Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 12

Derivate parziali e differenziabilità

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 3 luglio 2021)

Sappiamo che la derivata di una funzione di una variabile fornisce informazioni utili per capire come variano i valori della funzione rispetto a variazioni infinitesimali del parametro da cui dipende. Quando una funzione dipende da più parametri ci interessa capire come descrivere la variazione dei valori della funzione in termini delle variazioni dei vari parametri. Le derivate parziali ci permettono di capire l'effetto sulla funzione di variazioni di un singolo parametro. Il concetto di differenziabilità, che è legato alla possibilità di ottenere approssimazioni del primo ordine, ci permette di descrivere a livello infinitesimale, la variazione di una funzione rispetto a tutti i parametri.

1 Derivate parziali

Definizione 1.1. Sia f una funzione scalare di n variabili, sia $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un punto interno al dominio di f, e sia k un indice intero compreso tra 1 e n. La *derivata parziale* rispetto alla variabile x_k di f è la derivata della funzione di una sola variabile ottenuta fissando tutte le componenti da cui dipende f tranne la componente k-esima. Più precisamente, consideriamo la parametrizzazione della retta parallela all'asse x_k in $\mathbb{R}^n$ passante per il punto $\boldsymbol{x}$ data da

$$\boldsymbol{\gamma}(t) := (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_k.$$

Se componiamo f con $\boldsymbol{\gamma}$ otteniamo una funzione di una variabile,

$$\varphi(t) := f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_k).$$

La derivata in 0 di questa funzione φ, quando esiste, definisce il valore della derivata parziale di f rispetto alla variabile x_k calcolata nel punto $\boldsymbol{x}$; possiamo esprimere questa derivata come limite di un rapporto incrementale

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) := \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{x})}{t}. \tag{1}$$

Per indicare le derivate parziali si possono usare diverse notazioni, le più comuni sono

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}), \qquad \partial_{x_k} f(\boldsymbol{x}), \qquad f_{x_k}(\boldsymbol{x}).$$

Per una funzione scalare $f(x, y)$ di due variabili possiamo avere due derivate parziali: rispetto ad x o rispetto ad y,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t};$$

esse coincidono con le derivate delle funzioni di *una* variabile definite da

$$\xi \mapsto f(\xi, y), \qquad \eta \mapsto f(x, \eta)$$

calcolate in $\xi = x$ e $\eta = y$. Le derivate parziali dunque si possono calcolare come delle normalissime derivate di funzioni di una variabile, considerando tutte le altre variabili come delle costanti.

Esempio 1.2. Consideriamo la funzione $f(x, y) := x^2 + xy^3 + y^5$. Calcoliamo le sue derivate parziali nel punto $(4, 2)$. Derivando rispetto ad x consideriamo i termini y^3 e y^5 come costanti,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 1 \cdot y^3 + 0 = 2x + y^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(4, 2) = 2 \cdot 4 + 2^3 = 16.$$

Derivando rispetto ad y consideriamo i termini x^2 e x come costanti,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 + x \cdot 3y^2 + 5y^4 = 3xy^2 + 5y^4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4, 2) = 3 \cdot 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^4 = 128.$$

Esempio 1.3. Non sempre le derivate parziali esistono. Consideriamo la funzione scalare definita su $\mathbb{R}^2$ da $f(x, y) = (1 + x^2)\,|y|$. Siccome $f(x, 0) = 0$ per ogni x, abbiamo che $\partial_x f(0, 0) = 0$; invece, siccome $f(0, y) = |y|$ per ogni y, abbiamo che la derivata parziale $\partial_y f(0, 0)$ non è definita (in quanto la funzione $y \mapsto |y|$ non è derivabile nell'origine).

Definizione 1.4. Quando per una funzione scalare f di n variabili sono ben definite tutte le sue derivate parziali in punto $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ possiamo definire il *gradiente* di f nel punto $\boldsymbol{p}$ come il vettore formato dalle derivate parziali nel punto e lo indichiamo con il simbolo

$$\nabla f(\boldsymbol{p}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 1.5. Nel caso di funzioni di una variabile sappiamo che l'esistenza della derivata in un punto implica la continuità della funzione in quel punto. Per funzioni di più variabili questa proprietà non è più valida: se anche esistono tutte le derivate parziali in un punto non è detto che la funzione sia continua nel punto.

