

Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 08

Teorema fondamentale del calcolo

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 20 marzo 2021)

1 Valore medio integrale

La media aritmetica μ di una sequenza a_1, a_2, \dots, a_n di n numeri si ottiene dividendo per n la somma di tutti i numeri,

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

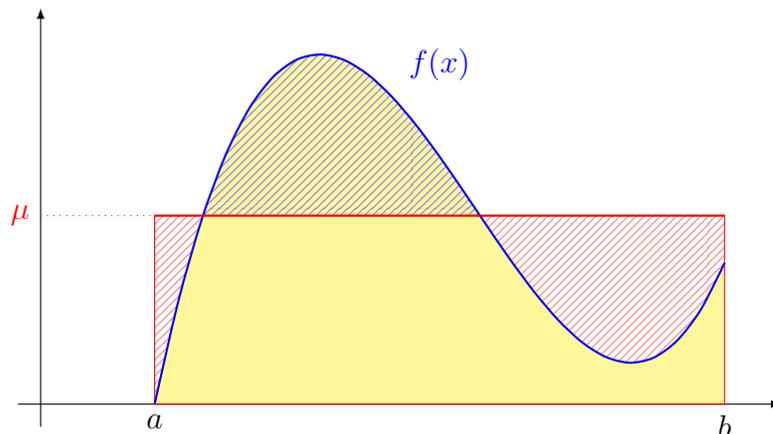
Questo valore medio μ è caratterizzato dal fatto di essere quell'unico valore che se venisse sostituito a ciascuno dei termini a_k manterrebbe la somma totale invariata:

$$\sum_{k=1}^n \mu = n\mu = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Una sequenza di n valori tutti uguali ad una stessa costante produce la stessa somma della sequenza degli a_k se e solo se la costante coincide con la media aritmetica degli a_k . Proviamo a fare una cosa analoga, sostituendo al posto della sequenza di valori a_k i valori che una funzione assume su un certo intervallo $[a, b]$ e sostituendo al posto della sommatoria dei valori l'integrale della funzione. Data una funzione integrabile $f(x)$ definita su $[a, b]$, ci chiediamo quale sia quel valore costante μ tale che la funzione costante definita da $g(x) := \mu$ per ogni $x \in [a, b]$ abbia lo stesso integrale di f su $[a, b]$,

$$\int_a^b \mu \, dx = \int_a^b f(x) \, dx,$$

Il calcolo dell'integrale di una funzione costante è immediato, $\int_a^b \mu \, dx = \mu(b - a)$, e dunque otteniamo che dovrà essere $\mu(b - a) = \int_a^b f(x) \, dx$, ovvero $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.



Definizione 1.1. Sia f una funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$. Definiamo *valore medio integrale* di f su $[a, b]$ il rapporto tra l'integrale di f e la lunghezza dell'intervallo di integrazione,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Una funzione ha valore medio nullo su un intervallo se e solo se il suo integrale su quell'intervallo è nullo.

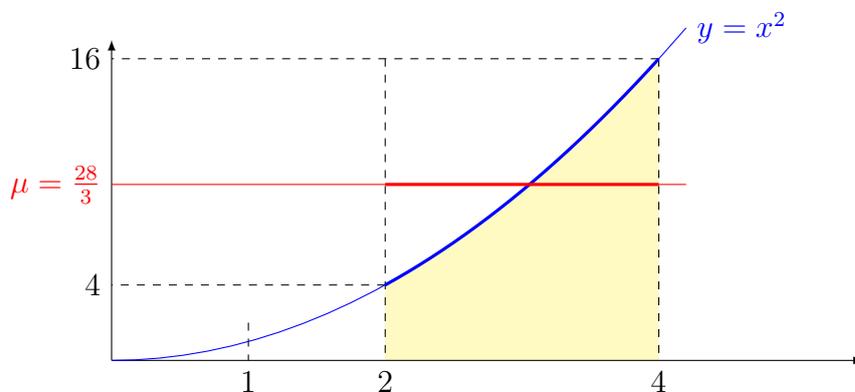
Osservazione 1.2. Se μ è il valore medio di $f(x)$ su $[a, b]$ allora l'integrale della funzione $g(x) := f(x) - \mu$ su $[a, b]$ è nullo,

$$\int_a^b g = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \mu dx = \int_a^b f(x) dx - (b-a)\mu = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = 0.$$

