Analisi Matematica 1B - Lezione 14

Integrazione di funzioni razionali

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 29 aprile 2020)

Vediamo in questa lezione come sia sempre possibile trovare primitive di funzioni razionali, ovvero di rapporti di polinomi, purché si sia in grado di fattorizzare il polinomio al denominatore come prodotto di polinomi irriducibili di primo o secondo grado.

1 Funzioni razionali

Definizione 1.1. Chiamiamo *funzione razionale* ogni funzione della forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

dove N e D sono funzioni polinomiali e D non è identicamente nulla. Tale funzione razionale è definita per ogni punto $x \in \mathbb{R}$ per il quale il denominatore $D(x)$ non si annulla.

In particolare sono funzioni razionali tutte le funzioni polinomiali (basta considerare il caso con $D(x) = 1$) e tutti i reciproci di funzioni polinomiali (caso $N(x) = 1$). Somme e prodotti di funzioni razionali sono ancora funzioni razionali e si verifica facilmente che l'insieme delle funzioni razionali con le operazioni di somma e prodotto verifica tutte le regole di un campo numerico (solo che in questo caso gli elementi del campo non sono numeri, ma funzioni). Ogni espressione ottenuta combinando numeri e la variabile x utilizzando solo le quattro operazioni aritmetiche fondamentali produce una funzione razionale.

Esempio 1.2.

$$\frac{2x-1}{\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}} = \frac{2x-1}{\left(\frac{x(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)} = \frac{(2x-1)(x-1)(x+1)}{x(x+1)+(x-1)} = \frac{2x^3-x^2-2x+1}{x^2+2x-1}.$$

Esercizio 1.3. Spiega perché:

- la composizione di funzioni razionali è ancora una funzione razionale;
- la derivata di una funzione razionale è ancora una funzione razionale;
- se $f(x)$ è una funzione razionale, allora le derivate di $\log|f(x)|$ e $\arctan(f(x))$ sono funzioni razionali.

Esercizio 1.4. Riduci alla forma $N(x)/D(x)$, con N e D polinomi, le seguenti espressioni:

$$\frac{1}{x-\frac{2}{x-\frac{3}{x}}}, \quad \left(\frac{1+\frac{1}{x+1}}{1+\frac{1}{x}}\right)^2, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)-\log\Big(\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\Big)\right).$$

Definizione 1.5. Una funzione razionale $N(x)/D(x)$ di dice *propria* quando il grado del polinomio N al numeratore è strettamente inferiore al grado del polinomio D al denominatore.

Ad esempio: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3+1}$ e $\frac{x^2-1}{x^3+1}$ sono funzioni razionali proprie, mentre x^3+1, $\frac{x^3+1}{x^2-1}$ e $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ non sono funzioni razionali proprie.

Proposizione 1.6. *Ogni funzione razionale può essere decomposta, in modo unico, come somma di un polinomio e di una funzione razionale propria.*

Dimostrazione. Siano N e D due polinomi, con D non identicamente nullo. Effettuando la divisione tra polinomi (come visto nella lezione 5) otteniamo che esistono (e sono unici) due polinomi P e R tali che $N = P \cdot D + R$ dove R, se non è nullo, ha grado inferiore al grado di D. Abbiamo dunque la scomposizione

$$\frac{N(x)}{D(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

e la funzione razionale R/D è propria. □

Esempio 1.7. Decomponiamo la funzione razionale $\frac{2x^5-3x^3+4x^2-7}{x^3+x^2+2}$ come somma di un polinomio e una funzione razionale propria. Effettuiamo la divisione in colonna tra i due polinomi:

$$\begin{array}{cccccc|ccc}
+2x^5 & & -3x^3 & +4x^2 & & -7 & +x^3 & +x^2 & +2 \\
\hline
+2x^5 & +2x^4 & & +4x^2 & & & & +2x^2 & -2x \quad -1 \\
// & -2x^4 & -3x^3 & & & -7 & & & \\
 & -2x^4 & -2x^3 & & -4x & & & & \\
 & // & -x^3 & & -4x & -7 & & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & & -2 & & & \\
 & & // & +x^2 & +4x & -5 & & &
\end{array}$$

Otteniamo così che

$$\frac{2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 7}{x^3 + x^2 + 2} = 2x^2 - 2x - 1 + \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 + x^2 + 2}.$$

Esercizio 1.8. Decomponi le seguenti funzioni razionali nella somma di un polinomio più una funzione razionale propria:

$$\frac{x^{10}+1}{x^2+1}, \quad \frac{x^6+x^4}{x^4-1}, \quad \frac{5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}.$$

Definizione 1.9. Una funzione razionale si dice *semplice* quando è della forma

$$\frac{P(x)}{\big(Q(x)\big)^k}$$

dove Q è un polinomio monico **irriducibile**, $k \in \mathbb{N}$, e P è un polinomio di grado strettamente inferiore al grado di Q.