Esempio 1.6. Consideriamo la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Abbiamo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per ogni x e per ogni y, dunque le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e sono nulle, $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$. Ma $f(0,0) = 0$, mentre $f(x,x) = \frac{1}{2}$ e $f(x,-x) = -\frac{1}{2}$ per ogni $x \neq 0$, questo significa che non può esistere il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$, e quindi la funzione non può essere continua in $(0,0)$.

Esempio 1.7. Calcoliamo le derivate parziali della norma euclidea di $\mathbb{R}^n$. Sia

$$f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}, \qquad \forall \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Quando $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} && \text{deriviamo prima la radice quadrata} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) && \text{derivando rimane solo il termine con } j = k. \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{\|\boldsymbol{x}\|}. \end{aligned}$$

Dunque il gradiente della norma per $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ è dato da $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$. Mentre nel punto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, siccome $f(\boldsymbol{0} + t\boldsymbol{e}_k) = \|t\boldsymbol{e}_k\| = |t|$ non è derivabile in $t = 0$, nessuna derivata parziale è definita.

Esercizio 1.8. Calcola i gradienti $\nabla f(2,1)$ e $\nabla g(1,2,0)$ per le funzioni

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}, \qquad g(x,y,z) = \log(xy + z).$$

Esercizio 1.9. Calcola le derivate parziali e il gradiente della funzione $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$ definita per $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

Esercizio 1.10. Calcola le derivate parziali delle seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x-y^2}{x^2+y}, & f(x,y) &= x^y,\\
f(x,y) &= \arctan\frac{y}{x}, & f(x,y) &= \log(x^2+y^2),\\
f(x,y) &= \arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}, & f(x,y) &= \log(x+\sqrt{x^2+y^2}),\\
f(x,y,z) &= \sin(x+z)\cos(z-y), & f(x,y,z) &= \frac{xyz}{x+y+z},\\
f(x,y,z) &= \log\left(x^2+ze^y\right), & f(x,y,z) &= \frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}.
\end{aligned}
$$

---

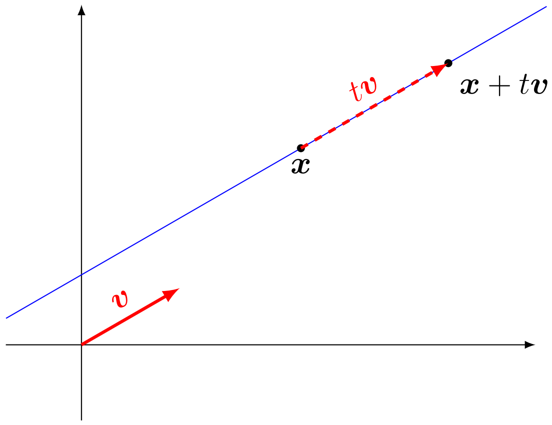
2 Derivate direzionali

Le derivate parziali (1) misurano la variazione di una funzione lungo direzioni parallele agli assi coordinati. Nulla vieta di considerare qualsiasi altra direzione.

Definizione 2.1. Dato un punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ non nullo, la parametrizzazione

$$\boldsymbol{\gamma}(t) := \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

descrive la retta passante per $\boldsymbol{x}$ nella direzione di $\boldsymbol{v}$, o meglio descrive il moto di un punto che si muove su tale retta con velocità uniforme $\boldsymbol{v}$ e che all'istante $t = 0$ si trova in $\boldsymbol{x}$.

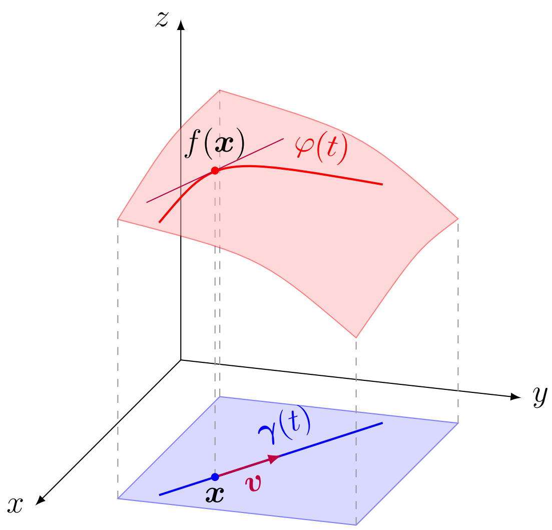


Possiamo leggere i valori di una funzione scalare f definita in un intorno del punto $\boldsymbol{x}$ tramite la composizione di f con $\boldsymbol{\gamma}$, otteniamo così la funzione di una variabile

$$\varphi(t) := f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}).$$

La derivata in 0 di questa funzione definisce la *derivata direzionale* rispetto al vettore $\boldsymbol{v}$ per la funzione f nel punto $\boldsymbol{x}$,

$$D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{x}) := \varphi'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x})}{t}. \tag{2}$$



