una funzione a valori positivi delle due variabili positive r e h,
  $$V\colon]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to]0,+\infty[, \quad V(r,h) := \pi r^2 h.$$
  Il dominio di V è contenuto in $\mathbb{R}^2$ e il codominio in $\mathbb{R}$.

- La rotta percorsa da una nave nell'oceano può essere descritta indicando per ogni istante t del suo viaggio gli angoli di latitudine $\lambda \in [-\pi,\pi]$ e di longitudine $\varphi \in [0,2\pi[$ della sua posizione P sul globo terrestre, tale posizione è quindi una funzione che dipende da una variabile reale e assume due valori reali,
  $$P\colon [t_1,t_2] \to [-\pi,\pi] \times [0,2\pi[, \quad P(t) := \big(\lambda(t),\varphi(t)\big),$$
  dove t_1 è l'istante in cui il viaggio è iniziato e t_2 è l'istante in cui il viaggio è finito. Il dominio di P è contenuto in $\mathbb{R}$ e il codominio in $\mathbb{R}^2$.

- Per descrivere la dinamica di un fluido che occupa una regione Ω dello spazio possiamo utilizzare una funzione
  $$\vec{V}\colon \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^3,$$
  che indichi il vettore velocità $\vec{V}(t,x,y,z)$ relativa alla particella di fluido che nell'istante di tempo t si trova nella posizione (x,y,z) di Ω. Il dominio di $\vec{V}$ è contenuto in $\mathbb{R}^4$ e il codominio è $\mathbb{R}^3$.

- La funzione esponenziale in campo complesso associa ad ogni numero complesso z il valore e^z. Se identifichiamo il piano complesso $\mathbb{C}$ con il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, possiamo considerare tale funzione come una funzione il cui dominio e codominio coioncidono con $\mathbb{R}^2$,

$$\exp\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \exp(x,y) := \big(\mathrm{R}e(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}), \mathrm{I}m(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y})\big) = \big(\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y)\big).$$

È importante dunque studiare funzioni che possono dipendere da più variabili reali e che possono assumere più valori reali, ovvero funzioni della forma

$$\boldsymbol{f}\colon A \to B, \qquad A \subseteq \mathbb{R}^n, \quad B \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

con $n, m \in \mathbb{N}$. Quando $m = 1$ la funzione si dice *funzione scalare*. Con un piccolo abuso di notazioni, indicheremo vettori di $\mathbb{R}^n$ sia come vettori colonna che come vettori riga

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ è la funzione indicata in (1) essa è descritta da m funzioni scalari di n variabili,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Il grafico di $\boldsymbol{f}$ risulta essere un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+m}$,

$$\text{grafico}(\boldsymbol{f}) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\colon \boldsymbol{x} \in A\} \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m},$$

ed in generale risulta difficile darne una rappresentazione facilmente visualizzabile. Vediamo di considerare alcuni casi particolari, tramite alcuni esempi.

2 Funzioni scalari

I concetti di base che abbiamo per funzioni di una variabile si applicano anche per funzioni di più variabili. Consideriamo il caso di una funzione scalare $f\colon E \to \mathbb{R}$ definita su un dominio $E \subseteq \mathbb{R}^n$. L'immagine di f è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ formato dai valori che $f(\boldsymbol{x})$ può assumere al variare di $\boldsymbol{x}$ in E,

$$f(E) := \{f(\boldsymbol{x})\colon \boldsymbol{x} \in E\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Il grafico di f è invece l'insieme dei punti della forma $(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$ al variare di $\boldsymbol{x} \in E$, ed è un sottoinsieme di $E \times \mathbb{R}$,

$$\text{grafico}(f) := \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))\colon \boldsymbol{x} \in E\} \subseteq E \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Per capire come è fatta la funzione può essere utile studiare anche come sono fatti i suoi insiemi di livello, o di sopralivello: se $v \in \mathbb{R}$, l'*insieme di livello* di f corrispondente al valore v è dato dalla controimmagine del singoletto $\{v\}$ tramite f,

$$f^{-1}(\{v\}) = \{\boldsymbol{x} \in E \colon f(\boldsymbol{x}) = v\} \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n.$$

mentre l'*insieme di sopralivello* di f corrispondente al valore v è dato dalla controimmagine dell'intervallo $]v, +\infty[$ tramite f,

