Analisi Matematica 1B - Lezione 10

Proprietà dell'integrale di Riemann

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 14 aprile 2020)

In questa lezione descriveremo le proprietà principali dell'integrale di Riemann: monotonia, additività e linearità. Esse sono intimamente legate ai principi fondamendali che avevamo richiesto all'inizio della lezione 7 per una accettabile teoria della misura di aree.

Nel seguito, data una funzione f a valori reali definita sull'intervallo I, indicheremo l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori che f assume su I con la notazione

$$m_I(f) := \inf_{x \in I} f(x), \qquad M_I(f) := \sup_{x \in I} f(x).$$

1 Monotonia

Abbiamo una prima proprietà di monotonia riguardante il confronto tra le funzioni integrande.

Teorema 1.1. *Siano f e g due funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$. Se $f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

Dimostrazione. Se I è un qualsiasi intervallo contenuto in $[a, b]$, per il fatto che f puntualmente maggiorata da g, abbiamo che $m_I(f) \leqslant m_I(g)$. Se consideriamo una qualsiasi suddivisione σ che scompone $[a, b]$ in n intervalli I_k, con $k = 1, \ldots, n$, abbiamo dunque che $m_{I_k}(f) \leqslant m_{I_k}(g)$ per ogni k, e per quanto riguarda le somme inferiori otteniamo

$$\underline{S}(f, \sigma) = \sum_k m_{I_k}(f)\mathcal{L}(I_k) \leqslant \sum_k m_{I_k}(g)\mathcal{L}(I_k) = \underline{S}(g, \sigma) \leqslant \int_a^b g.$$

Dunque $\int_a^b g$ è un maggiorante di ogni somma inferiore per f e quindi $\int_a^b f$, essendo il minimo dei maggioranti delle somme inferiori di f, sarà minore o uguale a $\int_a^b g$.

(Potevamo fare una dimostrazione analoga utilizzando le somme superiori invece che quelle inferiori.) $\square$

In particolare, se f è integrabile su $[a,b]$ e poniamo

$$m := m_{[a,b]}(f) = \inf_{[a,b]} f, \qquad M := M_{[a,b]}(f) = \sup_{[a,b]} f,$$

abbiamo $m \leqslant f(x) \leqslant M$ per ogni $x \in [a,b]$, e per la proprietà di monotonia segue che

$$m(b-a) = \int_a^b m \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a).$$

Abbiamo anche una seconda proprietà di monotonia riguardante il dominio di integrazione.

Proposizione 1.2. *Sia f integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a,b]$. Se l'intervallo $[c,d]$ è contenuto in $[a,b]$, ovvero se $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, allora abbiamo che f è integrabile su $[c,d]$.*

Dimostrazione. Siccome f è integrabile su $[a,b]$, dato $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione σ di $[a,b]$ tale che

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Raffiniamo la suddivisione aggiungendo a σ i punti c e d ponendo $\widetilde{\sigma} := \sigma \cup \{c,d\}$, essendo un raffinamento di σ abbiamo che

$$\underline{S}(f,\sigma) \leqslant \underline{S}(f,\widetilde{\sigma}), \qquad \overline{S}(f,\widetilde{\sigma}) \leqslant \overline{S}(f,\sigma).$$

e dunque,

$$\overline{S}(f,\widetilde{\sigma}) - \underline{S}(f,\widetilde{\sigma}) < \varepsilon.$$

Se estraiamo da $\widetilde{\sigma}$ solo i punti che appartengono a $[c,d]$ otteniamo la suddivisione

$$\widehat{\sigma} := \widetilde{\sigma} \cap [c,d]$$

relativa all'intervallo $[c,d]$. Gli intervalli in cui viene scomposto $[c,d]$ da parte di $\widehat{\sigma}$ fanno parte degli intervalli in cui viene scomposto $[a,b]$; poiché il contributo di ciascun intervallo I nel calcolo della differenza tra somma superiore e somma inferiore è sempre una quantità non negativa, $(M_I(f) - m_I(f))\,\mathcal{L}(I) \geqslant 0$, avremo perciò

$$\overline{S}(f,\widehat{\sigma}) - \underline{S}(f,\widehat{\sigma}) \leqslant \overline{S}(f,\widetilde{\sigma}) - \underline{S}(f,\widetilde{\sigma}) < \varepsilon.$$

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare una suddivisione $\widehat{\sigma}$ di $[c,d]$ per la quale la differenza tra somma superiore e somma inferiore è minore di ε, e per il criterio di integrabilità questo significa che f è integrabile su $[c,d]$. $\square$

2 Additività

Teorema 2.1. *Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $a < b < c$. Sia f una funzione definita su $[a, c]$. Se f è integrabile secondo Riemann sia sull'intervallo $[a, b]$ e sia sull'intervallo $[b, c]$, allora f è integrabile sull'intervallo $[a, c]$ e abbiamo che*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{1}$$

Dimostrazione. Siccome f è integrabile su $[a, b]$, per il criterio di integrabilità, sappiamo che esiste una successione $(\sigma_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[a, b]$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f, \sigma_n^{(1)}) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f, \sigma_n^{(1)}) = \int_a^b f.$$

