Analisi Matematica 1B - Lezione 15

Ulteriori tecniche di integrazione

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 4 maggio 2020)

1 Sostituzioni parametriche

Descriviamo ora un paio di sostituzioni che risultano particolarmente utili nel calcolo di primitive per funzioni che sono costruite combinando funzioni trigonometriche.

Consideriamo la sostituzione

$$t = \tan x\,, \tag{1}$$

Utilizzando la definizione di tangente troviamo che $\sin x = t \cos x$ e dunque

$$1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = (\cos x)^2(1 + t^2)$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned}(\cos x)^2 &= \frac{1}{1+t^2},\\ (\sin x)^2 &= 1 - (\cos x)^2 = \frac{t^2}{1+t^2},\\ (\sin x)(\cos x) &= t(\cos x)^2 = \frac{t}{1+t^2}\end{aligned}$$

Differenziando in (1) abbiamo inoltre $\mathrm{d}t = (1 + (\tan x)^2)\,\mathrm{d}x$, da cui segue che

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+(\tan x)^2}(1 + (\tan x)^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Questo significa che se in un integrale la funzione integranda è espressa solo in termini di $\tan x$, $(\cos x)^2$, $(\sin x)^2$ e $(\sin x)(\cos x)$, usando la sostituzione (1) queste espressioni trigonometriche vengono sostituite da funzioni razionali,

$$\begin{aligned}&\int F\left(\tan x, (\cos x)^2, (\sin x)^2, (\sin x)(\cos x)\right)\,\mathrm{d}x = \\ &\qquad = \int F\Big(t, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\tan x}. \end{aligned}\tag{2}$$

Se la F è essa stessa una funzione razionale (di 4 variabili), la funzione integranda nell'integrale di destra diventa una funzione razionale (della variabile t), che possiamo integrare utilizzando i metodi visti nella lezione precedente.

Esempio 1.1. Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{(\tan x)^2}{1+(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Procedendo con la sostituzione $t = \tan x$ esso si trasforma in

$$\int \frac{t^2}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Abbiamo la decomposizione

$$\frac{t^2}{1+2t^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2t^2+1)}.$$

Integrando otteniamo

$$\int \frac{t^2}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\sqrt{2}\,t)^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}\,t\bigr).$$

Ritornando alla variabile x con la sostituzione troviamo

$$\int \frac{(\tan x)^2}{1+(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}\tan x\bigr).$$

Un'altra sostituzione utile per integrali di funzioni costruite combinando funzioni trigonometriche è data dalla sostituzione

$$t = \tan\frac{x}{2}. \tag{3}$$

Dall'identità

$$1+\Bigl(\tan\frac{x}{2}\Bigr)^2 = \frac{1}{\bigl(\cos\frac{x}{2}\bigr)^2}$$

segue che

$$\Bigl(\cos\frac{x}{2}\Bigr)^2 = \frac{1}{1+t^2}.$$

Abbiamo inoltre che $\sin\frac{x}{2} = t\cos\frac{x}{2}$, e usando le formule di duplicazione otteniamo

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2t\Bigl(\cos\frac{x}{2}\Bigr)^2 = \frac{2t}{1+t^2},\\
\cos x &= \Bigl(\cos\frac{x}{2}\Bigr)^2 - \Bigl(\sin\frac{x}{2}\Bigr)^2 = (1-t^2)\Bigl(\cos\frac{x}{2}\Bigr)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Differenziando in (3) troviamo anche che

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right)\,\mathrm{d}x,$$

da cui ricaviamo

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Questo significa che se in un integrale la funzione integranda è espressa solo in termini di $\cos x$ e $\sin x$, usando la sostituzione (3) queste espressioni trigonometriche vengono sostituite da funzioni razionali,

$$\int F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int F\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}}. \tag{4}$$

Esempio 1.2. Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Procedendo con la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$ otteniamo

$$\int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \log|t| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

Osservazione 1.3. La funzione tangente è una funzione periodica con periodo π, e dunque non è invertibile in generale, inoltre non è definita nei punti della forma $k\pi + \pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$, e il suo dominio è formato dall'unione degli intervalli della forma $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, Le sostituzioni (1) e (3) sono invertibili solo se considerate su uno di questi intervalli per l'argomento della tangente. La sostituzione inversa di (1) è $x = \arctan t$ solo per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La sostituzione inversa di (3) è $x = 2\arctan t$ solo per $x \in]-\pi, \pi[$. È importante tenere ben presente questo per non incorrere in errori quando si calcolano integrali definiti. Il teorema fondamentale del calcolo vale solo quando consideriamo funzioni continue definite su un intervallo, e non su unioni di intervalli.

