Analisi Matematica 1B - Lezione 13

Integrazione per sostituzione

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 26 aprile 2020)

1 Derivate di funzioni composte

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sull'intervallo I e sia $F\colon I \to \mathbb{R}$ una sua primitiva, $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Sia inoltre $\varphi\colon J \to I$ una funzione di classe C^1 definita sull'intervallo J a valori nell'intervallo I. Possiamo considerare le funzioni composte $f \circ \varphi(t) = f(\varphi(t))$ e $F \circ \varphi(t) = F(\varphi(t))$ definite per $t \in J$. Per la formula della derivata di funzioni composte abbiamo che

$$D\big[F(\varphi(t))\big] = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t), \qquad \forall t \in J. \tag{1}$$

Ciò significa che la funzione composta $F \circ \varphi$ è una primitiva della funzione $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Usando il linguaggio degli integrali indefiniti possiamo tradurre queste informazioni scrivendo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \tag{2}$$

per dire che F è primitiva di f, e

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c, \tag{3}$$

per dire che $F \circ \varphi$ è primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$; dove indichiamo con c una qualsiasi costante additiva.

Esempio 1.1. Se prendiamo il caso di $f(x) = \mathrm{e}^x$ per $x > 0$, che coincide con una sua primitiva $F(x) = \mathrm{e}^x$, allora la formula (3) ci dice che per ogni funzione φ di classe C^1 abbiamo

$$\int \mathrm{e}^{\varphi(t)}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\varphi(t)} + c.$$

Ad esempio, con $\varphi(t) = -t^2$ otteniamo

$$\int 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \mathrm{e}^{-t^2}(-2t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t^2} + c.$$

Esempio 1.2. Se prendiamo il caso di $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, che ha come primitiva $F(x) = \log(x)$, allora la formula (3) ci dice che per ogni funzione φ di classe C^1 a valori positivi abbiamo

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \log\bigl(\varphi(t)\bigr) + c.$$

Ad esempio, con $\varphi(t) = 1 + t^2$ otteniamo

$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \log(1+t^2) + c.$$

Esercizio 1.3. Determina quali formule di integrazione si ricavano dalla formula (3) nei casi in cui f sia una delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^p$, per $x > 0$ e $p \neq -1$;
2. $f(x) = \cos(x)$;
3. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Esercizio 1.4. Dopo aver determinato una primitiva di $(\tan x)^2$ determina una primitiva della funzione

$$x\bigl(\tan(x^2)\bigr)^2.$$

2 Integrazione per sostituzione diretta

Proviamo ad esaminare il legame che intercorre tra le due formule (2) e (3). Abbiamo visto che la prima implica la seconda. A livello di scrittura, se nell'uguaglianza (2) al posto di x "sostituiamo" la funzione $\varphi(t)$ e al posto del simbolo $\mathrm{d}x$ sostituiamo l'espressione $\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ ecco che otteniamo l'uguaglianza (3),

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c} \quad \& \quad \boxed{\substack{x=\varphi(t) \\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}} \implies \boxed{\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c}.$$

L'integrale nel riquadro di destra si ottiene sostituendo $\varphi(t)$ alla x nella primitiva corrispondende all'integrale nel riquadro a sinistra. Possiamo esprimere questa cosa scrivendo

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)}.} \tag{4}$$

Questa formula ci dice che per trovare una primitiva di una funzione che si presenta nella forma

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t),$$

per certe funzioni f e φ, basta trovare una primitiva di f e comporla con φ.

La scelta di x e t come nomi delle variabili usate negli integrali è arbitraria, è chiaro che possiamo scegliere qualsiasi nome per indicarle, ad esempio possiamo riscrivere (4) usando x al posto di t e y al posto di x,

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\varphi(x)}.$$

Possiamo ottenere una formula analoga a (4) anche per gli integrali definiti. Siano a e b sono due punti dell'intervallo J sul quale è definita φ, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo insieme alla formula (3) troviamo che

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Siccome $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ sono due punti dell'intervallo I sul quale è definita f, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo insieme alla formula (2) abbiamo anche che

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Dunque ricaviamo che

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Esempio 2.1. Proviamo a ricavare una primitiva di $g(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. Osserviamo che la derivata di $\varphi(x) = x^2$ è $\varphi'(x) = 2x$ e dunque possiamo scrivere

$$g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\varphi(x)}\varphi'(x).$$