Segue immediatamente che tutte le funzioni razionali semplici sono anche proprie.

In campo complesso i polinomi monici irriducibili solo quelli di primo grado, della forma $Q(z) = z - w$, dove w indica lo zero (complesso) di Q. Pertanto le funzioni razionali semplici complesse saranno tutte e solo quelle della forma

$$f(z) = \frac{A}{(z-w)^k},$$

dove A e w sono numeri complessi.

In campo reale i polinomi monici irriducibili sono:

- tutti quelli di primo grado, della forma $Q(x) = x - r$, dove r indica lo zero (reale) di Q,
- quelli di secondo grado con discriminante negativo, della forma

  $$Q(x) = x^2 + bx + c = (x-p)^2 + q^2,$$

  con

  $$b = -2p = -2\mathrm{Re}(p + \mathrm{i}q), \quad c = p^2 + q^2 = |p + \mathrm{i}q|^2, \quad q \neq 0,$$

  dove $p \pm \mathrm{i}q$ sono i due zeri complessi coniugati di Q.

Pertanto le funzioni razionali semplici reali saranno quelle della forma

$$f(x) = \frac{A}{(x-r)^k}, \tag{1}$$

dove A e r sono numeri reali, oppure quelle della forma

$$f(x) = \frac{Bx + C}{\big((x-p)^2 + q^2\big)^k}, \qquad q > 0. \tag{2}$$

Le funzioni razionali semplici costituiscono i mattocini elementari combinando i quali si possono ottenere tutte le funzioni razionali proprie. Ogni funzione razionale propria si può decomporre come somma di funzioni razionali semplici.

Teorema 1.10. *Dati due polinomi a coefficienti reali N e D con $\deg(N) < \deg(D)$, allora la funzione razionale propria $N(x)/D(x)$ si può decomporre in modo unico come somma di termini della forma*

$$\frac{A}{(x-r)^k},$$

dove A è un coefficiente reale, r è uno zero reale di $D(x)$ con molteplicità algebrica m e k è un numero naturale compreso tra 1 e m, e di termini della forma

$$\frac{Bx+C}{\big((x-p)^2+q^2\big)^j},$$

dove B, C sono coefficienti reali, $p \pm \mathrm{i}q$ sono zeri complessi coniugati di $D(x)$ con molteplicità algebrica ℓ e j è un numero naturale compreso tra 1 e ℓ.

Non forniamo la dimostrazione di questo importante teorema, ma illustreremo più avanti, tramite alcuni esempi, alcuni metodi per riuscire ad ottenere una tale decomposizione.

2 Primitive delle funzioni razionali semplici

Combinando quello che ci dicono la proposizione 1.6 e il teorema 1.10 otteniamo che ogni funzione razionale si può decomporre come somma di polinomi e di funzioni razionali semplici. Sappiamo già calcolare le primitive dei polinomi. Occupiamoci ora del calcolo di primitive per funzioni razionali semplici. Per le funzioni razionali semplici della forma (2) abbiamo la seguente ulteriore decomposizione

$$\frac{Bx+C}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k} = \frac{B}{2}\cdot\frac{2(x-p)}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k} + (Bp+C)\cdot\frac{1}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k}.$$

Sarà dunque sufficiente considerare i seguenti sei casi:

$$\frac{1}{x-r},\ \frac{1}{(x-r)^{k+1}},\ \frac{2(x-p)}{(x-p)^2+q^2},\ \frac{2(x-p)}{\big((x-p)^2+q^2\big)^{k+1}},\ \frac{1}{(x-p)^2+q^2},\ \frac{1}{\big((x-p)^2+q^2\big)^{k+1}},$$

dove $k \in \mathbb{N}$. Per semplicità di scrittura nei seguenti calcoli di primitive ometteremo di indicare la costante additiva arbitraria di integrazione.