Esempio 1.4. Calcoliamo l'integrale

$$I := \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Procediamo con la sostituzione $t = \tan x$. Se procedessimo in modo ingenuo troveremmo

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan\pi} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^0 \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = 0,$$

ma questo risultato non può essere corretto in quanto l'integrale deve essere positivo; infatti, siccome $0 < 1 + (\cos x)^2 \leqslant 2$, abbiamo

$$I \geqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} > 0.$$

L'errore è dovuto al fatto che la funzione $\tan x$ usata per la sostituzione non è definita nel punto $\pi/2$ che si trova all'interno dell'intervallo $[0,\pi]$, e in quel punto non ammette nemmeno un prolungamento continuo; $\tan x$ è comunque ben definita e continua su $[0,\pi/2[$ e su $]\pi/2,\pi]$. Decomponiamo allora l'integrale in due parti, usando la proprietà di additività,

$$I = I_1 + I_2, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Osserviamo inoltre che il secondo integrale coincide con il primo, $I_2 = I_1$, come si può dedurre tramite la sostituzione $x = \pi - y$, per via delle proprietà di simmetria del coseno, in quanto $(\cos(\pi - y))^2 = (\cos y)^2$. Dunque,

$$I = 2I_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)^2}.$$

La sostituzione $t = \tan x$ non è definita nel punto $\pi/2$, ma è continua su ogni intervallo $[0,b[$ con $0 < b < \pi/2$; sappiamo inoltre che la funzione integrale è continua e dunque possiamo ripetere i calcoli di prima su $[0,b[$ per poi passare al limite per $b \to \frac{\pi}{2}^-$,

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)^2} &= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)^2} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \int_{\tan 0}^{\tan b} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \left[\arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\right]_{t=0}^{t=\tan b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \arctan\Big(\frac{\tan b}{\sqrt{2}}\Big) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t\to+\infty} \arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Otteniamo così che il valore corretto per l'integrale (5) è $I = 2I_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 1.5. Calcola i seguenti integrali di funzioni ottenute componendo funzioni razionali con funzioni trigonometriche.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x)^4\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{(\cos x)^2}{1-2(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{3\pi} (\sin x)^4\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(\sin x)(\cos x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\sin x)^2(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{2\sin x}{4(\cos x)^2 - 8(\cos x) + 5}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{4\pi} \frac{1}{1+(\sin 2x)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(\sin x)\,(2+(\tan x)^2)}\,\mathrm{d}x.$$

2 Primitive di funzioni razionali composte con radicali

Vediamo in questa sezione alcuni esempi di sostituzioni utili per il calcolo di primitive di funzioni ottenute come composizione di funzioni razionali con radicali. Indichiamo nel seguito con $f(\cdot,\cdot)$ una generica funzione razionale dipendente da due variabili.

Cominciamo con il considerare integrali della forma

$$\int f\Big(x,\ \sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\Big)\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

dove $n\in\mathbb{N}$ e $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ con $ad\neq bc$. In questi casi conviene considerare la sostituzione

$$t=\sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}},$$

da cui si ricava

$$x=-\frac{d\,t^n-b}{c\,t^n-a},\qquad \mathrm{d}x=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(c\,t^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'integrale (6) viene trasformato nell'integrale

$$n(ad-bc)\int f\Big(-\frac{d\,t^n-b}{c\,t^n-a},t\Big)\frac{t^{n-1}\,\mathrm{d}t}{(c\,t^n-a)^2}\bigg|_{t=\sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}}.$$