Osservazione 2.2. Le definizioni di derivata parziale (1) e di derivata direzionale (2) sono molto simili, il ruolo che gioca il vettore $\boldsymbol{e}_k$ nella prima viene preso dal vettore $\boldsymbol{v}$ nella seconda. Le derivate parziali non sono altro che derivate direzionali fatte rispetto ai vettori della base canonica,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = D_{\boldsymbol{e}_k} f(\boldsymbol{x}), \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Esempio 2.3. Calcoliamo la derivata direzionale rispetto al vettore $(-2, 3)$ per la funzione $f(x, y) := x^2 y$ nel punto $(4, -1)$. Leggiamo i valori della funzione lungo la retta parametrizzata da $(4, -1) + t(-2, 3)$,

$$\varphi(t) = f(4 - 2t, -1 + 3t) = (4 - 2t)^2(-1 + 3t).$$

La derivata di φ è

$$\varphi'(t) = 2(4 - 2t)(-2)(-1 + 3t) + (4 - 2t)^2(3),$$

che in 0 vale $\varphi'(0) = 2(4)(-2)(-1) + (4)^2(3) = 64$ e dunque $D_{(-2,3)} f(4, -1) = 64$.

Esempio 2.4. Calcoliamo la derivata direzionale rispetto ad un generico vettore (h, k) per la funzione $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$ nell'origine $(0, 0)$ che nel punto $(1, 1)$. Lungo la retta passante per $(0, 0)$ nella direzione di (h, k) abbiamo

$$f(0 + th, 0 + tk) = \sqrt[3]{(th)(tk)^2} = \sqrt[3]{t^3 hk^2} = t\sqrt[3]{hk^2},$$

e derivando in $t = 0$ troviamo

$$D_{(h,k)} f(0, 0) = \sqrt[3]{hk^2}.$$

Lungo la retta passante per $(1, 1)$ nella direzione di (h, k) abbiamo

$$f(1 + th, 1 + tk) = \sqrt[3]{(1 + th)(1 + tk)^2} = (1 + th)^{1/3}(1 + tk)^{2/3},$$

e derivando in $t = 0$ troviamo

$$D_{(h,k)} f(0,0) = \left[\frac{1}{3}(1+th)^{-2/3} h (1+tk)^{2/3} + \frac{2}{3}(1+th)^{1/3}(1+tk)^{-1/3} k\right]_{t=0} = \\ = \frac{1}{3}h + \frac{2}{3}k.$$

Esempio 2.5. Possono esistere derivate parziali in un punto e non esistere le derivate direzionali rispetto a direzioni che non sono parallele agli assi coordinati. Consideriamo la funzione $f(x,y) := \sqrt[3]{xy}$. Siccome $f(x,0) = f(0,y) = 0$ abbiamo che le derivate parziali in $(0,0)$ sono ben definite,

$$D_{(1,0)} f(0,0) = \partial_x f(0,0) = 0, \quad D_{(0,1)} f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0.$$

Dato invece un qualsiasi vettore $\boldsymbol{v} = (h,k)$ con $h \neq 0$ e $k \neq 0$ abbiamo che $f(h,k) \neq 0$ e la funzione

$$t \mapsto f(0+th, 0+tk) = t^{2/3}\sqrt[3]{hk} = t^{2/3} f(h,k)$$

non è derivabile in $t = 0$, e dunque non è definita la derivata direzionale $D_{\boldsymbol{v}} f(0,0)$.