Il primo caso è immediato, basta un cambio di variabile con una semplice traslazione, $t = x - r$, per riconoscere la derivata di un logaritmo,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-r} = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=x-r} = \big(\log|t|\big)\big|_{t=x-r} = \log|x-r|\,.$$

Nel secondo caso, con la stessa traslazione troviamo, per ogni $k \in \mathbb{N}$, la derivata di una potenza,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^{k+1}} = \int \frac{1}{t^{k+1}}\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=x-r} = -\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{t^k}\bigg|_{t=x-r} = -\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(x-r)^k}.$$

Nel terzo caso, osserviamo che il numeratore è la derivata del denominatore, quindi con la semplice sostituzione $t = (x-p)^2 + q^2$ ritroviamo la derivata di un logaritmo,

$$\int \frac{2(x-p)\,\mathrm{d}x}{(x-p)^2+q^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}\bigg|_{t=(x-p)^2+q^2} = \big(\log|t|\big)\big|_{t=(x-p)^2+q^2} = \log\big((x-p)^2+q^2\big).$$

Nel quarto caso, usiamo la stessa sostituzione del caso precedente e ci riconduciamo alla derivata di una potenza,

$$\int \frac{2(x-p)\,\mathrm{d}x}{\big((x-p)^2+q^2\big)^{k+1}} = \int \frac{1}{t^{k+1}}\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=(x-p)^2+q^2} = -\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{t^k}\bigg|_{t=(x-p)^2+q^2} =$$
$$= -\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k}. \quad (3)$$

Nel quinto caso, utilizzando la sostituzione $x = tq + p$ ci riconduciamo al caso in cui $p = 0$ e $q = 1$ e riconosciamo la derivata della funzione arcotangente,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-p)^2+q^2} = \int \frac{q\,\mathrm{d}t}{(tq)^2+q^2} = \frac{1}{q}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\frac{x-p}{q}} = \frac{1}{q}\arctan(t)\bigg|_{t=\frac{x-p}{q}} =$$
$$= \frac{1}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right).$$

L'ultimo caso risulta essere leggermente più impegnativo. Dato $k \in \mathbb{N}$, procediamo come nel caso precedente applicando la sostituzione $x = tq + p$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\big((x-p)^2+q^2\big)^{k+1}} = \int \frac{q\,\mathrm{d}t}{\big((tq)^2+q^2\big)^{k+1}} = \frac{1}{q^{2k+1}}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{k+1}}\bigg|_{t=\frac{x-p}{q}}.$$

Ci siamo così ricondotti al caso in cui $p = 0$ e $q = 1$. Ci rimane da calcolare una primitiva per $\frac{1}{(1+t^2)^{k+1}}$. Ricorriamo ad un trucco algebrico, osserviamo infatti che vale la seguente decomposizione

$$\frac{1}{(1+t^2)^{k+1}} = \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^{k+1}} = \frac{1}{(1+t^2)^k} - \frac{t}{2}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^{k+1}}. \quad (4)$$

Dai calcoli (3) fatti nel quarto caso, con $p = 0$ e $q = 1$, abbiamo che

$$\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{k+1}} = -\frac{1}{k(1+t^2)^k}.$$

Possiamo allora integrare l'identità (4) procedendo per parti,

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{k+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} - \int \frac{t}{2}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} + \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{k(1+t^2)^k} - \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t.$$

Ricaviamo così

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{k+1}} = \Big(1-\frac{1}{2k}\Big) \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} + \frac{t}{2k(1+t^2)^k}.$$

Questa formula ci permette di ottenere in modo iterativo una primitiva per $\frac{1}{(1+t^2)^{k+1}}$ conoscendo una primitiva di $\frac{1}{(1+t^2)^k}$. Ad esempio, per $k=1$,

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \Big(1-\frac{1}{2}\Big) \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \frac{t}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(1+t^2)}.$$

Per $k=2$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3} &= \Big(1-\frac{1}{4}\Big) \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} + \frac{t}{4(1+t^2)^2} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(1+t^2)}\right) + \frac{t}{4(1+t^2)^2} \\ &= \frac{3}{8}\arctan(t) + \frac{5t+3t^3}{8(1+t^2)^2}.\end{aligned}$$