Analogamente, siccome f è integrabile su $[b, c]$, per il criterio di integrabilità, sappiamo che esiste una successione $(\sigma_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[b, c]$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f, \sigma_n^{(2)}) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f, \sigma_n^{(2)}) = \int_b^c f.$$

Le unioni $\sigma_n := \sigma_n^{(1)} \cup \sigma_n^{(2)}$ definiscono una successione di suddivisioni di $[a, c]$, e abbiamo che

$$\underline{S}(f, \sigma_n) = \underline{S}(f, \sigma_n^{(1)}) + \underline{S}(f, \sigma_n^{(2)}), \qquad \overline{S}(f, \sigma_n) = \overline{S}(f, \sigma_n^{(1)}) + \overline{S}(f, \sigma_n^{(2)}).$$

Otteniamo allora che

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f, \sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f, \sigma_n) = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dunque f è integrabile su $[a, c]$ e l'integrale su $[a, c]$ coincide con la somma degli integrali su $[a, b]$ e su $[b, c]$. □

Finora abbiamo definito l'integrale $\int_a^b f$ sempre sottointendendo che gli estremi di integrazione verificassero la condizione $a < b$. Possiamo dare un senso all'integrale $\int_a^b f$ anche quando $a \geqslant b$ utilizzando come criterio per la sua definizione quello di cercare di rispettare in ogni caso la formula di additività (1). Ad esempio, scegliendo $b = a$ in (1) avremo

$$\int_a^c f = \int_a^a f + \int_a^c f,$$

da cui si ricava che dovrà essere $\int_a^a f = 0$. Mentre se scegliamo $c = a$ avremo

$$0 = \int_a^a f = \int_a^b f + \int_b^a f,$$

da cui si ricava che $\int_a^b f$ e $\int_b^a f$ sono due valori opposti. Ecco dunque giustificata la seguente definizione:

Definizione 2.2. Per ogni funzione definita nel punto $a \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\int_a^a f = 0.$$

Per ogni funzione integrabile sull'intervallo $[a, b]$, con $a \leqslant b$, poniamo

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

È facile verificare che con queste definizioni la proprietà di additività (1) continua a valere per ogni funzione f che sia integrabile su un intervallo contenente i tre punti a, b, c, qualsiasi sia l'ordine con cui si presentano.

3 Linearità

Proposizione 3.1. *Siano f e g due funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$. Allora la somma $f + g$ è integrabile su $[a, b]$ e abbiamo*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Dimostrazione. Per ogni intervallo I contenuto in $[a, b]$ abbiamo

$$m_I(f) + m_I(g) \leqslant f(x) + g(x) \leqslant M_I(f) + M_I(g), \quad \forall x \in I,$$

e ciò implica che

$$m_I(f) + m_I(g) \leqslant m_I(f+g) \leqslant M_I(f+g) \leqslant M_I(f) + M_I(g).$$

Sommando rispetto a tutti gli intervalli in cui una qualsiasi suddivisione σ scompone l'intervallo $[a, b]$ otteniamo allora che

$$\underline{S}(f, \sigma) + \underline{S}(g, \sigma) \leqslant \underline{S}(f+g, \sigma) \leqslant \overline{S}(f+g, \sigma) \leqslant \overline{S}(f, \sigma) + \overline{S}(g, \sigma). \tag{2}$$

Siccome f e g sono integrabili su $[a, b]$, esisterà una successione $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[a, b]$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f, \sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f, \sigma_n) = \int_a^b f,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(g, \sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(g, \sigma_n) = \int_a^b g.$$

(Ad esempio, possiamo considerare la successione (σ_n) delle suddivisioni uniformi.) Applichiamo le disuguaglianze (2) con successione di suddivisioni σ_n,

$$\underline{S}(f, \sigma_n) + \underline{S}(g, \sigma_n) \leqslant \underline{S}(f+g, \sigma_n) \leqslant \overline{S}(f+g, \sigma_n) \leqslant \overline{S}(f, \sigma_n) + \overline{S}(g, \sigma_n).$$

I termini centrali sono compresi tra due successioni che nel limite per $n \to +\infty$ convergono entrambe alla somma $\int_a^b f + \int_a^b g$; dunque per il confronto a sandwich otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f+g,\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f+g,\sigma_n) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Questo prova che $f+g$ è integrabile e che in suo integrale è dato dalla somma dei due integrali di f e g. $\square$

Proposizione 3.2. *Se f è integrabile su $[a,b]$, allora anche la funzione opposta $-f$ è integrabile su $[a,b]$ e abbiamo che $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.*