Osservazione 2.6. Due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ non nulli, paralleli e con lo stesso verso, ovvero che formano tra loro un angolo nullo, indicano la stessa direzione. In tal caso avremo che $\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{v}$ per qualche scalare $\lambda > 0$. Per quanto riguarda le derivate direzionali rispetto a questi due vettori otteniamo

$$D_{\boldsymbol{w}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\lambda\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \\ = \lim_{s \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{\frac{s}{\lambda}} = \lambda D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}).$$

Dunque facendo variare λ la derivata direzionale, se non è nulla, può assumere qualsiasi valore pur essendo calcolata rispetto a vettori che puntano nella stessa direzione. Solitamente per indicare una direzione si usano vettori di lunghezza unitaria, detti *versori*, e la derivata direzionale assume il suo reale significato quando essa è calcolata rispetto a versori. Dato un qualsiasi vettore $\boldsymbol{v}$ non nullo, il versore $\boldsymbol{u}$ che indica la stessa direzione di $\boldsymbol{v}$ si può ottenere *normalizzando* il vettore $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{u} := \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}.$$

Esercizio 2.7. Calcola la derivata direzionale per la funzione data, nel punto indicato e rispetto alla direzione specificata.

1. $f(x,y) = e^{xy}$ nel punto $(1,1)$ rispetto alla direzione $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$;
2. $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ nel punto $(1,2)$ rispetto alla direzione $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$;
3. $f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$ nel punto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ in direzione $\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{i}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\boldsymbol{j}} - \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{k}}$;
4. $f(x,y,z) = \frac{xy+z}{x^2+2y^2+4z^2}$ nel punto $(3,2,1)$ rispetto al vettore $\boldsymbol{v} = \vec{\boldsymbol{i}} - \vec{\boldsymbol{j}} + 2\vec{\boldsymbol{k}}$.

---

3 Differenziabilità

Sappiamo che per una funzione di una variabile l'esistenza della derivata in un punto è equivalente alla possibilità di avere una approssimazione lineare del primo ordine intorno a quel punto. Più precisamente,

$$\exists f'(p) := \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = m \iff f(x) = f(p) + m(x-p) + o(x-p), \quad \text{per } x \to p.$$

Quando f è derivabile nel punto p, è ben definita la retta tangente al grafico di f nel punto $(p, f(p))$ ed essa ha equazione

$$y = f(p) + f'(p)(x-p).$$

Tra tutti i polinomi di primo grado, quello che meglio approssima la funzione intorno al punto p è quello corrispondente alla retta tangente. L'errore che si commette approssimando $f(x)$ con il valore $f(p) + f'(p)(x-p)$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to p$.

Possiamo parlare di approssimazioni locali anche per funzioni di più variabili. Se $f(\boldsymbol{x})$ e $g(\boldsymbol{x})$ sono due funzioni scalari definite in un intorno del punto $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, diciamo che g è un'approssimazione locale del primo ordine per f intorno a $\boldsymbol{p}$ quando

$$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) + o\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\right), \quad \text{per } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p},$$

ovvero quando vale il limite

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0}.$$

Un generico polinomio di primo grado in n variabili ha la forma

$$T(\boldsymbol{x}) = a + m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = a + \boldsymbol{m}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{x},$$

con termine noto $a \in \mathbb{R}$ e vettore dei coefficienti per i monomi di primo grado $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$. Se vogliamo che tale polinomio sia un'approssimazione locale del primo ordine per f intorno a $\boldsymbol{p}$ il polinomio dovrà perlomeno assumere lo stesso valore della funzione nel punto $\boldsymbol{p}$,

$$f(\boldsymbol{p}) = T(\boldsymbol{p}) = a + \boldsymbol{m}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p},$$

da cui ricaviamo che $a = f(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{m}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}$; dunque possiamo scrivere il polinomio approssimante T nella forma

$$T(\boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{m}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p});$$

inoltre dovrà valere la condizione $f(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|)$ per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$. Quando ciò è effettivamente possibile, ovvero quando esiste un polinomio di primo grado che approssima localmente f al primo ordine intorno a $\boldsymbol{p}$, si dice che la funzione f è differenziabile nel punto $\boldsymbol{p}$.

Definizione 3.1. Una funzione scalare $f(\boldsymbol{x})$ definita in un intorno del punto $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ si dice *differenziabile* nel punto $\boldsymbol{p}$ quando esiste un vettore $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + o\big(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\big), \quad \text{per } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}. \tag{3}$$

Utilizzando la definizione del simbolo o-piccolo, la scrittura (3) è equivalente al limite

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} = 0.$$

Osservazione 3.2. La differenziabilità di una funzione in un punto implica la continuità della funzione nel punto. Infatti, le quantità $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$ e $o\big(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\big)$ che compaiono in (3) sono infinitesime quando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$, e dunque da (3) segue che $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})$.