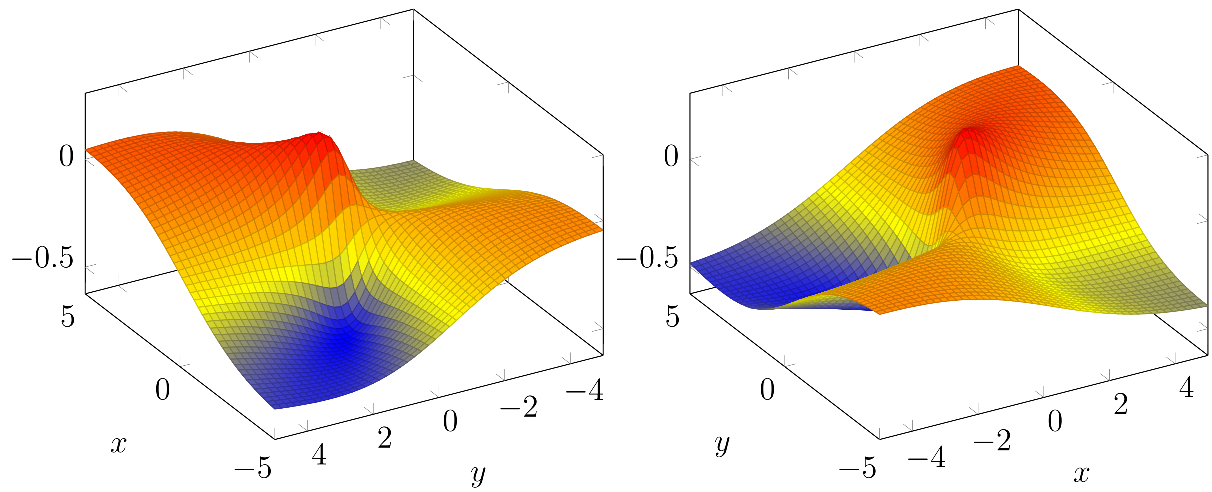
$$f^{-1}\big(]v, +\infty[\big) = \{\boldsymbol{x} \in E \colon f(\boldsymbol{x}) > v\} \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Nel caso di funzioni scalari di due variabili il grafico è un sottoinsieme dello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, se la funzione è sufficientemente regolare tale grafico è rappresentato da una superficie bidimensionale, mentre gli insiemi di livello sono in genere delle curve.

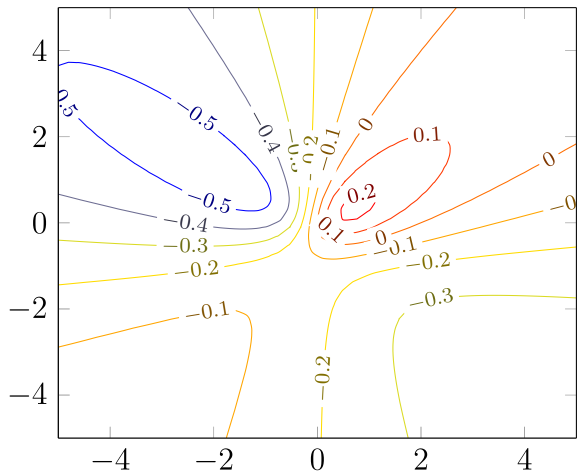
Esempio 2.1. Consideriamo la funzione $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := \frac{2x - x^2 - y^2 + 2xy}{3 + 4x^2 + 5y^2}.$$

Possiamo visualizzare porzioni del suo grafico tramite assonometrie create al calcolatore.