Esempio 2.1. Calcoliamo

$$\int\frac{4}{x-1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Questo integrale è della forma (6) con $f(x,t)=\frac{4}{x-1+t}$, $n=3$, $a=b=d=1$, $c=0$. Utilizzando la sostituzione

$$t=\sqrt[3]{x+1},\qquad x=t^3-1,\qquad \mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t,$$

l'integrale si trasforma in

$$\int\frac{4}{(t^3-1)-1+t}3t^2\,\mathrm{d}t=\int\frac{12t^2}{t^3+t-2}\,\mathrm{d}t.$$

Osserviamo che t^3+t-2 si annulla per $t=1$ e abbiamo la fattorizzazione

$$t^3+t-2=(t-1)(t^2+t+2)=(t-1)\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right).$$

e la decomposizione in frazioni semplici

$$\frac{12t^2}{t^3+t-2}=\frac{3}{t-1}+\frac{9}{2}\,\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}.$$

Integrando troviamo

$$\int\frac{12t^2}{t^3+t-2}\,\mathrm{d}t=3\log|t-1|+\frac{9}{2}\log\big(t^2+t+2\big)+\frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\big(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\big).$$

Riapplicando la sostituzione troviamo

$$\begin{aligned}\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x-1+\sqrt[3]{x+1}} &= 3\log\left|\sqrt[3]{x+1}-1\right| + \\ &\quad + \frac{9}{2}\log\Big(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+2\Big) + \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\Big(\frac{2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{7}}\Big).\end{aligned}$$

Integrali della forma

$$\int f\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

vengono trasformati dalla sostituzione

$$x = \cos\theta, \qquad \sqrt{1-x^2} = \sin\theta, \qquad \mathrm{d}x = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad x \in [-1,1],\ \theta \in [0,\pi]\,,$$

in integrali della forma

$$-\int f\big(\cos\theta, \sin\theta\big)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\bigg|_{\theta=\arccos x},$$

che a loro volta possono essere trasformati in integrali di funzioni razionali utilizzando la sostituzione parametriche viste nella precedente sezione,

$$t = \tan\frac{\theta}{2} \geqslant 0, \quad x = \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Osserviamo che componendo le due sostituzioni ricaviamo

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{-4t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}, \qquad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \tag{8}$$

che applicata direttamente all'integrale (7) di partenza ci porta a integrali della forma

$$-\int f\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big)\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\bigg|_{t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

Integrali della forma

$$\int f\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

con $x \geqslant 1$, vengono trasformati dalla sostituzione

$$x = \cosh t, \qquad \sqrt{x^2-1} = \sinh t, \qquad \mathrm{d}x = \sinh t\,\mathrm{d}t, \qquad x \geqslant 1, \quad t \geqslant 0, \tag{10}$$

in integrali della forma

$$\int f\big(\cosh t, \sinh t\big)\sinh t\,\mathrm{d}t = \int f\Big(\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}, \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\Big)\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t,$$

che a loro volta possono essere trasformati in integrali di funzioni razionali utilizzando la sostituzione

$$\mathrm{e}^t = y, \quad \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{y}, \quad t = \log y, \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y. \tag{11}$$

Osserviamo che la trasformazione inversa della sostituzione (10) è data da

$$t = \operatorname{sett}\cosh x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr),$$

e dunque risulta che

$$y = \mathrm{e}^t = x + \sqrt{x^2-1}, \quad x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}\Bigl(y + \frac{1}{y}\Bigr), \quad \mathrm{d}x = \frac{y^2-1}{2y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Utilizzando direttamente quest'ultima sostituzione abbiamo che l'integrale (9) si trasforma in

$$\int f\left(\frac{1}{2}\Bigl(y+\frac{1}{y}\Bigr), \frac{1}{2}\Bigl(y-\frac{1}{y}\Bigr)\right)\frac{y^2-1}{2y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Analogamente, integrali della forma

$$\int f\bigl(x, \sqrt{x^2+1}\bigr)\,\mathrm{d}x, \tag{12}$$

vengono trasformati dalla sostituzione

$$x = \sinh t, \qquad \sqrt{x^2+1} = \cosh t, \qquad \mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t,$$

in integrali della forma

$$\int f\bigl(\sinh t, \cosh t\bigr)\cosh\,\mathrm{d}t = \int f\Bigl(\frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}, \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\Bigr)\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t,$$