Supponiamo f sia differenziabile in $\boldsymbol{p}$; per ogni $k = 1, \ldots, n$, consideriamo la retta passante per $\boldsymbol{p}$ e parallela all'asse x_k parametrizzata da $t \mapsto \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_k$. Abbiamo $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{e}_k$ e $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| = |t|$. Andando a sostituire in (3) otteniamo

$$f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_k) = f(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{m} \cdot (t\boldsymbol{e}_k) + o\big(|t|\big) = f(\boldsymbol{p}) + m_k t + o\,(t)\,, \quad \text{per } t \to 0.$$

Derivando rispetto a t troviamo che esiste la derivata parziale di f rispetto a x_k nel punto $\boldsymbol{p}$ e vale

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_k) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{p})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{m_k t + o\,(t)}{t} = m_k.$$

Dunque se f è differenziabile in punto allora esistono anche tutte le sue derivate parziali in quel punto ed il gradiente di f nel punto coincide con il vettore $\boldsymbol{m}$ che compare nella formula (3). Otteniamo così che la condizione di differenziabilità implica la derivabilità (parziale) e vale la seguente propopsizione.

Proposizione 3.3. *Se $f(\boldsymbol{x})$ è una funzione differenziabile nel punto $\boldsymbol{p}$ allora è ben definito il gradiente $\nabla f(\boldsymbol{p})$ e vale la formula*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + o\big(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\big), \quad \textit{per } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}. \tag{4}$$

Osservazione 3.4. Il fatto che il gradiente di una funzione sia ben definito in un punto non è sufficiente a garantire la differenziabilità della funzione. La funzione considerata nell'esempio 1.6 ha un gradiente ben definito nell'origine, ma la funzione non è continua nell'origine e quindi, per l'osservazione 3.2, non può essere differenziabile in quel punto.

Osservazione 3.5. Possiamo riscrivere la formula (4) in termini del vettore $\boldsymbol{h} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ che raccoglie gli incrementi di ciascuna variabile per spostarsi da $\boldsymbol{p}$ ad $\boldsymbol{x}$. Otteniamo,

$$f(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{p}) + \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{h} + o\big(\|\boldsymbol{h}\|\big), \quad \text{per } \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}.$$

La funzione $\boldsymbol{h} \mapsto \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{h}$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ e descrive la variazione infinitesima della funzione $f(\boldsymbol{x})$ intorno al punto $\boldsymbol{p}$ per piccoli incrementi della variabile $\boldsymbol{x}$; tale applicazione si dice *differenziale* di f nel punto $\boldsymbol{p}$ e la indichiamo con

$$\mathrm{d}f_{\boldsymbol{p}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}f_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{h}) := \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{h}.$$

Osservazione 3.6. Nel caso di due variabili la definizione di differenziabilità si può esplicitare nella seguente forma. Una funzione $f(x,y)$ è differenziabile nel punto $(x_\star, y_\star) \in \mathbb{R}^2$ quando esistono due valori reali $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x,y) = f(x_\star, y_\star) + a(x - x_\star) + b(y - y_\star) + o\big(\|(x - x_\star, y - y_\star)\|\big), \qquad \text{per } (x,y) \to (x_\star, y_\star), \quad (5)$$

e quando ciò si verifica abbiamo che $a = \partial_x f(x_\star, y_\star)$ e $b = \partial_y f(x_\star, y_\star)$. Se indichiamo con $h = x - x_\star$ e $k = y - y_\star$ gli incrementi delle variabili per spostarsi da $(x_\star, y_\star)$ a (x,y), possiamo riscrivere la stessa formula nella forma

$$f(x_\star + h, y_\star + k) = f(x_\star, y_\star) + \partial_x f(x_\star, y_\star) h + \partial_y f(x_\star, y_\star) k + o\big(\|(h,k)\|\big), \quad \text{per } (h,k) \to (0,0).$$

Esempio 3.7. Consideriamo la funzione $f(x,y) := x\sin(y)$. Verifichiamo se f è differenziabile nel punto $(-2, \pi/3)$.

$$f\Big(-2+h, \frac{\pi}{3}+k\Big) = f\Big(-2, \frac{\pi}{3}\Big) + \partial_x f\Big(-2, \frac{\pi}{3}\Big)h + \partial_y f\Big(-2, \frac{\pi}{3}\Big)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right), \quad \text{per } (h,k) \to (0,0).$$