Oppure possiamo dare un'idea di come varia la funzione disegnando alcune sue curve di livello.



Per la funzione in questione le curve di livello v sono descritte implicitamente dall'equazione

$$\frac{2x - x^2 - y^2 + 2xy}{3 + 4x^2 + 5y^2} = v,$$

e in questo caso risultano essere tutte delle coniche di equazione

$$(4v + 1)x^2 + (5v + 1)y^2 - 2xy - 2x + 3v = 0.$$

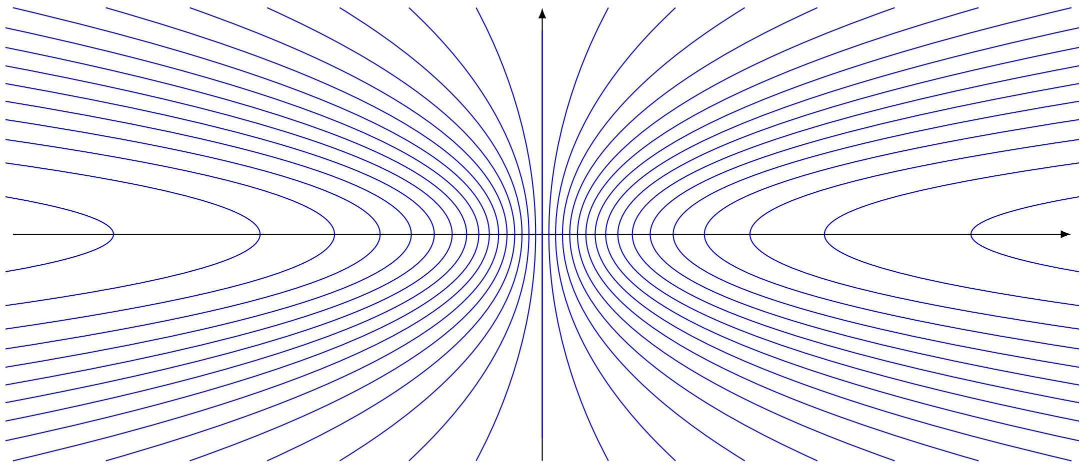
Esempio 2.2. In casi non troppo complicati lo studio delle curve di livello per una funzione scalare di due variabili può essere ricondotto allo studio di una famiglia di funzioni in una variabile. Determiniamo le curve di livello della funzione

$$f(x, y) := \arctan \frac{x}{1 + y^2}.$$

Osserviamo subito che i valori che la funzione f può assumere, essendo dei valori della funzione arcotangente, devono necessariamente essere compresi nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sia $v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la curva di livello v per f è descritta dall'equazione $f(x, y) = v$, da cui ricaviamo

$$x = (\tan v)(1 + y^2).$$

Questa equazione descrive una famiglia di parabole con asse coincidente con l'asse delle ascisse, vertice in $(\tan v, 0)$, con la concavità verso destra per $v > 0$ e verso sinistra per $v < 0$, con un'apertura che si stringe al crescere di v in valore assoluto.



Esercizio 2.3. Descrivi come sono fatte le linee di livello per le seguenti funzioni di due variabili:

1. $f(x, y) = 2 - 3x + 4y$;
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
3. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$;
4. $f(x, y) = \arctan \frac{1+x^2}{1+y^2}$;
5. $f(x, y) = \cos(y - x^2)$;
6. $f(x, y) = |x| + |y|$.

Come abbiamo già visto visto nel primo semestre per le funzioni di una variabile, anche per funzioni numeriche di n variabili spesso il dominio non viene esplicitamente descritto, e si sottointende come dominio della funzione il suo *dominio naturale*, ovvero l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}^n$ per i quali la funzione risulta essere ben definita dalle formule che la descrivono. Solitamente le condizioni che determinano la buona definizione della funzione si traducono in un sistema di disequazioni che coinvolgono le n variabili da cui dipende la funzione. Quando $n = 2$ le soluzioni di qquesto sistema possono essere rappresentate graficamente come regioni del piano cartesiano.