Esempio 2.1. Calcoliamo una primitiva della funzione razionale semplice $\frac{6x+5}{x^2+4x+13}$. Abbiamo

$$x^2+4x+13 = (x+2)^2+3^2,$$

applicando la sostituzione $x = 3t-2$ otteniamo

$$\frac{6x+5}{x^2+4x+13} = \frac{6(x+2)-7}{(x+2)^2+9} = \frac{18t-7}{9(t^2+1)} = \frac{2t}{t^2+1} - \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{t^2+1}.$$

Integriamo, ricordandoci che $\mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}t$, e troviamo

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+13}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} - \frac{7}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 3\log(t^2+1) - \frac{7}{3}\arctan(t) + c.$$

Invertendo la sostituzione ricaviamo che $t = \frac{x+2}{3}$ e $t^2+1 = \frac{x^2+4x+13}{9}$, e dunque (cambiando costante di integrazione) otteniamo

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+13}\,\mathrm{d}x = 3\log(x^3+4x+13) - \frac{7}{3}\arctan\Big(\frac{x+2}{3}\Big) + c.$$

Esempio 2.2. Calcoliamo una primitiva della funzione razionale semplice $\frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2}$. Procediamo in modo simile all'esempio precedente, con la sostituzione $x = 3t-2$,

$$\frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2} = \frac{18t-7}{9^2(t^2+1)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2} - \frac{7}{81}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

Integriamo,

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} - \frac{7}{27}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t^2} - \frac{7}{27}\left(\frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(1+t^2)}\right)\\ &= -\frac{7}{54}\arctan(t) - \frac{7t+18}{54(1+t^2)}\\ &= -\frac{7}{54}\arctan\Big(\frac{x+2}{3}\Big) - \frac{7x+68}{18(x^2+4x+13)}.\end{aligned}$$

Esercizio 2.3. Calcola primitive per le seguenti funzioni razionali semplici:

$$\begin{array}{lll}\dfrac{2}{x}, & \dfrac{8}{x^3}, & \dfrac{3}{x+2},\\ \dfrac{3}{(x+3)^4}, & \dfrac{x+1}{x^2+x+1}, & \dfrac{x+1}{(x^2+x+1)^2},\\ \dfrac{x+1}{x^2-6x+13}, & \dfrac{1}{(1+x^2)^4}, & \dfrac{1}{(1+x^2)^5}.\end{array}$$

3 Decomposizione di funzioni razionali

Per poter ottenere la decomposizione di una funzione razionale propria in somme di funzioni razionali semplici, come descritto nel teorema 1.10, è necessario conoscere tutti gli zeri del polinomio al denominatore e anche la loro molteplicità algebrica, il che equivale a conoscere una fattorizzazione del polinomio come prodotto di fattori irriducibili. Esistono formule e algoritmi per determinare esattamente tutti gli zeri di qualsiasi polinomio con grado minore o uguale a 4, mentre per generici polinomi con grado maggiore o uguale a 5 ciò non è possibile. Il problema della fattorizzazione polinomiale è il punto debole nel processo di decomposizione, in quanto non possediamo strumenti che ci garantiscano di ottenerla in ogni caso. Andiamo pertanto a considerare alcuni esempi di decomposizione di funzioni razionali per le quali sia già nota la fattorizzazione del denominatore.

Esempio 3.1. Vediamo il caso di una funzione razionale propria il cui denominatore sia il prodotto di due fattori di primo grado distinti. Dati $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ con $p \neq q$ consideriamo la funzione razionale propria

$$\frac{ax+b}{(x-p)(x-q)}. \tag{5}$$

Il denominatore possiede due zeri distinti, p e q, entrambi di molteplicità 1; per il teorema 1.10 a ciascun zero del denominatore corrisponde una frazione semplice e pertanto avremo una decomposizione della funzione razionale (5) della forma

$$\frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} \tag{6}$$

Determiniamo i coefficienti A e B. Se le due espressioni (5) e (6) coincidono allora moltiplicando entrambe per $(x-p)(x-q)$ otteniamo due polinomi uguali,

$$ax+b = A(x-q) + B(x-p) = (A+B)x + (-qA - pB), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti dei due polinomi a destra e a sinistra devono essere gli stessi e dunque ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = a, \\ -qA - pB = b, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = \frac{ap+b}{p-q}$ e $B = -\frac{aq+b}{p-q}$. Otteniamo così la decomposizione

$$\frac{ax+b}{(x-p)(x-q)} = \frac{ap+b}{p-q} \cdot \frac{1}{x-p} - \frac{aq+b}{p-q} \cdot \frac{1}{x-q}.$$