Le sue derivate parziali di f sono $\partial_x f(x,y) = \sin(y)$ e $\partial_y f(x,y) = x\cos(y)$. Abbiamo $f(-2, \pi/3) = -\sqrt{3}$, $\partial_x f(-2, \pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\partial_y f(-2, \pi/3) = -1$. Dobbiamo dunque verificare se

$$(-2+h)\sin\Big(\frac{\pi}{3}+k\Big) = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}h - k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right), \quad \text{per } (h,k) \to (0,0).$$

Questa condizione corrisponde alla validità del limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(-2+h)\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\right) - \left(-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}h - k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \quad (6)$$

Per le formule di addizione del seno abbiamo $\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos k + \frac{1}{2}\sin k$, e dunque il numeratore diventa

$$\begin{aligned}(-2+h)\sin\Big(\frac{\pi}{3}+k\Big) - \Big(-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}h - k\Big) &= \\ = (-2+h)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos k + \frac{1}{2}\sin k\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}(2-h) + k &= \\ = \frac{1}{2}h\sin k + \sqrt{3}(1-\cos k) + (k - \sin k) - \frac{\sqrt{3}}{2}h\,(1-\cos k)&.\end{aligned}$$

Quando $(h,k) \to (0,0)$ abbiamo i seguenti comportamenti asintotici

$$h\sin k \approx hk, \quad 1 - \cos k \approx \frac{1}{2}k^2, \quad k - \sin k \approx \frac{1}{6}k^3, \quad h(1-\cos k) \approx \frac{1}{2}hk^2. \quad (7)$$

Osserviamo che $|k| \leqslant \sqrt{h^2+k^2}$. Ne segue che i termini in (7) sono tutti o-piccolo di $\sqrt{h^2+k^2}$; infatti

$$\begin{aligned} \left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\leqslant |h| \to 0, & \left|\frac{\frac{1}{2}k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\leqslant \frac{1}{2}|k| \to 0, \\ \left|\frac{\frac{1}{6}k^3}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\leqslant \frac{1}{6}k^2 \to 0, & \left|\frac{\frac{1}{2}hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\leqslant \frac{1}{2}|hk| \to 0. \end{aligned}$$

Ne deduciamo che il numeratore nel limite (6) è una somma di termini che sono o-piccolo del denominatore; quindi è verificato che il limite vale zero. Dunque la funzione è differenziabile nel punto $(-2, \pi/3)$.

Osservazione 3.8. La verifica della differenziabilità basata sulla definizione richiede la verifica di un limite in più variabili, e la cosa può rivelarsi abbastanza laboriosa, come abbiamo visto nel precedente esempio. Vedremo nella prossima lezione che esistono delle condizioni che permettono in molti casi di verificare la differenziabilità in modo più semplice e rapido.

Esercizio 3.9. Verifica che la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

è continua, ma non differenziabile nell'origine $(0,0)$.

Esercizio 3.10. Determina per quali valori di $\alpha > 0$ si ha che la funzione $f(x,y) = |xy|^\alpha$ è differenzabile nell'origine $(0,0)$.

Esercizio 3.11. Considera la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcola il gradiente di f nei punti $(0,0)$ e $(1,2)$. Calcola le derivate direzionali di f nei punti $(0,0)$ e $(1,2)$ rispetto alla direzione $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Determina se f è differenziabile nei punti $(0,0)$ e $(1,2)$.

---

4 Significato geometrico del gradiente

Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la parametrizzazione $t \mapsto \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$ della retta passante per $\boldsymbol{p}$ nella direzione di $\boldsymbol{v}$. Andiamo a sostituirla nella formula (4) al posto della $\boldsymbol{x}$ e otteniamo

$$f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{p}) + \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot (t\boldsymbol{v}) + o(\|t\boldsymbol{v}\|) = f(\boldsymbol{p}) + (\nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v})t + o(t), \quad \text{per } t \to 0,$$

Derivando rispetto a t ricaviamo una formula per calcolare derivate direzionali,

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{p}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) = \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Otteniamo così la seguente proprietà:

Proposizione 4.1. *Sia $f(\boldsymbol{x})$ una funzione differenziabile nel punto $\boldsymbol{p}$. Allora sono ben definite tutte le derivate direzionali e si possono calcolare tramite la formula*

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{p}) = \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v}, \tag{8}$$

per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

In particolare questa proposizione ci dice che nei punti in cui la funzione è differenziabile l'applicazione che al vettore $\boldsymbol{v}$ associa la derivata direzionale $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{p})$ risulta essere un'applicazione lineare.