che a loro volta possono essere trasformati in integrali di funzioni razionali sempre utilizzando la sostituzione (11). Oppure possiamo utilizzare direttamente la sostituzione che si ottiene componendo le due sostituzioni, ovvero in questo caso

$$y = x + \sqrt{x^2+1}, \quad x = \frac{1}{2}\Bigl(y - \frac{1}{y}\Bigr), \quad \mathrm{d}x = \frac{y^2+1}{2y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Utilizzando direttamente quest'ultima sostituzione abbiamo che l'integrale (9) si trasforma in

$$\int f\left(\frac{1}{2}\Bigl(y-\frac{1}{y}\Bigr), \frac{1}{2}\Bigl(y+\frac{1}{y}\Bigr)\right)\frac{y^2+1}{2y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Esempio 2.2. Calcoliamo $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x$. Applichiamo prima la sostituzione $x = \sinh t$, e poi la sostituzione $\mathrm{e}^t = y$,

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\operatorname{sett}\sinh 1}^{\operatorname{sett}\sinh 2}\frac{\cosh t}{\sinh t}\cosh t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\log(1+\sqrt{2})}^{\log(2+\sqrt{5})}\frac{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}}\frac{\bigl(y+\frac{1}{y}\bigr)^2}{y-\frac{1}{y}}\,\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}}\frac{(y^2+1)^2}{2y^2(y^2-1)}\,\mathrm{d}y$$

Calcoliamo la decomposizione della funzione razionale nell'ultimo integrale,

$$\frac{(y^2+1)^2}{2y^2(y^2-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}.$$

Integrando otteniamo

$$\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{(y^2+1)^2}{2(y^2-1)}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y} + \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} =$$
$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \log\Big(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\Big).$$

Consideriamo ora integrali della forma

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x, \tag{13}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $\Delta := b^2 - 4ac \neq 0$. Osserviamo che possiamo scrivere il trinomio sotto radice nella forma

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) =$$
$$= \frac{|\Delta|}{4a}\left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2 - (\operatorname{sgn}\Delta)\right) = (\operatorname{sgn} a)\frac{|\Delta|}{4\,|a|}\big(t^2 - (\operatorname{sgn}\Delta)\big),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato la sostituzione

$$t = \frac{2a\,x+b}{\sqrt{|\Delta|}}, \qquad x = \frac{\sqrt{|\Delta|}\,t - b}{2a}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\,\mathrm{d}t.$$

A seconda dei segni del coefficiente a e del discriminante Δ distinguiamo diversi casi:

- Se $a > 0$ e $\Delta > 0$, l'integrale (13) diventa

  $$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\int f\Big(\frac{\sqrt{\Delta}\,t-b}{2a}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{|a|}}\sqrt{t^2-1}\Big)\,\mathrm{d}t,$$

  e ci riconduciamo quindi ad un integrale del tipo (9);

- Se $a > 0$ e $\Delta < 0$, l'integrale (13) diventa

  $$\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\int f\Big(\frac{\sqrt{-\Delta}\,t-b}{2a}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{|a|}}\sqrt{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t,$$

  e ci riconduciamo quindi ad un integrale del tipo (12);

- Se $a < 0$ e $\Delta > 0$, l'integrale (13) diventa
$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\int f\Big(\frac{\sqrt{\Delta}\,t-b}{2a}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{|a|}}\sqrt{1-t^2}\Big)\,\mathrm{d}t,$$
e ci riconduciamo quindi ad un integrale del tipo (7);
- Se $a < 0$ e $\Delta < 0$ allora il trinomio $ax^2 + bx + c$ risulta sempre negativo e la sua radice quadrata non è definita.