Esempio 1.3. Calcoliamo il valore medio della funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[2, 4]$. Utilizzando procedimenti visti nelle scorse lezioni, basati su approssimazioni tramite somme di Darboux relative a suddivisioni di intervalli della forma $[1, L]$ formate da punti in progressione geometrica, possiamo ricavare che $\int_1^L x^2 dx = \frac{1}{3}(L^3 - 1)$. Applicando la proprietà di additività su $[1, 4] = [1, 2] \cup [2, 4]$, ricaviamo che

$$\int_2^4 x^2 dx = \int_1^4 x^2 dx - \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}(4^3 - 1) - \frac{1}{3}(2^3 - 1) = \frac{56}{3}.$$

Pertanto il valore medio sarà $\mu = \frac{1}{4-2} \int_2^4 x^2 dx = \frac{28}{3}$.



Esercizio 1.4. Utilizzando i calcoli di integrali che abbiamo già svolto nelle precedenti lezioni (ed esercizi) e applicando le proprietà dell'integrale di Riemann, calcola il valore medio delle seguenti funzioni sugli intervalli indicati.

1. $f(x) = e^x$ su $[0, 2]$;
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ su $[e, e^2]$;
3. $f(x) = 2 - 3x$ su $[-1, 4]$;
4. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ su $[0, 1]$.
5. $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ (parte intera di x^2) su $[-4/3, 7/4]$.

Esercizio 1.5. Per quale valore di $L > 0$ si ha che il valore medio della funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[0, L]$ coincide con la lunghezza di tale intervallo?

Esercizio 1.6. Fai un esempio di una funzione continua definita sull'intervallo $[2, 7]$, che abbia valore medio uguale a 4, e tale $f(x) = 4$ se e solo se $x = 5$.

Esercizio 1.7. Fai un esempio di una funzione integrabile definita sull'intervallo $[2, 7]$, che abbia valore medio uguale a 4, e tale $f(x)$ sia sempre diverso da 4.

Data una funzione f integrabile su $[a, b]$, siano $m := \inf_{[a,b]} f$ e $M := \sup_{[a,b]} f$. Abbiamo che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Per la proprietà di monotonia dell'integrale, integrando e dividendo poi per la lunghezza dell'intervallo otteniamo

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

Il valore medio è dunque sempre un valore intermedio tra i valori estremi che una funzione può assumere. Sappiamo, per il teorema dei valori intermedi (visto nel primo semestre), che quando una funzione è continua ed è definita su un intervallo allora assume tutti i suoi valori intermedi. Ecco così dimostrato il teorema del valore medio integrale che dice che ogni funzione continua su un intervallo assume sempre (almeno una volta) il suo valore medio.

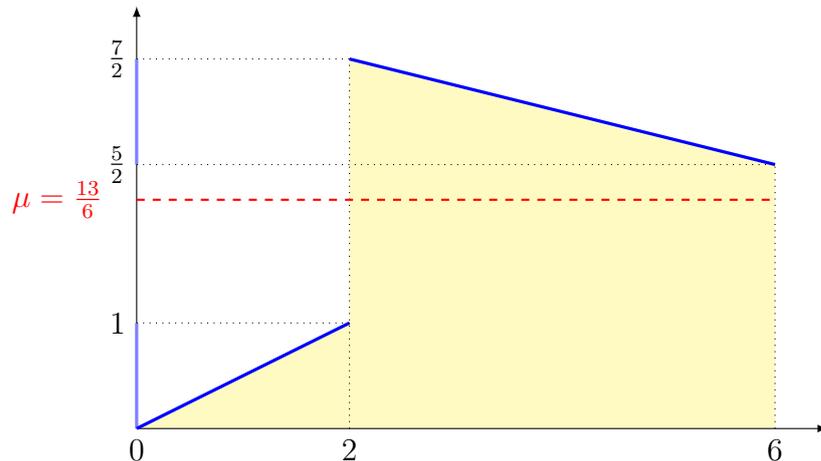
Teorema 1.8. Sia f una funzione continua a valori reali definita sull'intervallo $[a, b]$. Allora esiste un punto $p \in [a, b]$ nel quale il valore della funzione coincide con il suo valore medio:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(p).$$

Senza l'ipotesi di continuità non è detto che il valore medio integrale sia un valore assunto dalla funzione.