Osservazione 4.2. Se f non è differenziabile nel punto $\boldsymbol{p}$ la formula (8) potrebbe non essere più valida. Abbiamo visto, nell'esempio 2.4, che la funzione $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$ nell'origine ha derivate direzionali date da $D_{(h,k)} f(0, 0) = \sqrt[3]{hk^2}$. In particolare il gradiente è nullo in $(0, 0)$, in quanto $\partial_x f(0, 0) = D_{(1,0)} f(0, 0) = 0$ e $\partial_y f(0, 0) = D_{(0,1)} f(0, 0) = 0$. Dunque $\nabla f(0, 0) \cdot (h, k) = 0$ è diverso da $\sqrt[3]{hk^2}$ quando h e k sono entrambi diversi da zero.

La formula (8) ci permette di determinare le direzioni rispetto alle quali la derivata direzionale risulta avere il suo massimo o il suo minimo valore. Esse sono indicate dal vettore gradiente.

Corollario 4.3. *Sia $f(\boldsymbol{x})$ una funzione differenziabile nel punto $\boldsymbol{p}$. Supponiamo che il gradiente di f nel punto p non sia nullo, $\nabla f(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{0}$. Tra tutte le possibili direzioni $\boldsymbol{u}$, con $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, quella rispetto alla quale la derivata direzionale nel punto $\boldsymbol{p}$ assume il valore massimo è data da $\boldsymbol{u}_+ := \frac{1}{\|\nabla f(\boldsymbol{p})\|} \nabla f(\boldsymbol{p})$, mentre quella rispetto alla quale la derivata direzionale nel punto $\boldsymbol{p}$ assume il valore minimo è data da $\boldsymbol{u}_- := -\frac{1}{\|\nabla f(\boldsymbol{p})\|} \nabla f(\boldsymbol{p})$, e abbiamo*

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{u}\|=1}} D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{p}) = D_{\frac{\nabla f(\boldsymbol{p})}{\|\nabla f(\boldsymbol{p})\|}} f(\boldsymbol{p}) = \|\nabla f(\boldsymbol{p})\|,$$

$$\min_{\substack{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{u}\|=1}} D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{p}) = D_{-\frac{\nabla f(\boldsymbol{p})}{\|\nabla f(\boldsymbol{p})\|}} f(\boldsymbol{p}) = -\|\nabla f(\boldsymbol{p})\|.$$

Dimostrazione. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alla formula (8), per ogni versore $\boldsymbol{u}$, con $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, troviamo che

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{p}) = \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{u} \leqslant \|\nabla f(\boldsymbol{p})\| = \frac{1}{\|\nabla f(\boldsymbol{p})\|} \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{p}) = D_{(\boldsymbol{u}_+)} f(\boldsymbol{p}).$$

Analogamente,

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{p}) = \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{u} \geqslant -\|\nabla f(\boldsymbol{p})\| = -\frac{1}{\|\nabla f(\boldsymbol{p})\|} \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{p}) = D_{(\boldsymbol{u}_-)} f(\boldsymbol{p}).$$

□

L'informazione geometrica contenuta nel vettore gradiente è dunque quella relativa alla direzione e all'intensità di massima crescita della funzione.

Esempio 4.4. Consideriamo la funzione $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-2y}$. Nel punto $(1,0)$ abbiamo

$$\nabla f(1,0) = \left(\mathrm{e}^{-2y}, -2x\mathrm{e}^{-2y}\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = (1,-2), \qquad \|\nabla f(1,0)\| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}.$$

La direzione di massima crescita per f in $(1,0)$ è dunque indicata dal versore

$$\boldsymbol{u}_+ = \frac{1}{\|\nabla f(1,0)\|}\nabla f(1,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Esercizio 4.5. Determina la direzione di massima crescita per le funzioni date e nei punti indicati:

1. $f(x,y) = \log(x^2+3y)$ in $(4,3)$;
2. $f(x,y,z) = xyz$ in $(1,2,3)$;
3. $f(x,y,z,t) = (x+yz)\mathrm{e}^{-t}$ in $(3,2,1,0)$.