Esempio 2.4. Determiniamo il dominio naturale della funzione

$$f(x, y) := \sqrt{\frac{1 + x - y^2}{1 - x - y}}.$$

Le condizioni per poter definire il valore di f sono determinate dal fatto che il denominatore della frazione deve essere diverso da zero e l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, ovvero dal sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 1 - x - y \neq 0, \\ \dfrac{1 + x - y^2}{1 - x - y} \geqslant 0. \end{cases}$$

Per risolvere tale sistema, consideriamo separatamente i due polinomi che compaiono al numeratore e al denominatore della frazione dentro la radice, e studiamone il segno nel piano cartesiano.

Il polinomio di primo grado $Q(x, y) := 1 - x - y$ si annulla lungo i punti della retta di equazione

$$y = 1 - x. \tag{3}$$

Si tratta della retta che passa per i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$; tale retta divide il piano cartesiano in due semipiani, su ciascuno dei quali il polinomio non cambia segno; nel semipiano che contiene l'origine avremo $Q(x, y) > 0$, in quanto $Q(0, 0) = 1 > 0$, nell'altro semipiano (che contiene il punto $(1, 1)$) avremo $Q(x, y) < 0$, in quanto $Q(1, 1) = -1 < 0$.

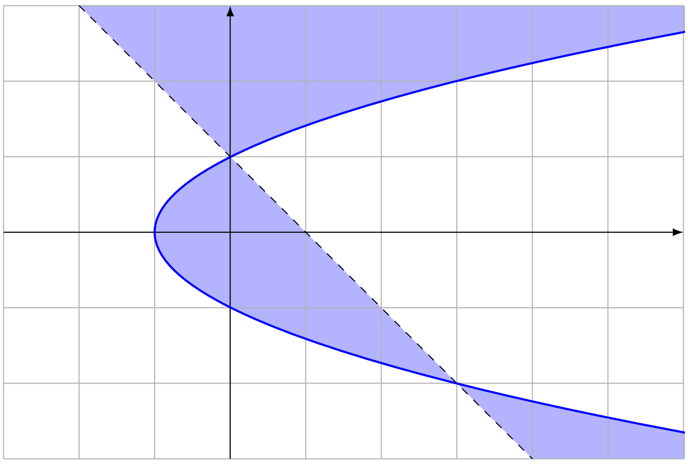
Il polinomio di secondo grado $P(x, y) := 1 + x - y^2$ si annulla lungo i punti della parabola di equazione

$$x = y^2 - 1. \tag{4}$$

Si tratta della parabola con asse orizzontale, vertice in $(-1, 0)$, e passante per i punti $(0, \pm 1)$; tale parabola divide il piano cartesiano in due regioni, su ciascuna delle quali il polinomio non cambia segno; nella regione interna alla concavità della parabola (che contiene l'origine) avremo $P(x, y) > 0$, in quanto $P(0, 0) = 1 > 0$, nell'altra regione (che contiene il punto $(-2, 0)$) avremo $P(x, y) < 0$, in quanto $P(-2, 0) = -1 < 0$.

I due punti di intersezione tra la retta e la parabola si calcolano mettendo a sistema le due equazioni (3) e (4), e si trova che essi hanno coordinate $(0, 1)$ e $(3, -2)$.

Il dominio naturale della funzione f è dato dalle porzioni di piano in cui $Q \neq 0$ e in cui $Q/P \geqslant 0$, ovvero in cui $Q = 0$ oppure Q ha lo stesso segno di P. Tale regione è evidenziata in blu nella seguente figura.