Applichiamo il metodo di integrazione per sostituzione, tramite le sostituzioni

$$\varphi(x) = x^2 \longrightarrow y, \qquad \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x \longrightarrow \mathrm{d}y,$$

e otteniamo

$$\begin{aligned}\int g(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-\varphi(x)}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=x^2} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\Big|_{y=x^2} + c = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c.\end{aligned}$$

Calcoliamo anche un integrale definito con il metodo di sostituzione.

$$\begin{aligned}\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^3 \mathrm{e}^{-\varphi(x)}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\varphi(2)}^{\varphi(3)} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\int_4^9 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_{y=4}^{y=9} = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-9} + \mathrm{e}^{-4}\right) = \frac{\mathrm{e}^5 - 1}{2\mathrm{e}^9}.\end{aligned}$$

Esempio 2.2. Calcoliamo sempre con il metodo di sostituzione una primitiva di $\frac{\cos t}{1+(\sin t)^2}$. Osserviamo che $\cos t$ è la derivata di $\sin t$, e questo ci suggerisce di utilizzare la sostituzione $x = \sin t$ con fattore differenziale $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1+(\sin t)^2} = \int \frac{1}{1+(\sin t)^2} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\sin t} =$$
$$= (\arctan x)|_{x=\sin t} + c = \arctan(\sin t) + c.$$

Calcoliamo anche un integrale di Riemann per la stessa funzione integranda, ad esempio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1+(\sin t)^2} = \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$
$$= [\arctan x]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Osservazione 2.3. Per poter applicare questo metodo di integrazione per sostituzione *diretta* è necessario riconoscere nella funzione integranda una struttura della forma (1) corrispondente alla derivata di qualche funzione composta. Ciò richiede una buona familiarità con il calcolo delle derivate, e anche una buona capacità di osservazione nel leggere le espressioni che descrivono le funzioni integrande. È un arte che si sviluppa con la pratica e l'esercizio.

Esempio 2.4. Calcoliamo le primitive della funzione tangente.

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\cos x} =$$
$$= -\big(\log|y|\big)\big|_{y=\cos x} + c = -\log|\cos x| + c.$$

Dati $\lambda, \mu \in R$ con $\lambda \neq 0$ consideriamo la funzione $\varphi(t) = \lambda t + \mu$, che consiste in un combinazione di un'omotetia e una traslazione. In questo caso abbiamo $\varphi'(t) = \lambda$. La formula (4) ci dice che

$$\int f(\lambda t + \mu)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\lambda t+\mu}.$$

Esempio 2.5.

$$\int \big(\tan(3t-5)\big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int (\tan x)^2\,\mathrm{d}x\Big|_{x=3t-5} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\int \big(1+(\tan x)^2\big)\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x\right)\Big|_{x=3t-5} =$$
$$= \frac{1}{3}\,\big((\tan x) - x\big)\big|_{x=3t-5} + c =$$
$$= \frac{1}{3}\big(\tan(3t-5) - 3t + 5\big) + c =$$
$$= \frac{1}{3}\tan(3t-5) - t + \widetilde{c}.$$

Esercizio 2.6. Applicando il metodo di integrazione per sostituzione diretta calcola i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{4\mathrm{e}^{4x}}{1+\mathrm{e}^{4x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{(\log x)^3}{x\,(1+(\log x)^4)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \log(1+2x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \tan\Big(\frac{x-\pi}{4}\Big)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \tanh(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int (\sin x)^2 \cos x\,\mathrm{d}x, \qquad \int (\cos x)^3\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 2.7. Calcola, utilizzando il metodo di sostituzione, i seguenti integrali definiti.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{\cosh x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-1}^4 (1-2x)^3\,\mathrm{d}x, \qquad \int_3^8 \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^5 x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_2^3 \frac{3x^2+2}{x^3+2x-11}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(\pi-2x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_4^9 \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 \frac{3x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\log 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)(\sin x)}{2+(\cos x)^2-(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

3 Integrazione per sostituzione inversa

Consideriamo ancora una funzione continua $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua definita sull'intervallo I e una sua primitiva $F\colon I \to \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Supponiamo ora che la funzione $\varphi\colon J \to I$ di classe C^1 definita sull'intervallo J sia biettiva , dunque **invertibile**, e che la sua inversa sia la funzione continua $\psi\colon I \to J$ definita sull'intervallo I; pertanto $x = \varphi(t)$ se e solo se $t = \psi(x)$ per ogni $x \in I$ e ogni $t \in J$, ovvero $\varphi(\psi(x)) = x$ per ogni $x \in I$. Abbiamo visto che la funzione $G\colon J \to \mathbb{R}$ definita da $G(t) := F(\varphi(t))$ è primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, Dunque