---

5 Piano tangente

Dati tre coefficienti reali $a,b,c \in \mathbb{R}$, l'equazione

$$z = ax+by+c$$

descrive un piano nello spazio $\mathbb{R}^3$. Se il piano passa per il punto $(x_\star, y_\star, z_\star)$ allora dovrà valere $z_\star = ax_\star + by_\star + c$, e quindi ricaviamo $c = z_\star - ax_\star - by_\star$, che sostituito nell'equazione iniziale del piano ci fornisce l'equazione

$$z = z_\star + a(x-x_\star) + b(y-y_\star)$$

per descrivere un generico piano (non verticale) passante per il punto $(x_\star, y_\star, z_\star)$. La condizione di differenziabilità (5) ci dice che tra tutti i piani passanti per il punto $\big(x_\star, y_\star, f(x_\star,y_\star)\big)$ del grafico di $f(x,y)$, ovvero tra quelli con equazione della forma

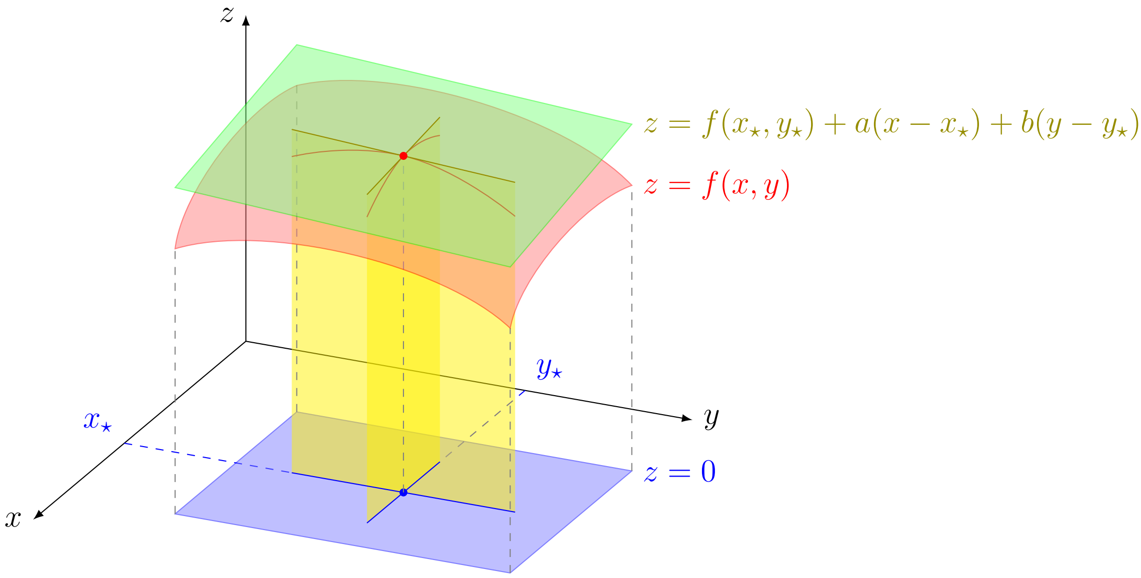
$$z = f(x_\star,y_\star) + a(x-x_\star) + b(y-y_\star),$$

quello che meglio approssima il grafico di f in un intorno del punto, ovvero che realizza un'approssimazione del primo ordine, deve avere come coefficienti

$$a = \partial_x f(x_\star,y_\star), \qquad b = \partial_y f(x_\star,y_\star).$$

Tale piano si dice *piano tangente* al grafico di f nel punto $\big(x_\star, y_\star, f(x_\star,y_\star)\big)$, e la sua equazione è dunque data da

$$z = f(x_\star,y_\star) + \partial_x f(x_\star,y_\star)(x-x_\star) + \partial_y f(x_\star,y_\star)(y-y_\star),$$



Esempio 5.1. Determiniamo il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \frac{1}{x-y^2}$ nel punto $(2,-1,f(2,-1))$. Calcoliamo le derivate parziali,

$$\partial_x f(x,y) = -\frac{1}{(x-y^2)^2}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{2y}{(x-y^2)^2},$$

e dunque $\partial_x f(2,-1) = -1$ e $\partial_y f(2,-1) = -2$, inoltre $f(2,-1) = 1$. Il piano tangente avrà dunque equazione

$$z = 1 - 1 \cdot (x-2) - 2 \cdot (y+1) = 1 - x - 2y.$$

Esercizio 5.2. Determina l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati:

1. $f(x,y) = x^3 - y^3$ nel punto $(0,1,-1)$;
2. $f(x,y) = x^y - y^x$ nel punto $(2,1,1)$;
3. $f(x,y) = \sin(x+y)\mathrm{e}^{x-y}$ nel punto (π,π);
4. $f(x,y) = x^{(y^x)}$ nel punto $(1,1)$.