Esercizio 2.5. Determina il dominio naturale delle seguenti funzioni di due variabili e rappresentalo graficamente nel piano cartesiano.

$$f(x,y) := \sqrt{\frac{9-x^2-y^2}{x^2+y^2-4}}, \qquad f(x,y) := \arccos(x^2-y^2),$$
$$f(x,y) := \sqrt{\sqrt{y}-2\,|x|} + \log(2x-y), \qquad f(x,y) := \log\Big(\frac{1-|x|}{1-|y|}\Big),$$
$$f(x,y) := \tan(y-x^2), \qquad f(x,y) := \log\big(\mathrm{e}^y - x\big) - \log\big(\mathrm{e}^x - y\big).$$

3 Curve parametrizzate

Una funzione di una variabile reale a valori vettoriali,

$$\boldsymbol{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}^n, \qquad I \subseteq \mathbb{R},$$

può essere usata per descrivere il moto di un punto in $\mathbb{R}^n$: ad ogni istante $t \in I$ associamo la posizione del punto $\boldsymbol{\gamma}(t)$. Una tale funzione non è altro che un vettore di n funzioni scalari di una variabile,

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big).$$

Quando I è un intervallo e tutte le componenti γ_k sono continue si dice che $\boldsymbol{\gamma}$ descrive una *curva parametrizzata* in $\mathbb{R}^n$. L'immagine $\boldsymbol{\gamma}(I)$ si dice *sostegno* della curva ed è l'oggetto che rappresenta geometricamente la curva,

$$\boldsymbol{\gamma}(I) := \{\boldsymbol{\gamma}(t)\colon t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

e non è da confondere con il grafico di $\boldsymbol{\gamma}$,

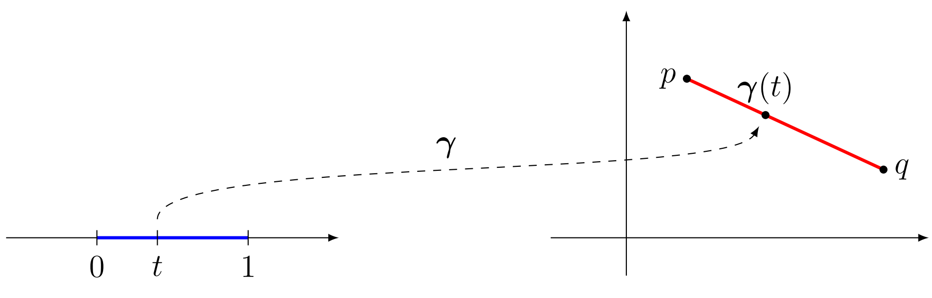
$$\mathrm{grafico}(\boldsymbol{\gamma}) := \big\{\big(t, \boldsymbol{\gamma}(t)\big)\colon t \in I\big\} \subseteq \mathbb{R}^{1+n}.$$

Tale grafico a sua volta può essere visto come il sostegno della curva parametrizzata

$$\boldsymbol{\Gamma}\colon I \to \mathbb{R}^{1+n}, \qquad \boldsymbol{\gamma}(t) := \big(t, \boldsymbol{\gamma}(t)\big).$$

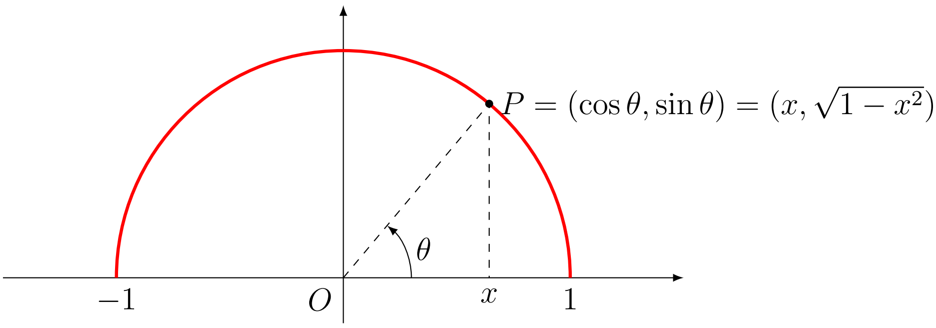
Esempio 3.1. Possiamo parametrizzare il segmento rettilineo che congiunge due punti $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ con la funzione

$$\boldsymbol{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{\gamma}(t) := (1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}.$$



Due curve definite in modo diverso possono avere due sostegni identici e quindi parametrizzare in modo diverso la stessa curva geometrica, descrivendo modi diversi di percorrere lo stessa curva.