Esempio 1.9. Consideriamo la funzione $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - \frac{1}{4}x, & \text{se } 2 < x \leq 6. \end{cases}$$



Il suo valore medio è

$$\mu = \frac{1}{6-0} \int_0^6 f(x) dx = \frac{1}{6} \left(\int_0^2 \frac{1}{2}x dx + \int_2^6 \left(4 - \frac{1}{4}x\right) dx \right) = \frac{1}{6} (1 + 12) = \frac{13}{6}.$$

L'immagine della funzione, ovvero l'insieme dei valori assunti dalla funzione, è costituito da due intervalli separati,

$$f([0, 6]) = [0, 1] \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right],$$

tale immagine non contiene il valor medio $13/6$, valore dunque che non viene mai assunto dalla funzione.

Intorno ai punti di continuità di una funzione il valore medio su piccoli intervalli rimane vicino ai valori della funzione e vale il seguente risultato che ci servirà in seguito per dimostrare il teorema fondamentale del calcolo.

Proposizione 1.10. *Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $q \in [a, b]$. Per ogni $x \in [a, b] \setminus \{q\}$ sia $\mu_f(x)$ il valore medio di f sull'intervallo di estremi q ed x ,*

$$\mu_f(x) := \frac{1}{x-q} \int_q^x f(t) dt.$$

Se f è continua nel punto q allora il valore medio $\mu_f(x)$ tende a $f(q)$ quando $x \rightarrow q$,

$$\lim_{x \rightarrow q} \mu_f(x) = f(q). \quad (1)$$

Dimostrazione. Siccome una funzione costante coincide sempre con il suo valore medio, considerando il valore costante $f(q)$ abbiamo che

$$f(q) = \frac{1}{x-q} \int_q^x f(q) dt,$$

per ogni $x \neq q$. Dunque, per la linearità dell'integrale, possiamo scrivere

$$\mu_f(x) - f(q) = \frac{1}{x-q} \int_q^x (f(t) - f(q)) dt.$$

Per ipotesi f è continua in q ; ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $t \in [a, b]$ quando $|t - q| < \delta$ si ha $|f(t) - f(q)| < \varepsilon$. Quando scegliamo x tale che $0 < |x - q| < \delta$ abbiamo allora che $|t - q| < \delta$ per ogni t compreso tra q ed x e dunque

$$|\mu_f(x) - f(q)| \leq \frac{1}{x - q} \int_q^x |f(t) - f(q)| dt \leq \frac{1}{x - q} \int_q^x \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Ma questo significa che $\lim_{x \rightarrow q} \mu_f(x) = f(q)$. □

2 Funzioni integrali

Definizione 2.1. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ ed integrabile su ciascun intervallo chiuso e limitato contenuto in I . Sia $p \in I$. Definiamo *funzione integrale di f con punto base p* la funzione $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ definita dai seguenti integrali

$$F(x) := \int_p^x f(t) dt, \quad \forall x \in I.$$

Esempio 2.2. La funzione segno, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, è monotona non decrescente su \mathbb{R} e dunque integrabile su ogni intervallo limitato. Calcoliamo la sua funzione integrale di punto base 0:

$$F(x) := \int_0^x \operatorname{sgn}(t) dt.$$

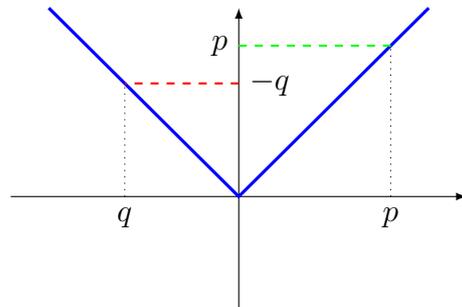
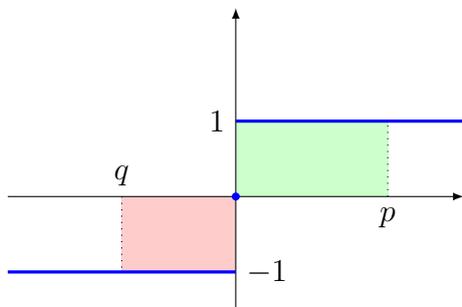
Quando $x > 0$, per ogni $t \in]0, x]$ abbiamo $\operatorname{sgn}(t) = 1$ e dunque