Esempio 3.2. Vediamo ora una funzione razionale in cui il denominatore ha due radici reali distinte, una con molteplicità 1 e l'altra con molteplicità 2. Consideriamo

$$\frac{4x^2 - 3x - 47}{(x+2)(x-3)^2}. \tag{7}$$

Nella sua decomposizione come somma di funzioni razionali semplici allo zero semplice corrisponderà un termine e allo zero doppio ne corrisponderanno due; quindi cerchiamo una decomposizione della forma

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}. \tag{8}$$

Per determinare i coefficienti A, B e C moltiplichiamo entrambe le espressioni (7) e (8) per il polinomio $(x+2)(x-3)^2$; i due polinomi che otteniamo devono coincidere,

$$4x^2 - 3x - 47 = A(x-3)^2 + B(x+2)(x-3) + C(x+2).$$

Facendo i calcoli troviamo che

$$4x^2 - 3x - 47 = (A+B)x^2 + (-6A - B + C)x + (9A - 6B + 2C),$$

e dunque, per il principio di identità dei polinomi, ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 4, \\ -6A - B + C = -3, \\ 9A - 6B + 2C = -47, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = -1$, $B = 5$, $C = -4$. Pertanto avremo

$$\frac{4x^2 - 3x - 47}{(x+2)(x-3)^2} = -\frac{1}{x+2} + \frac{5}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2}.$$

Esempio 3.3. Vediamo un caso in cui il denominatore ha uno zero reale di molteplicità 2 e una coppia di zeri coniugati di molteplicità 1.

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 4x + 11}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Moltiplicando per i denominatori otteniamo

$$2x^3 - 2x^2 + 4x + 11 = A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Sviluppando i calcoli ed uguagliando i coefficienti dei due polinomi si arriva al sistema

$$\begin{cases} A + C = 2, \\ -A + B - 2C + D = -2, \\ 4A + C - 2D = 4, \\ -4A + 4B + D = 11, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = 0$, $B = 3$, $C = 2$, $D = -1$. Dunque,

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 4x + 11}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x-1}{x^2+4}.$$

Esempio 3.4. Vediamo un caso in cui il denominatore ha uno zero reale semplice e una coppia di zeri coniugati di molteplicità 2.

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 4x + 11}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

Moltiplicando per i denominatori otteniamo

$$2x^3 - 2x^2 + 4x + 11 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1).$$

Sviluppando i calcoli ed uguagliando i coefficienti dei due polinomi si arriva al sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -B + C = 2, \\ 8A + 4B - C + D = -2, \\ -4B + 4C - D + E = 4, \\ 16A - 4C - E = 11, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = \frac{3}{5}$, $B = -\frac{3}{5}$, $C = \frac{7}{5}$, $D = -3$, $E = -7$. Dunque,

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 4x + 11}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{3}{5(x-1)} - \frac{3x-7}{5(x^2+4)} - \frac{3x+7}{(x^2+4)^2}.$$

Il procedimento algebrico che abbiamo applicato in questi esempi lo possiamo schematizzare nel seguente modo:

1. Per prima cosa cerchiamo di ottenere la fattorizzazione in fattori irriducibili del denominatore della funzione razionale propria che vogliamo decomporre (negli esempi tale fattorizzazione era già fornita);

2. Dalla fattorizzazione ricaviamo informazioni su quali sono gli zeri del denominatore e quale è la loro molteplicità, in questo modo possiamo capire quanti sono e quale forma hanno i termini della decomposizione;

3. Moltiplicando tutto per il denominatore otteniamo due polinomi che dovranno coincidere;

4. Dalle uguaglianze dei coefficienti dei due polinomi ricaviamo un sistema lineare la cui soluzione ci fornisce i coefficienti della scomposizione.

Questo procedimento, è una strada che porta sicuramente al risultato, ma quando il numero dei termini è elevato può diventare lunga e faticosa. A volte si possono trovare alcune scorciatoie per ricavare i coefficienti della decomposizione.

