Analisi Matematica 1B - Lezione 12

Integrazione per parti

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 20 aprile 2020)

Il teorema fondamentale del calcolo ci assicura che se F è una primitiva della funzione f sull'intervallo $[a, b]$, ovvero F è derivabile con derivata $F' = f$, cosa che possiamo scrivere anche utilizzando la notazione dell'integrale indefinito,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

allora per calcolare l'integrale di Riemann di f possiamo usare la formula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

È importante dunque saper trovare primitive delle funzioni che si vogliono integrare. Il calcolo di derivate, con tutte le regole che abbiamo studiato nel corso del primo semestre, è un processo abbastanza meccanico e diretto quando applicato a strutture algebriche ottenute tramite composizioni di blocchi elementari. Nel calcolo delle primitive invece non possediamo strumenti e formule che garantiscano in modo completo la semplificazione di integrali per ogni funzione integranda ottenuta componendo blocchi elementari. Se derivare richiede tecnica nel sapere applicare le regole, integrare richiede arte nel saper riconoscere strutture.

1 Riconoscimento diretto di primitive

Ogni volta che calcoliamo una derivata automaticamente otteniamo anche il calcolo di una primitiva. Indichiamo con $D[\cdot]$ l'operatore di derivazione. Se $D[f(x)] = g(x)$ per x in certo intervallo I, allora $\int g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c$ sull'intervallo I, con c costante additiva arbitraria. Ecco che allora possiamo ripassare l'elenco di tutte le derivate di funzioni elementari e rileggerle con il linguaggio delle primitive.

Potenze. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $D[x^n] = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; se mettiamo $n+1$ al posto di n otteniamo $D[x^{n+1}] = (n+1)x^n$, dividendo per $n+1$ troviamo $D[\frac{1}{n+1}x^{n+1}] = x^n$ e dunque

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

In modo simile, se ci restringiamo all'intervallo $]0, +\infty[$ possiamo considerare qualsiasi esponente $p \in \mathbb{R}$ con $p + 1 \neq 0$ e ottenere

$$\int x^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + c, \quad \text{per } x > 0 \text{ e per ogni } p \neq -1.$$

Il caso particolare $p = -\frac{1}{2}$ corrisponde al caso della derivata della radice quadrata, $D[2\sqrt{x}] = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e dunque

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + c, \qquad \text{per } x > 0.$$

Esponenziali. Per ogni $b > 0$ abbiamo $D[b^x] = b^x \log(b)$; quando $b \neq 1$ si ha $\log(b) \neq 0$ e dunque $D[b^x / \log(b)] = b^x$, dunque

$$\int b^x \, \mathrm{d}x = \frac{b^x}{\log(b)} + c.$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo $D[\mathrm{e}^{\lambda x}] = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$; quando $\lambda \neq 0$ ricaviamo

$$\int \mathrm{e}^{\lambda x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + c.$$

Come casi particolari abbiamo

$$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c, \qquad \int \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + c.$$

Logaritmi. Siccome $D[\log(x)] = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, e anche $D[\log(-x)] = \frac{1}{x}$ per $x < 0$, otteniamo

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \log|x| + c, \quad \text{per } x \neq 0.$$

Funzioni trigonometriche. Dalle derivate $D[\sin(x)] = \cos(x)$ e $D[-\cos(x)] = \sin(x)$ ricaviamo che

$$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + c, \qquad \int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + c.$$

Da $D[\tan(x)] = 1 + \big(\tan(x)\big)^2$ possiamo dedurre che

$$\int \Big(1 + \big(\tan(x)\big)^2\Big) \, \mathrm{d}x = \tan(x) + c.$$

Per il calcolo di una primitiva di $\tan(x)$ dobbiamo attendere la prossima lezione.

Esercizio 1.1. Quale calcolo di primitive puoi dedurre dalle derivate delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche, dalle derivate delle funzioni iperboliche, dalle derivate delle funzioni inverse delle funzioni iperboliche?

Esercizio 1.2. Determina le primitive delle seguenti funzioni partendo dall'analisi delle derivate di funzioni ad esse simili o affini e modificandole in modo opportuno:

$$(x-1)^5, \qquad \frac{1}{(3x-2)^4}, \qquad \cos(\pi x - 1),$$
$$\sqrt{2x+1}, \qquad \log(1-x), \qquad \mathrm{e}^{3-5x},$$
$$x\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad \frac{1}{x\log(x)}, \qquad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2 Proprietà di linearità per l'integrale indefinito

L'operazione di derivazione è un'operazione lineare: se F, G sono derivabili e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$D[\lambda F(x) + \mu G(x)] = \lambda D[F(x)] + \mu D[G(x)].$$

Ne segue che se F è primitiva di f e G è primitiva di g, allora $\lambda F + \mu G$ è primitiva di $\lambda f + \mu g$, nel linguaggio degli integrali indefiniti ciò si traduce in

$$\int \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Osserviamo che non è necessario indicare costanti di integrazione, in quanto esse sono già comprese negli integrali indefiniti sia destra che a sinistra dell'uguale.