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c.$$

Componendo G con l'inversa ψ di φ otteniamo la funzione F,

$$G(\psi(x)) = F(\varphi(\psi(x))) = F(x), \qquad \forall x \in I;$$

Usando il linguaggio degli integrali indefiniti ciò significa che

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\psi(x)} = G(\psi(x)) + c = F(x) + c = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dunque ricaviamo che

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\psi(x)},} \tag{5}$$

dove ψ è la funzione inversa di φ. Si tratta di fatto della stessa formula (4), solo che questa volta invece della sostituzione $x = \varphi(t)$ usiamo la sostituzione inversa $t = \psi(x)$. Per gli integrali definiti, usando il teorema fondamentale del calcolo in questo caso otteniamo

$$\boxed{\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(A)}^{\psi(B)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

La formula (5) sembra essere la stessa di prima (4). La differenza con il metodo di sostituzione diretta è che ora non devo riconoscere una struttura per capire quale sostituzione usare, posso applicare qualsiasi sostituzione, purchè si tratti di una funzione invertibile; prima l'integrando si trasformava da $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ a $f(x)$, ora avviene il processo inverso da $f(x)$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. L'utilità di ciò si ha quando l'espressione $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ risulta più semplice da integrare rispetto a $f(x)$. La difficoltà nell'applicare il metodo di sostituzione inversa sta nell'individuare quale possa essere la sostituzione che renderà più semplice l'integrazione per il nuovo integrando.

Esempio 3.1. Calcoliamo una primitiva di $f(x) := \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ per $x \geqslant 0$. La funzione f non manifesta una struttura simile alla derivata di una funzione composta. L'esponente sembra suggerirci di provare comunque ad utilizzare la sostituzione

$$t = \psi(x) := \sqrt{x}, \qquad x \geqslant 0,$$

che è la funzione inversa di

$$x = \varphi(t) := t^2, \qquad t \geqslant 0.$$

Nella sostituzione il termine $\mathrm{d}x$ viene sostituito da $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t$. Otteniamo così

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t\, 2t\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\sqrt{x}}.$$

Ora il nuovo integrale è uno di quelli che sappiamo calcolare procedendo per parti

$$\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \int 1\cdot \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + c = (t-1)\mathrm{e}^t + c.$$

E dunque, cambiando costante, ma indicandola sempre con c, otteniamo

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\,(t-1)\mathrm{e}^t\big|_{t=\sqrt{x}} + c = 2\big(\sqrt{x}-1\big)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c.$$

Esempio 3.2. Calcoliamo l'integrale definito

$$A := \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

Applichiamo la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$ la cui inversa è $x = \log t$, con $t > 0$; al termine differenziale $\mathrm{d}x$ sostituiamo $\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$; per gli estremi di integrazione, ad $x = 0$ corrisponde $t = \mathrm{e}^0 = 1$ e ad $x = 1$ corrisponde $t = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Otteniamo

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

In questo modo è sparito il termine esponenziale dall'integrando, e ci siamo ricondotti all'integrale di una funzione razionale. Vedremo nelle prossime lezioni come affrontare in generale il calcolo di primitive di funzioni razionali. Per il momento osserviamo che possiamo scrivere

$$\frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t},$$

e dunque

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \big[\log t\big]_1^{\mathrm{e}} - [\log(1+t)]_1^{\mathrm{e}} =$$
$$= \log(\mathrm{e}) - \log(1) - \log(1+\mathrm{e}) + \log(1+1) = \log\left(\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right).$$

Esercizio 3.3. Calcola i seguenti integrali applicando le sostituzioni indicate

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x, \qquad t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}};$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x, \qquad t = \sqrt{2x-1};$$
$$\int \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\,dx, \qquad t = \sqrt{x^2+1}+x;$$
$$\int_{-1}^{4} \frac{3x}{\sqrt{8-x}}\,\mathrm{d}x, \qquad t = \sqrt{8-x};$$
$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(3-x)}}, \qquad t = \arcsin\left(\frac{2}{3}x - 1\right).$$