Dimostrazione. Useremo ripetutamente la seguente semplice proprietà degli estremi inferiori e degli estremi superiori di insiemi di numeri reali: se A è un insieme di numeri reali non vuoto, e $B = \{-x \colon x \in A\}$ è l'insieme degli opposti degli elementi di A, allora

$$\inf A = -\sup B, \qquad \sup A = -\inf B.$$

Applicando tale proprietà ai valori che la funzione f assume su un intervallo I contenuto in $[a,b]$ otteniamo

$$m_I(-f) = -M_I(f), \qquad M_I(-f) = -m_I(f).$$

Da ciò segue che per ogni suddivisione σ di $[a,b]$ abbiamo che

$$\underline{S}(-f,\sigma) = -\overline{S}(f,\sigma), \qquad \overline{S}(-f,\sigma) = -\underline{S}(f,\sigma).$$

Passando all'estremo superiore per le somme inferiori e all'estremo inferiore per le somma superiori otteniamo

$$\underline{\int_a^b}(-f) = -\overline{\int_a^b} f, \qquad \overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f.$$

Siccome f è integrabile abbiamo che $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$ e dunque segue che

$$\underline{\int_a^b}(-f) = \overline{\int_a^b}(-f) = -\int_a^b f.$$

$\square$

Osservazione 3.3. Abbiamo visto nella scorsa lezione che se f è integrabile su $[a,b]$ allora anche $|f|$ lo è. Siccome abbiamo che

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

per la proprietà di monotonia e per l'integrabilità della funzione opposta abbiamo che

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|,$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f| ,$$

ovvero, il valore assoluto di un integrale è sempre minore o uguale all'integrale del valore assoluto. Questa è una proprietà analoga alla disuguaglianza triangolare, che dice che il valore assoluto di una somma è sempre minore o uguale alla somma dei valori assoluti.

Proposizione 3.4. *Sia $f(x)$ integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora il prodotto per scalare $\lambda f(x)$ è integrabile su $[a, b]$ e abbiamo*

$$\int_a^b \lambda f(x) \, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Diamo solo un cenno, lasciando al lettore l'esercizio di completare i dettagli. Nel caso $\lambda \geqslant 0$, si può partire con l'osservare che

$$m_I(\lambda f) = \lambda m_I(f), \qquad M_I(\lambda f) = \lambda M_I(f),$$

e poi si procede in modo analogo alle dimostrazioni precedenti considerando prima le somme di Darboux per arrivare poi agli integrali. Nel caso $\lambda < 0$, siccome $\lambda = -|\lambda|$, combiniamo quello che abbiamo ottenuto nel caso positivo con quello che sappiamo per l'opposto,

$$\int_a^b \lambda f = -\int_a^b |\lambda| \, f = -|\lambda| \int_a^b f = \lambda \int_a^b f.$$

□

Possiamo riassumere le proposizioni che abbiamo illustrato in questa sezione in un unico teorema, che dice che l'integrale di una combinazione lineare di funzioni integrabili coincide con la combinazione lineare degli integrali.

Teorema 3.5. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora la combinazione lineare $\lambda f(x) + \mu g(x)$ è integrabile su $[a, b]$ e abbiamo*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Applicando i risultati delle precedenti proposizioni abbiamo

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \int_a^b (\lambda f) + \int_a^b (\mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

□

Vediamo alcune conseguenze di queste proprietà di linearità.

Corollario 3.6. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili su $[a,b]$ allora sono integrabili su $[a,b]$ anche le seguenti funzioni:*

- *la funzione prodotto* $(fg)(x) := f(x)g(x)$*;*
- *la funzione massimo* $\max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$*;*
- *la funzione minimo* $\min(f,g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$*.*

Dimostrazione. Per il prodotto, osserviamo prima che se una funzione $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ allora anche $(f(x))^2$ è integrabile su $[a,b]$, in quanto f^2 si ottiene componendo f con la funzione $g(t) = t^2$, che è lipschitziana sull'intervallo limitato che contiene l'immagine di f. Se f e g sono integrabili per linearità lo sono anche $f+g$ e $f-g$, e dunque anche $(f+g)^2$ e $(f-g)^2$. Dopo di che, l'integrabilità di fg segue per linearità dalla seguente identità

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2.$$

Osserviamo poi che se f e g sono integrabili allora lo sono anche $f+g$ e $|f-g|$ e quindi per l'integrabilità del massimo e del minimo possiamo usare le identità

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|, \qquad \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|.$$

□

Osservazione 3.7. Attenzione a non incorrere in errori banali, il corollario ci assicura l'integrabilità di prodotto, massimo e minimo di due funzioni, ma non ci dice niente riguardo al valore dei loro integrali. In generale non è vero che l'integrale di un prodotto sia il prodotto degli integrali, o che l'integrale del massimo sia il massimo degli integrali, o che l'integrale del minimo sia il minimo degli integrali. Ad esempio, se consideriamo $f(x) := x$ e $g(x) := 1-x$ sull'intervallo $[0,1]$ abbiamo che

$$\int_0^1 f = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 g = \int_0^1 (1-x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 fg = \int_0^1 (x - x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{6}, \qquad \int_0^1 f \cdot \int_0^1 g = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 \max(f,g) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \mathrm{d}x = \frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 \min(f,g) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4},$$

$$\max\left\{\int_0^1 f, \int_0^1 g\right\} = \min\left\{\int_0^1 f, \int_0^1 g\right\} = \frac{1}{2}.$$