Questa proprietà ci permette di integrare funzioni che sono somme di parti semplici di cui conosciamo le primitive. Ad esempio, le primitive dei polinomi sono ancora polinomi,

$$\begin{aligned}\int \left(x^3 - 4x^2 + 5x - 3\right)\,\mathrm{d}x &= \int x^3\,\mathrm{d}x - 4\int x^2\,\mathrm{d}x + 5\int x\,\mathrm{d}x - 3\int 1\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + c.\end{aligned}$$

Applicando la linearità possiamo trovare facilmente primitive del coseno e seno iperbolici,

$$\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = \sinh(x),$$
$$\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = \cosh(x).$$

Esercizio 2.1. Calcola i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{x^8-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^8-1}{x-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \left(\mathrm{e}^{3x}-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 2.2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ calcola il valore dell'integrale

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\,\mathrm{d}x.$$

3 Integrazione per parti

La regola di Liebniz per la derivata del prodotto di due funzioni dice che se f e g sono funzioni derivabili allora

$$D\,[fg] = f'g + fg',$$

ovvero il prodotto fg è una primitiva di $f'g + fg'$, nel linguaggio degli integrali indefiniti ciò si traduce con

$$\int \big(f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\big)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) + c.$$

Per la proprietà di linearità otteniamo

$$\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) + c.$$

Portando a destra uno dei due integrali ricaviamo

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

con la costante di integrazione c che viene assorbita nell'integrale. La formula (1) descrive il metodo di *integrazione per parti*; essa da sola non fornisce una risoluzione immediata dell'integrale a sinistra, ma lo trasforma in un altro integrale, con una diversa funzione integranda. Ci dice che una primitiva del prodotto fg' si può ottenere dalla differenza tra il prodotto fg e una primitiva del prodotto $f'g$. Applicando questa formula al calcolo di integrali definiti, tramite il teorema fondamentale del calcolo, otteniamo che quando f e g sono funzioni di classe C^1 su $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Esempio 3.1. Proviamo a determinare una primitiva del prodotto $\frac{1}{x^2} \cdot \log(x)$. Sappiamo che $\frac{1}{x^2}$ è la derivata di $-\frac{1}{x}$ e che $\log(x)$ ha come derivata $\frac{1}{x}$. Integriamo per parti applicando la formula (1) con $g(x) = -\frac{1}{x}$ e $f(x) = \log(x)$. Dunque,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} \cdot \log(x)\,\mathrm{d}x &= \int D\Big[-\frac{1}{x}\Big] \cdot \log(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \log(x) - \int \Big(-\frac{1}{x}\Big) \cdot D[\log(x)]\,\mathrm{d}x = -\frac{\log(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x} + c = -\frac{1 + \log(x)}{x} + c.\end{aligned}$$

Esempio 3.2. Calcoliamo l'integrale $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. La derivata di x è la costante 1, mentre una primitiva di e^{-x} è $-\mathrm{e}^{-x}$. Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-x\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-x\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 + \big[-\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Esempio 3.3. Si può integrare per parti anche quando l'integrando non si presenta come prodotto, se conviene un fattore costante 1 lo si trova sempre. Ad esempio, nel calcolo della primitiva di $\log(x)$ abbiamo

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = \int 1{\cdot}\log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - \int x{\cdot}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\log(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\log(x) - x + c.$$

Esempio 3.4. A volte bisogna ripetere l'integrazione per parti più volte per riuscire a calcolare una primitiva. Ogni volta che deriviamo un polinomio otteniamo un polinomio di grado inferiore, mentre integrando funzioni come seni, coseni, o esponenziali, otteniamo funzioni dello stesso tipo, senza grosse semplificazioni o complicazioni. E dunque ad esempio, nel calcolo della primitiva di una funzione come $x^2\sin(x)$ ci aspettiamo che con un paio di integrazioni per parti il fattore polinomiale sparisca mentre il fattore trigonometrico rimanga un fattore di tipo trigonometrico.

$$\begin{aligned}
\int x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x &= x^2(-\cos(x)) - \int (2x)(-\cos(x))\,\mathrm{d}x = \\
&= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -x^2\cos(x) + 2\left(x\sin(x) - \int 1\sin(x)\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= -x^2\cos(x) + 2\,(x\sin(x) + \cos(x)) = \\
&= (2 - x^2)\cos(x) + 2x\sin(x).
\end{aligned}$$

Esempio 3.5. Può capitare che ripetendo l'operazione di integrazione per parti più volte ci si ritrovi nel membro di destra con lo stesso integrale di partenza, l'importante è che riportandolo a sinistra esso non si cancelli:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \sin(x)\mathrm{e}^x - \int \cos(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \\
&= \sin(x)\mathrm{e}^x - \left(\cos(x)\mathrm{e}^x + \int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \big(\sin(x) - \cos(x)\big)\mathrm{e}^x - \int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ne ricaviamo che

$$2\int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \big(\sin(x) - \cos(x)\big)\mathrm{e}^x + c,$$

e dunque

$$\int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sin(x) - \cos(x)\big)\mathrm{e}^x + c.$$

Esempio 3.6. Qualche volta possiamo servirci di qualche semplice ma ingegnoso trucco per modificare le funzioni integrande:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-1+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

e quindi, portando a sinistra l'ultimo integrale e ricordando che $D[\arcsin(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, otteniamo

$$
\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) + c.
$$

Esercizio 3.7. Calcola i seguenti integrali indefiniti:

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\int x\log(x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int (3x-2)\cos(x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \big(\log x\big)^2\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \log(1+x^2)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int x\sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int \arccos x\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \sin(3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int 2x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{array}
$$

Esercizio 3.8. Calcola i seguenti integrali definiti:

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\int_0^1 x\log(x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_1^2 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |3x-\pi|\cos(x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \big(\log x\big)^2\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_{-1}^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_0^{2\pi} x\,|\sin(x)|\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\displaystyle\int_{-1}^1 \arccos x\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_{-1}^1 2x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{array}
$$

Esercizio 3.9. Determina la primitiva di $x\cos(x) - \big(\sin(x)\big)^2$ che si annulla per $x = \pi$.

Esercizio 3.10. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, determina primitive delle funzioni

$$
f_n(x) := \big(\log x\big)^n + n\big(\log x\big)^{n-1}, \qquad g_n(x) := \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}.
$$