Esempio 2.3. Calcoliamo
$$I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3+5x-2x^2}}.$$
Abbiamo
$$\begin{aligned}3+5x-2x^2 = 2\left(\frac{3}{2}+\frac{25}{16}-\left(\frac{5}{4}\right)^2+2\frac{5}{4}x-x^2\right) &=\\ = 2\left(\frac{49}{16}-\left(x-\frac{5}{4}\right)^2\right) &= \frac{49}{8}\left(1-\left(\frac{4x-5}{7}\right)^2\right).\end{aligned}$$
Applichiamo la sostituzione
$$t = \frac{4x-5}{7}, \qquad x = \frac{7t+5}{4}, \qquad \sqrt{3+5x-2x^2} = \frac{7}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{7}{4}\,\mathrm{d}t,$$
e otteniamo un integrale della forma (7),
$$I = \int_{-\frac{1}{7}}^{\frac{3}{7}} \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{d}t}{(7t+5)\sqrt{1-t^2}}.$$
Proseguiamo con una sostituzione della forma (8),
$$y = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \qquad t = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \qquad \sqrt{1-t^2} = \frac{2y}{1+y^2}, \qquad \mathrm{d}t = \frac{-4y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2},$$
e l'integrale diventa
$$I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{5}}} \frac{2\sqrt{2}(-4)y\,\mathrm{d}y}{(7(1-y^2)+5(1+y^2))2y} = \int_{\sqrt{\frac{2}{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{d}y}{6-y^2}.$$
Decomponiamo la funzione razionale dell'ultimo integrale,
$$\frac{2\sqrt{2}}{6-y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{y+\sqrt{6}} - \frac{1}{y-\sqrt{6}}\Big).$$
E integriamo
$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log\left|\frac{y+\sqrt{6}}{y-\sqrt{6}}\right|\right]_{\sqrt{\frac{2}{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\log\Big(\frac{11+2\sqrt{18}}{8+\sqrt{15}}\Big).$$

Esercizio 2.4. Calcola i seguenti integrali.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4+3(\log x)^2}}, \qquad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+3}}, \qquad \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-x^2}},$$
$$\int \frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\left(\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}-2\right)}.$$

3 Formule ricorsive

Abbiamo già incontrato formule ricorsive per integrali quando abbiamo calcolato primitive per funzioni irrazionali semplici. Indichiamo con $F_n(x) := \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ la famiglia di primitive di $\frac{1}{(1+x^2)^n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Si calcola facilmente che $F_1(x) = \arctan(x) + c$. Abbiamo visto nella precedente lezione che vale la formula

$$F_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)F_n(x). \tag{14}$$

Questa formula ci permette di calcolare esplicitante ciascuna F_n, calcolando prima F_2 a partire da F_1, poi F_3 da F_2 e così via.

Vediamo altri esempi di formule iterative. Consideriamo le seguenti famiglie di integrali,

$$A_n(x) := \int (\cos x)^n\,\mathrm{d}x, \quad B_n(x) := \int (\sin x)^n\,\mathrm{d}x, \quad C_{m,n}(x) := \int (\sin x)^m(\cos x)^n\,\mathrm{d}x,$$

con $n, m \in \mathbb{N}$. Poniamo inoltre $C_{0,n}(x) := A_n(x)$ e $C_{n,0} := B_n(x)$. Quando $n = 1$ si calcola facilmente che

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= \int \cos x\,\mathrm{d}x = (\sin x) + c,\\
B_1(x) &= \int \sin x\,\mathrm{d}x = (-\cos x) + c,\\
C_{m,1} &= \int (\sin x)^m \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1} + c,\\
C_{1,m} &= \int (\cos x)^m \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}(-\cos x)^{m+1} + c.
\end{aligned}$$

Per $n = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
A_2(x) &= \int (\cos x)^2\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + c,\\
B_2(x) &= \int (\sin x)^2\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + c,
\end{aligned}$$

ed anche

$$C_{2,m}(x) = \int (\cos x)^m (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int (\cos x)^m \big(1 - (\cos x)^2\big) \,\mathrm{d}x = A_m(x) - A_{m+2}(x).$$

Per $n > 2$, procediamo integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int D[(\cos x)^{n-1}] \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) C_{2,n-2} \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)\big(A_{n-2}(x) - A_n(x)\big),
\end{aligned}$$

da cui si ricava la formula ricorsiva

$$A_n(x) = \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \sin x + \frac{n-1}{n} A_{n-2}(x),$$

che ci permette di calcolare tutti gli A_n a partire da A_1 e A_2.

Esercizio 3.1. Ricava delle formule ricorsive

1. per calcolare B_n conoscendo B_{n-2};
2. per calcolare $C_{m,n}$ conoscendo $C_{m,n-2}$;
3. per calcolare $C_{n,m}$ conoscendo $C_{n-2,m}$.