Esempio 3.2. Consideriamo la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 1 contenuta nel semipiano superiore.



Possiamo parametrizzare un generico punto P della semicirconferenza usando come parametro l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ che il segmento OP forma con il semiasse positivo delle ascisse, oppure usando come parametro l'ascissa $x \in [-1, 1]$ del punto P. Otteniamo così due possibili parametrizzazioni della stessa semicirconferenza,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\gamma}_1 \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, && \boldsymbol{\gamma}_1(\theta) := (\cos\theta,\, \sin\theta), \\ &\boldsymbol{\gamma}_2 \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, && \boldsymbol{\gamma}_2(x) := (x,\, \sqrt{1-x^2}). \end{aligned}$$

Tramite l'uso di coordinate polari è possibile descrivere curve parametrizzate nel piano specificando la relazione tra il raggio r (distanza dall'origine o modulo) e l'angolo θ formato con il semiasse positivo delle ascisse, tramite una funzione scalare non negativa di una variabile,

$$R \colon I \to [0, +\infty[, \qquad r = R(\theta).$$

La parametrizzazione della curva sarà data da

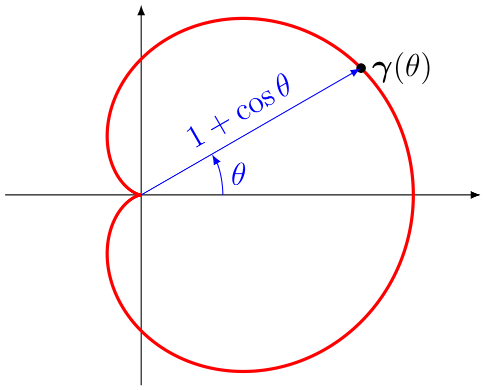
$$\boldsymbol{\gamma} \colon I \to \mathbb{R}^2, \qquad \boldsymbol{\gamma}(\theta) = (x(\theta), y(\theta)), \qquad \begin{cases} x(\theta) = R(\theta)\cos\theta, \\ y(\theta) = R(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

Esempio 3.3. La *cardioide* è la curva descritta in cordinate polari dalla relazione

$$r = 1 + \cos\theta,$$

al variare di θ in $[-\pi, \pi]$, e dunque corrisponde alla parametrizzazione

$$\boldsymbol{\gamma}(\theta) = \big((1+\cos\theta)\cos\theta,\, (1+\cos\theta)\sin\theta\big), \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

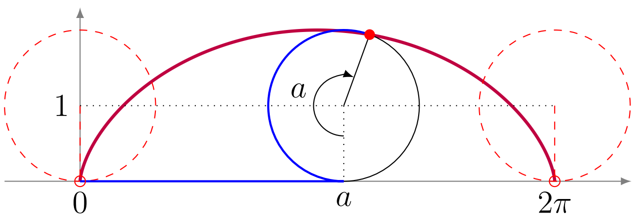


Esercizio 3.4. Rappresenta graficamente nel piano cartesiano il sostegno delle seguenti curve parametrizzate:

1. $\boldsymbol{\gamma}(t) = (-2+3t, 4-t)$ con $t \in \mathbb{R}$;
2. $\boldsymbol{\gamma}(\theta) = \big(4\cos\theta, 3\sin\theta\big)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$;
3. $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^2, t^3)$ con $t \in \mathbb{R}$;
4. la curva descritta in coordinate polari dalla relazione $r = \theta$ con $\theta \in [0, 4\pi]$.