Osservazione 3.5. Esiste un metodo abbastanza rapido per ricavare il coefficiente relativo alla componente corrispondente ad uno zero reale semplice. Sia $x = r$ uno zero semplice (ovvero con molteplicità 1) per il polinomio $D(x)$. Avremo che D si può fattorizzare nella forma $D(x) = (x - r)\widetilde{D}(x)$, dove $\widetilde{D}(x)$ è un polinomio che non si annulla in r. Inoltre nella decomposizione della funzione razionale propria $N(x)/D(x)$ comparirà solo un termine corrispondente allo zero r, della forma $\frac{A}{x-r}$. Avremo quindi

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(x-r)\widetilde{D}(x)} = \frac{A}{x-r} + \boxed{\begin{array}{c}\text{funzioni razionali semplici,}\\ \text{il cui denominatore}\\ \text{non si annulla in } r\end{array}}.$$

Moltiplicando a destra e a sinistra per il solo fattore $x - r$ troviamo che

$$\frac{N(x)}{\widetilde{D}(x)} = A + (x-r)\cdot \boxed{\begin{array}{c}\text{funzioni razionali semplici,}\\ \text{il cui denominatore}\\ \text{non si annulla in } r\end{array}}.$$

Valutando questa formula per $x = r$ il contributo dei termini nel riquadro sparisce, e rimane il valore del coefficiente cercato,

$$A = \frac{N(r)}{\widetilde{D}(r)}.$$

Esempio 3.6. Consideriamo la funzione razionale $\frac{x^2-2x+3}{x(x+1)(x-2)}$. Il denominatore possiede tre zeri semplici, 0, -1 e 2. La funzione razionale avrà dunque una decomposizione del tipo

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Moltiplicando per x e poi sostituendo $x = 0$ troviamo il valore di A,

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x-2)} = A + \frac{xB}{x+1} + \frac{xC}{x-2} \implies A = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 3}{(0+1)(0-2)} = -\frac{3}{2}.$$

Moltiplicando per $x + 1$ e poi sostituendo $x = -1$ troviamo il valore di B,

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-2)} = \frac{(x+1)A}{x} + B + \frac{(x+1)C}{x-2} \implies B = \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 3}{(-1)((-1)-2)} = 2.$$

Moltiplicando per $x - 2$ e poi sostituendo $x = 2$ troviamo il valore di C,

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+1)} = \frac{(x-2)A}{x} + \frac{(x-2)B}{x+1} + C \implies C = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 3}{2(2+1)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.7. Decomponi le seguenti funzioni razionali proprie come somma di funzioni razionali semplici.

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{2x-1}{x^2 - \pi x - 2\pi^2}, & \dfrac{x^2 + 2x}{(x+3)^2(x-4)}, & \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^3(x+3)}, \\
\dfrac{x+1}{x^3 - x^2 + x}, & \dfrac{x+1}{x^4 - x^3 + x^2}, & \dfrac{12x^3 - 60}{x^4 + 5x^2 + 4}, \\
\dfrac{2x^3 - 5x^2}{x^4 + 4x^2 + 4}, & \dfrac{120}{x(x-1)(x-2)(x-3)}, & \dfrac{120}{x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2}, \\
\dfrac{1}{x^4 + 1}, & \dfrac{1}{x^8 - 1}, & \dfrac{1}{x^8 + 1}.
\end{array}$$

Ora abbiamo sufficienti strumenti e conoscenze per poter calcolare le primitive di qualsiasi funzione razionale di cui sappiamo fattorizzare il polinomio al denominatore. Vediamo alcuni esempi concreti, calcolati utilizzando diversi metodi a nostra disposizione.