$$F(x) = \int_0^x 1 dx = x;$$

quando $x < 0$, per ogni $t \in]x, 0]$ abbiamo $\operatorname{sgn}(t) = -1$ e dunque

$$F(x) = \int_0^x (-1) dx = - \int_x^0 (-1) dx = \int_x^0 1 dx = 0 - x = -x;$$

mentre per $x = 0$ abbiamo $F(0) = \int_0^0 0 dx = 0$. Otteniamo così che $F(x) = |x|$. La funzione integrale della funzione segno con punto base 0 coincide con la funzione valore assoluto.



Esempio 2.3. Abbiamo visto che $\int_1^L \frac{1}{x} dx = \log(L)$ per ogni $L > 1$ e dunque la funzione integrale di $f(x) = \frac{1}{x}$ su $[1, +\infty[$ con punto base 1 è data da $F(x) = \log(x)$.

Esercizio 2.4. Calcola le funzioni integrali nei seguenti casi:

1. $f(x) = e^x$, $p = 0$, $I = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $p = -1$, $I = \mathbb{R}$;
3. $f(x) = 2e^x - \frac{3}{x}$, $p = 4$, $I = [1, +\infty[$;
4. $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $p = 0$, $I = [-2, 3]$.

Le funzioni integrali sono sempre continue.

Proposizione 2.5. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ ed integrabile su ciascun intervallo chiuso e limitato contenuto in I . Sia $p \in I$. Allora la funzione integrale di f con punto base p , definita da $F(x) := \int_p^x f(t) dt$, è continua su I .

Dimostrazione. Siano a, b due punti dell'intervallo I con $a < b$. Siccome f è integrabile (secondo Riemann) su $[a, b]$, allora $|f|$ sarà una funzione limitata su tale intervallo, e dunque possiede un maggiorante finito, sia esso M ,

$$|f(t)| \leq M, \quad \forall t \in [a, b].$$

Comunque scelti due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$, per la proprietà di additività abbiamo

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_p^{x_1} f(t) dt - \int_p^{x_2} f(t) dt = \int_{x_2}^{x_1} f(t) dt.$$

Utilizzando il fatto che il valore assoluto di un integrale si stima con l'integrale del valore assoluto, e applicando anche le proprietà di monotonia, otteniamo

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \int_{\min\{x_1, x_2\}}^{\max\{x_1, x_2\}} |f(t)| dt \leq \int_{\min\{x_1, x_2\}}^{\max\{x_1, x_2\}} M dt = M |x_1 - x_2|.$$

Quindi F risulta essere lipschitziana su $[a, b]$ con costante di lipschitzianità M . In particolare, segue che F è (uniformemente) continua su $[a, b]$. Dunque F è continua in ogni punto di ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I , quindi F è continua su tutto I . \square

Quando la funzione integranda è continua, la funzione integrale diventa derivabile.

Teorema 2.6. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ ed integrabile su ciascun intervallo chiuso e limitato contenuto in I . Sia $p \in I$. Sia $F(x) := \int_p^x f(t) dt$ la funzione integrale di f con punto base p . Se f è continua nel punto $q \in I$ allora F è derivabile in q e $F'(q) = f(q)$.

Dimostrazione. Calcoliamo il rapporto incrementale della funzione integrale tra i punti q e $x \neq q$. Applicando la proprietà di additività troviamo che

$$\frac{F(x) - F(q)}{x - q} = \frac{1}{x - q} \left(\int_p^x f(t) dt - \int_p^q f(t) dt \right) = \frac{1}{x - q} \int_q^x f(t) dt =: \mu_f(x).$$

Ovvero, il rapporto incrementale di F coincide con il valore medio integrale di f . Siccome abbiamo supposto f continua in q , per la proposizione 1.10 abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow q} \mu_f(x) = f(q).$$

Dunque otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow q} \frac{F(x) - F(q)}{x - q} = f(q),$$

ovvero che F è derivabile in q e che $F'(q) = f(q)$. □

Il teorema 2.6 costituisce la prima parte di quello che viene chiamato “Teorema fondamentale del calcolo”: la derivata di funzioni integrali coincide con la funzione integranda quando quest’ultima è continua. Questo ci dice che in un certo senso l’operazione di derivazione funziona come operazione inversa dell’operazione di integrazione.