Esercizio 3.5. Determina delle parametrizzazioni per le seguenti curve:

1. la retta passante per i punti $(-2, 0)$ e $(3, 2)$;
2. la circonferenza di centro $(3, 4)$ e raggio 5;
3. il ramo dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ che si trova nel semipiano $x > 0$;
4. la curva descritta da un punto di un cerchio di raggio 1 tangente all'asse x e che rotola senza scivolare facendo un giro completo (questa curva viene chiamata *cicloide*);



4 Campi vettoriali

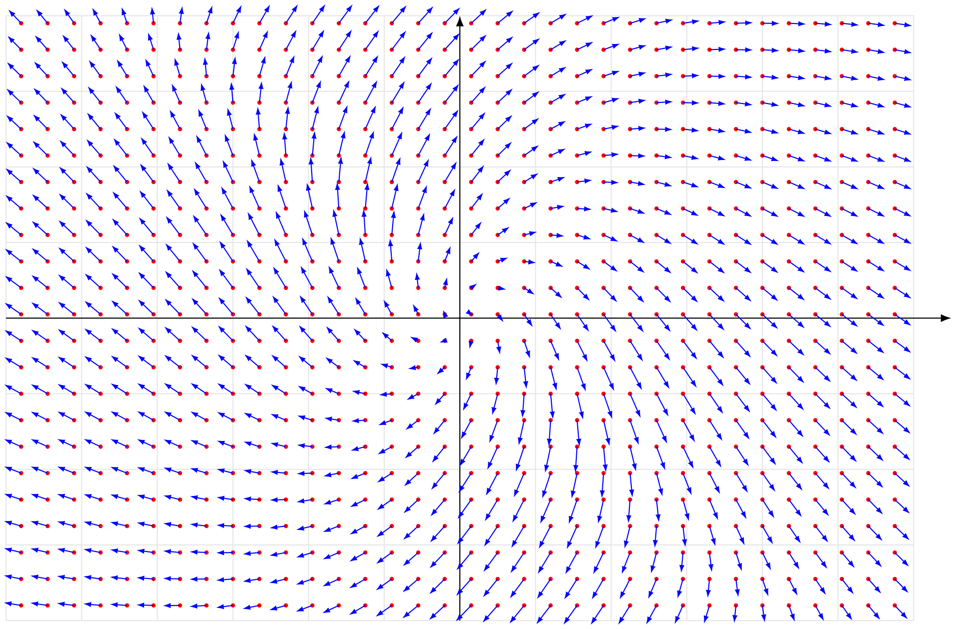
Funzioni a valori vettoriali che dipendono da più variabili non sono altro che dei vettori di funzioni scalari. Ad ogni punto del dominio (multidimensionale) viene associato un vettore (multidimensionale). Quando sia il dominio che il codominio della funzione $\boldsymbol{f}$

sono sottoinsiemi del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ possiamo provare a visualizzare una tale relazione disegnando un *campo* di vettori, ovvero tracciando il vettore $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ applicato in corrispondenza ad ogni punto $\boldsymbol{x}$ del dominio.

Esempio 4.1. Consideriamo la funzione $\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\boldsymbol{v}(x,y) := \Big(\frac{1}{2}\arctan(x+y), \frac{y-x}{4+x^2+y^2}\Big).$$

Interpretando $\boldsymbol{v}$ come un campo di vettori otteniamo la seguente rappresentazione grafica



Se ad esempio la funzione $\boldsymbol{v}(x,y)$ indica il vettore velocità della particella di un fluido che si trova nel punto (x,y), con questa rappresentazione grafica riusciamo facilmente a farci un'idea di quello che potrebbe essere il movimento del fluido, immaginando linee di flusso che siano in ogni punto tangenti ai vettori disegnati. Cosa che non saremmo in grado di fare se invece disegnassimo separatamente i grafici tridimensionali delle due componenti scalari di $\boldsymbol{v}$.