Esempio 3.8. Calcoliamo una primitiva di $\frac{x^7}{x^4-1}$. Osserviamo che $x^7 = x^4 \cdot x^3$ e la derivata di x^4 è $4x^3$. Procedendo con la sostituzione $x^4 = y$ troviamo che

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^7}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x^4 - 1} \cdot 4x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{y}{y-1}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=x^4} = \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)\mathrm{d}y\bigg|_{y=x^4} = \frac{1}{4}\left(y + \log|y-1|\right)\big|_{y=x^4} = \frac{1}{4}\left(x^4 + \log\left|x^4 - 1\right|\right).
\end{aligned}$$

Esempio 3.9. Calcoliamo una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^4-1}$. La scorciatoia dell'esempio precedente, questa volta non si può applicare. Giocando con i prodotti notevoli troviamo la seguente fattorizzazione in polinomi irriducibili,

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1).$$

Ne segue che $f(x)$ avrà una decomposizione con la seguente forma,

$$f(x) = \frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}. \tag{9}$$

Osserviamo che f è una funzione pari, $f(x) = f(-x)$, e dunque avremo anche che

$$\frac{1}{x^4-1} = f(-x) = \frac{A}{-x-1} + \frac{B}{-x+1} + \frac{C(-x)+D}{x^2+1} = \frac{-B}{x-1} + \frac{-A}{x+1} + \frac{(-C)x+D}{x^2+1}. \tag{10}$$

Dal confronto dei coefficienti delle decomposizioni (9) e (10) deduciamo che $B = -A$ e che $C = -C$, ovvero $C = 0$. Inoltre siccome $x = 1$ è uno zero semplice di $x^4 - 1$, il valore di A si può ottenere moltiplicando (9) per $x - 1$ e poi sostituendo $x = 1$,

$$A = \left.\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\right|_{x=1} = \frac{1}{4}.$$

Dunque $B = -A = -\frac{1}{4}$, e troviamo così che

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big) + \frac{D}{x^2+1},$$

sostituendo ora il valore $x = 0$ in quest'ultima espressione troviamo,

$$-1 = \frac{1}{4}\big((-1) - 1\big) + D,$$

e dunque $D = -\frac{1}{2}$. Abbiamo così trovato che

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}.$$

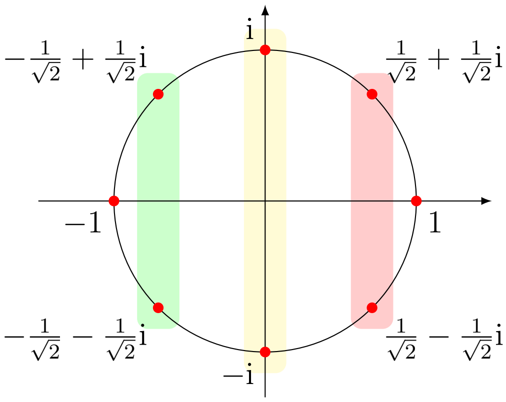
Integrando queste frazioni razionali semplici otteniamo una primitiva F della funzione f,

$$F(x) = \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\arctan(x) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan(x).$$

Esempio 3.10. Calcoliamo una primitiva di $\frac{x^{10}}{x^8-1}$. Siccome il numeratore ha grado maggiore del denominatore scomponiamolo nella somma di un polinomio e una funzione razionale propria, per farlo possiamo eseguire la divisione tra i polinomi, oppure, visto che si tratta di polinomi abbastanza semplici, possiamo manipolare l'espressione con qualche passaggio algebrico,

$$\frac{x^{10}}{x^8-1} = \frac{x^2(x^8-1)+x^2}{x^8-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^8-1}.$$

Una primitiva di x^2 è $\frac{1}{3}x^3$. Cerchiamo ora una primitiva di $\frac{x^2}{x^8-1}$. Per fattorizzare il denominatore osserviamo che gli zeri in campo complesso del polinomio z^8-1 coincidono con le radici ottave dell'unità. Tali radici formano i vertici di un ottagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine del piano complesso. Si tratta dei due numeri reali 1 e -1 delle tre coppie di numeri complessi coniugati $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$, $\pm\mathrm{i}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$.



Avendo trovato tutti gli zeri del denominatore, possiamo scrivere la sua fattorizzazione,

$$x^8-1=(x-1)(x+1)\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+1\right)\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)$$

Cerchiamo quindi una scomposizione della forma:

$$\frac{x^2}{x^8-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Siccome si tratta di una funzione pari, scambiano x con $-x$ troviamo che

$$\frac{x^2}{x^8-1}=\frac{-B}{x-1}+\frac{-A}{x+1}+\frac{-Gx+H}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{-Ex+F}{x^2+1}+\frac{-Cx+D}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Confrontando le ultime due uguaglianze ricaviamo che $B=-A$, $G=-C$, $H=D$ e $E=0$. Dunque