Per calcolare derivate di funzioni integrali non è sempre necessario calcolare prima il valore degli integrali.

Esempio 2.7. Calcoliamo la derivata della funzione

$$G(x) := \int_{\sqrt{1+x^2}}^{e^x} \cos(t^2) dt.$$

Se consideriamo la funzione integrale

$$F(x) := \int_0^x \cos(t^2) dt,$$

abbiamo che per la proprietà di additività $\int_a^b \cos(t^2) dt = F(b) - F(a)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e dunque

$$G(x) = F(e^x) - F(\sqrt{1+x^2}). \tag{2}$$

La funzione $\cos(x^2)$ è continua e quindi per il teorema 2.6 essa coincide con la derivata di $F(x)$; applicando la regola di derivazione di funzioni composte all’identità (2) otteniamo

$$G'(x) = F'(e^x) \cdot e^x - F'(\sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = e^x \cos(e^{2x}) - \frac{x \cos(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Esercizio 2.8. Calcola le derivate delle seguenti funzioni definite tramite integrali:

$$\begin{aligned} A(x) &:= \int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt, & B(x) &:= \int_{x^2}^{x^3} t^4 dt, \\ C(x) &:= \int_{-\log(x)}^{\log(x)} e^t dt, \quad (x > 0), & D(x) &:= \int_{\sin x}^{\cos x} (\arccos(t) - \arcsin(t)) dt. \end{aligned}$$

3 Primitive

Definizione 3.1. Date due funzioni $f, F: I \rightarrow \mathbb{R}$ definite sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che la funzione F è *primitiva* della funzione f sull'intervallo I , quando F è derivabile su I e abbiamo che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Di fatto, ogni funzione derivabile è primitiva della sua derivata. Ad esempio, la funzione $x^3 - 2x$ è primitiva della funzione $3x^2 - 2$; ma anche la funzione $x^3 - 2x + 5$ è primitiva della funzione $3x^2 - 2$.

Siccome funzioni costanti hanno derivata nulla, segue facilmente dalla definizione che se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$ allora anche la funzione $F(x) + c$ è anch'essa primitiva di $f(x)$, qualsiasi sia la costante $c \in \mathbb{R}$. Dunque quando esiste una primitiva, allora ne esistono infinite, ma esse differiscono tra loro per delle costanti additive.

Proposizione 3.2. *Se F e G sono due primitive sullo stesso intervallo I della medesima funzione f allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in I.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione differenza delle due primitive $H := F - G$. Derivando troviamo che

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

per ogni $x \in I$. Sappiamo che ogni funzione con derivata nulla su un intervallo deve essere costante. Pertanto esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $H(x) = c$ per ogni $x \in I$. Dunque, per ogni $x \in I$,

$$F(x) = G(x) + H(x) = G(x) + c.$$

□

Un'immediata conseguenza del teorema 2.6 è che le funzioni integrali di funzioni continue sono sempre primitive delle loro funzioni integrande; questo significa che tramite funzioni integrali possiamo costruire primitive di funzioni continue.

Corollario 3.3 (Teorema fondamentale del calcolo (parte A)). *Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua definita sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $p \in I$. Allora la funzione integrale*

$$F(x) := \int_p^x f(t) dt$$

è una primitiva di $f(x)$ su I .

Per la proposizione 3.2 le primitive costruite tramite funzioni integrali differiscono da qualsiasi altra primitiva solo per una costante additiva. Questo ci permette di ottenere la seconda parte del teorema fondamentale, che ci dice che utilizzando primitive possiamo calcolare integrali di Riemann di funzioni continue.