Esercizio 3.2. Determina le primitive di $(\cos x)^4 (\sin x)^2$ e di $(\cos x)^4 (\sin x)^3$.

4 Esercizi vari

Osservazione 4.1. Quando si procede nel calcolo di integrali, spesso si possono percorrere strade diverse per arrivare allo stesso risultato, impiegando metodi e tecniche diverse, alcune di queste strade possono risultare molto lunghe e altre molto brevi, pur avendo lo stesso punto di partenza e di arrivo. Vediamo ad esempio quattro metodi diversi per ottenere la primitiva di $\sin x \cos x$.

- Primo metodo: utilizziamo la sostituzione parametrica $t = \tan \frac{x}{2}$ come indicato in (4). Abbiamo

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{1+t^2} \, \frac{1-t^2}{1+t^2} \, \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}} = \int \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} \,\mathrm{d}t \bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$

Decomponiamo la funzione razionale integranda come somma di funzioni razionali semplici,

$$\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} + \frac{8t}{(1+t^2)^3}.$$

Integando le frazioni semplici troviamo

$$\int \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2.$$

Tornando indietro con la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, troviamo il risultato cercato

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}(\sin x)^2}.$$

- Secondo metodo: utilizziamo la sostituzione parametrica $t = \tan x$ come indicato in (2). Abbiamo

$$\int (\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{1+t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\tan x} = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\bigg|_{t=\tan x}.$$

Integrando la frazione semplice,

$$\frac{1}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}.$$

e tornando indietro con la sostituzione troviamo

$$\int (\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-\frac{1}{2}(\cos x)^2}.$$

- Terzo metodo: procediamo integrando per parti. Concatenando due integrazioni per parti troviamo

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \sin x - \int \cos x \sin x \,\mathrm{d}x,$$

da cui ricaviamo ancora

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}(\sin x)^2}.$$

- Quarto metodo: utilizziamo identità trigonometriche. Per le formule di duplicazone abbiamo $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ e dunque

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-\frac{1}{4}\cos(2x)}.$$

- Quinto metodo: procediamo per sostituzione diretta. Siccome $\cos x$ è la derivata di $\sin x$, con la sostituzione $y = \sin x$, $\mathrm{d}y = \cos x \,\mathrm{d}x$ troviamo

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int y \,\mathrm{d}y \Big|_{y=\sin x} = \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=\sin x} = \boxed{\frac{1}{2}(\sin x)^2}.$$

Sebbene in alcuni casi le formule ottenute per le primitive con i diversi metodi sono scritte in modo diverso tutte esse coincidono a meno di costanti addittive,

$$\frac{1}{2}(\sin x)^2 = -\frac{1}{2}(\cos x)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}.$$

Nello svolgere i seguenti esercizi cercate di capire quali metodi potete applicare e quali di essi vi portano al risultato in maniera più semplice o veloce.

Esercizio 4.2. Calcola i seguenti integrali indefiniti,

$$\int 3x\,|x|\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{4(\cos x)^2 - (\sin x)^2}, \qquad \int \frac{x \arctan x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int (\cos x)\log(\tan x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x\cos(2x)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{(\cos x)\sqrt{\sin x}}{4-(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 4.3. Calcola i seguenti integrali definiti,

$$\int_{-2}^{1} 3x\,|x|\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^4 \mathrm{e}^{-|x-1|}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-3}^{5} |\mathrm{e}^x - 1|\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\log 4} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{x/2} + 3}, \qquad \int_0^1 \log(1+\sqrt{1-x})\,\mathrm{d}x, \qquad \int_4^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})},$$

$$\int_0^{2\pi} \big(\cos(3x)\big)^2 (\sin(3x))^4\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} (\cos x)^5\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^{1} \arccos x\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 4.4. Determina un polinomio $P(x)$ di secondo grado tale che l'integrale

$$\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{x^3(x-1)^2}$$

sia una funzione razionale? Tale polinomoio è univocamento determinato?

Esercizio 4.5. Utilizzando eventualmente le formule di prostaferesi, calcola i seguenti integrali,

$$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x,$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.