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^8-1}&=\frac{A}{x-1}-\frac{A}{x+1}+\frac{Cx+D}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{F}{x^2+1}+\frac{-Cx+D}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}=\\&=\frac{2}{x^2-1}\cdot A-\frac{2\sqrt{2}x^2}{x^4+1}\cdot C+\frac{2(x^2+1)}{x^4+1}\cdot D+\frac{1}{x^2+1}\cdot F.\end{aligned}$$

Essendo $x=1$ uno zero semplice possiamo calcolare A facilmente moltiplicando (11) per $x-1$ e poi valutando il risultato con $x=1$. Siccome $x^8-1=(x-1)\sum_{k=0}^{7}x^k$, otteniamo

$$A=\left.\frac{x^2}{\sum_{k=0}^{7}x^k}\right|_{x=1}=\frac{1}{8}.$$

Ricaviamo allora che

$$-\frac{2\sqrt{2}x^2}{x^4+1}\cdot C+\frac{2(x^2+1)}{x^4+1}\cdot D+\frac{1}{x^2+1}\cdot F=\frac{x^2}{x^8-1}-\frac{1}{4(x^2-1)}.$$

Valutando quest'espressione in $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ e $x = \sqrt{3}$ troviamo che C, D, F devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 2D + F = \dfrac{1}{4}, \\ -\dfrac{4\sqrt{2}}{5}C + \dfrac{6}{5}D + \dfrac{1}{3}F = -\dfrac{7}{60}, \\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{5}C + \dfrac{4}{5}D + \dfrac{1}{4}F = -\dfrac{7}{80}, \end{cases}$$

che ha come soluzione $C = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $D = 0$, $F = \frac{1}{4}$. Possiamo così ricavare tutti i coefficienti,

$$A = \frac{1}{8}, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad C = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = \frac{1}{4}, \quad G = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad H = 0,$$

e scrivere in modo completo la decomposizione cercata,

$$\frac{1}{x^8 - 1} = \frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{8}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{x}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{x}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Calcoliamo le primitive dei singoli termini. Prima quelli più immediati,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \log|x-1|\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \log|x+1|\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan(x),$$

Per i rimanenti usiamo le sostituzioni $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(y \mp 1)$,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \int \frac{y \mp 1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\sqrt{2}x\pm 1}.$$

Osserviamo che

$$\int \frac{y \mp 1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2+1} \mp \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{1}{2}\log(y^2+1) \mp \arctan(y).$$

Quando $y = \sqrt{2}x \pm 1$ abbiamo

$$\log(y^2+1) = \log\bigl(2(x^2 \pm \sqrt{2}x + 1)\bigr) = \log\bigl(x^2 \pm \sqrt{2}x + 1\bigr) + \log 2,$$

e dunque

$$\int \frac{x}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\bigl(x^2 + \sqrt{2}x + 1\bigr) - \arctan\bigl(\sqrt{2}x + 1\bigr),$$

$$\int \frac{x}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\bigl(x^2 - \sqrt{2}x + 1\bigr) - \arctan\bigl(\sqrt{2}x - 1\bigr).$$

Mettiamo insieme tutte le parti e otteniamo la primitiva cercata

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{10}\,\mathrm{d}x}{x^8-1} = \int x^2\,\mathrm{d}x + \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^8-1} = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{4}\arctan(x) + \\ &\quad + \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\bigl(x^2+\sqrt{2}x+1\bigr) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}x+1\bigr) + \\ &\quad - \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\bigl(x^2-\sqrt{2}x+1\bigr) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}x-1\bigr) = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{4}\arctan(x) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}x-1\bigr) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}x+1\bigr).\end{aligned}$$

Esercizio 3.11. Calcola le primitive delle seguenti funzioni razionali

$$\begin{array}{lll} \dfrac{x^3}{x^2+x-2}, & \dfrac{x^2}{x^2+4}, & \dfrac{x^3+x^2+2}{x^3(x^2+2)}, \\ \dfrac{x^3+2x^2-x+2}{x^3+8}, & \dfrac{x^6}{(x^2+4)^2}, & \dfrac{x^7+1}{x^5+1}, \\ \dfrac{x^5}{x^6-1}, & \dfrac{1}{x^6-1}, & \dfrac{1}{x^6+1}. \end{array}$$