Corollario 3.4 (Teorema fondamentale del calcolo (parte B)). *Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia F una sua primitiva sull'intervallo I . Allora, per ogni $a, b \in I$ abbiamo che*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione integrale definita da $G(x) := \int_a^x f(t) dt$. Abbiamo $G(a) = \int_a^a f = 0$ e $G(b) = \int_a^b f$. Siccome f è continua su I , per il corollario 3.3 abbiamo che G è una primitiva di f su I . Per ipotesi anche F è una primitiva di f su I e allora per la proposizione 3.2 esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $F = G + c$. Dunque,

$$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a) = \int_a^b f - 0 = \int_a^b f.$$

□

In generale, senza l'ipotesi di continuità della funzione integranda, non è detto che una funzione integrale sia una primitiva. Nell'esempio 2.2 abbiamo visto che $F(x) = |x|$ è funzione integrale della funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, ma in questo caso $F(x)$ non è derivabile nel punto $x = 0$ e quindi non può essere considerata una primitiva di f secondo la definizione che abbiamo dato. D'altro canto, non è necessario che f sia una funzione continua affinché possa avere un primitiva.

Esempio 3.5. Consideriamo la funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{per } x \neq 0, \\ 0, & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

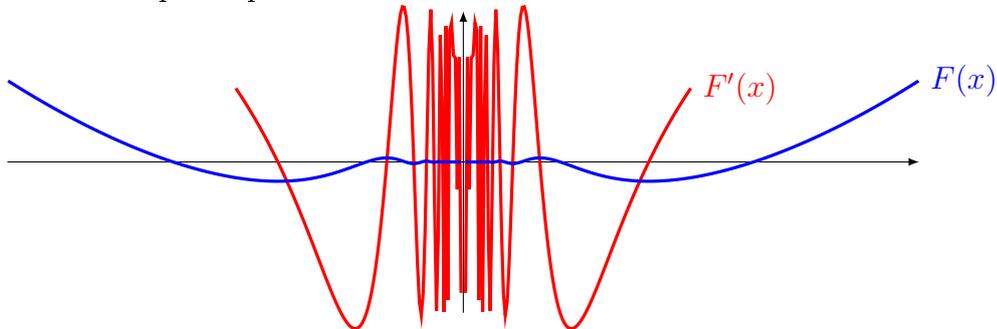
Tale funzione è certamente derivabile per $x \neq 0$ in quanto ottenuta tramite prodotti e composizioni con funzioni derivabili, e abbiamo

$$F'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x},$$

mentre per $x = 0$ abbiamo

$$F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos \frac{1}{h} = 0.$$

Dunque F è derivabile su tutto \mathbb{R} ed è quindi una primitiva della sua derivata F' . Ma la funzione F' non è continua in $x = 0$, in quanto il limite per $x \rightarrow 0$ di $F'(x)$ non esiste. Dunque F è un esempio di primitiva di una funzione non continua.



Definizione 3.6. Indichiamo con la notazione

$$\int f = \int f(x) dx$$

l'insieme delle primitive della funzione f . Tale insieme si dice *integrale indefinito* di f .

Quando f è definita su un intervallo I e possiede una primitiva F su I allora per la proposizione 3.2 abbiamo che

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Con un leggero abuso di notazione scriveremo

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

dove con c si intende una costante arbitraria. La differenza di due valori di una funzione la indichiamo con la notazione

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = [F(x)]_a^b.$$

Il contenuto del teorema fondamentale del calcolo espresso dal corollario 3.4 può essere riscritto nella seguente forma: per funzioni continue sull'intervallo $[a, b]$ abbiamo che

$$\int f(x) dx = F(x) + c \implies \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

Esempio 3.7. La funzione $x^3 - 2x$ è una primitiva di $3x^2 - 2$ su tutto \mathbb{R} . Dunque,

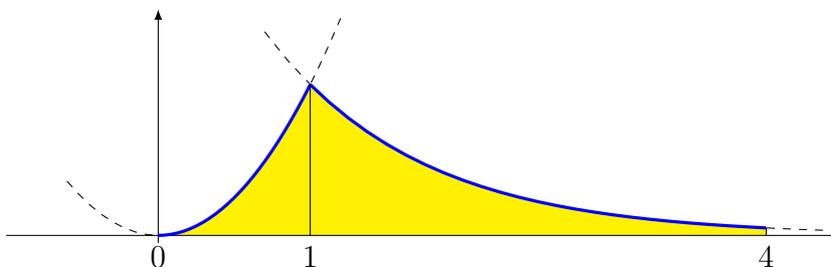
$$\int (3x^2 - 2) dx = x^3 - 2x + c,$$

mentre

$$\int_{-1}^2 (3x^2 - 2) dx = [x^3 - 2x]_{x=-1}^{x=2} = (2^3 - 2 \cdot 2) - ((-1)^3 - 2 \cdot (-1)) = 4 - 1 = 3.$$

Esempio 3.8. Consideriamo la funzione $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \min \{x^2, e^{1-x}\}.$$



Si tratta di una funzione non negativa. Vogliamo calcolare l'area del suo sottografo, ovvero l'integrale $\int_0^4 f$. Si verifica facilmente che su $[0, 1]$ abbiamo $f(x) = x^2$ e una sua primitiva è $\frac{1}{3}x^3$, mentre su $[1, 4]$ abbiamo $f(x) = e^{1-x}$ e una sua primitiva è $-e^{1-x}$. usando la proprietà di additività e il teorema fondamentale del calcolo otteniamo

$$\int_0^4 f = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 e^{1-x} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + [-e^{1-x}]_1^4 = \frac{1}{3} - 0 + (-e^{-3}) - (-1) = \frac{4}{3} - \frac{1}{e^3}.$$

Osservazione 3.9. Anche se vengono scritti con simboli simili ricordiamoci che:

- gli integrali di Riemann, $\int_a^b f$, detti anche integrali definiti, sono dei numeri;
- gli integrali indefiniti, $\int f$, sono invece delle (famiglie di) funzioni.

Per definire gli integrali definiti abbiamo utilizzato approssimazioni tramite somme di Darboux, mentre per definire gli integrali indefiniti abbiamo usato il concetto di primitiva, il quale si basa sulla nozione di derivata. Il teorema fondamentale del calcolo descrive lo stretto legame tra funzioni integrali e primitive, e quindi costituisce come un ponte che collega il calcolo differenziale (derivate e primitive) con il calcolo integrale (somme di Darboux e integrali di Riemann).

Osservazione 3.10. Ricordiamoci di fare attenzione al fatto che l'enunciato del teorema fondamentale del calcolo, in entrambe le sue forme, si applica a funzioni definite su *un intervallo*, e può perdere di validità quando viene applicato a funzioni il cui dominio non è un intervallo. Ad esempio, la funzione $1/x^2$ è la derivata della funzione $-1/x$, dunque $-1/x$ è primitiva di $1/x^2$. Se applicassimo il teorema fondamentale del calcolo in modo sbadato troveremmo che

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-3}^3 = \left(-\frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{-3} \right) = -\frac{2}{3} < 0,$$

ma è assurdo pensare che l'integrale di una funzione positiva risulti negativo. L'errore sta nel fatto che abbiamo applicato la formula del teorema fondamentale del calcolo sull'intervallo $[-3, 3]$, ma la funzione integranda non è definita nel punto $x = 0$, e non è nemmeno integrabile secondo Riemann in quanto non è limitata.

Comunque, grazie al teorema fondamentale del calcolo, il problema del calcolo degli integrali di Riemann in molti casi si trasforma nel problema di determinare le primitive delle funzioni integrande.

Esercizio 3.11. Determina i valori delle costanti A e B in modo che la funzione

$$F(x) := A \cos(x) + B \sin(x)$$

sia una primitiva della funzione

$$f(x) = \cos(x + 1) - \sin(x - 2).$$

Esercizio 3.12. Usando il fatto che $\frac{1}{n}x^n$ è primitiva di x^{n-1} per ogni $n \in \mathbb{N}$, calcola i seguenti integrali:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 (x^3 - 2x + 1) \, dx, & \quad \int_0^3 x(x-1)(x-2) \, dx, \\ \int_{-1}^4 x(1-x) \, dx, & \quad \int_{-1}^4 |x(1-x)| \, dx, \\ \int_0^8 \min\{2x(x-3), (x-2)(x-6)\} \, dx, & \quad \int_0^8 \max\{2x(x-3), (x-2)(x-6)\} \, dx. \end{aligned}$$

Esercizio 3.13. Calcola il valore dell'integrale $\int_0^1 \frac{1-x^{10}}{1-x} \, dx$.

Esercizio 3.14. Disegna il grafico della funzione $F(x) := \int_0^x (t+1)(t-3) \, dt$.

Esercizio 3.15. Dimostra che se $f(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora f è identicamente nulla.

Le tecniche di calcolo di primitive saranno l'oggetto delle prossime lezioni.