Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 07

Funzioni integrabili e proprietà dell'integrale di Riemann

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 31 marzo 2021)

In questa lezione vedremo come applicare i criteri di integrabilità visti nella scorsa lezione per verificare come quasiasi funzione limitata che possieda un minimo di regolarità sia effettivamente integrabile su intervalli limitati.

Descriveremo inoltre le proprietà principali dell'integrale di Riemann: monotonia, additività e linearità. Esse sono intimamente legate ai principi fondamendali che avevamo richiesto all'inizio della lezione 06 per una accettabile teoria della misura di aree.

Nel seguito, data una funzione f a valori reali definita sull'intervallo I, indicheremo l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori che f assume su I con la notazione

$$m_I(f) := \inf_{x\in I} f(x), \qquad M_I(f) := \sup_{x\in I} f(x).$$

1 Integrabilità delle funzioni monotone

Teorema 1.1. *Ogni funzione monotona definita su un intervallo limitato è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso di funzioni non decrescenti (il caso per funzioni non crescenti è del tutto analogo). Supponiamo che $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sia una funzione non decrescente,

$$x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2), \qquad x_1, x_2 \in [a,b].$$

Consideriamo la suddivisione uniforme $\sigma_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, che scompone $[a,b]$ in n intervalli di uguale lunghezza,

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad \mathcal{L}(I_k) = |\sigma_n| = \frac{b-a}{n}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

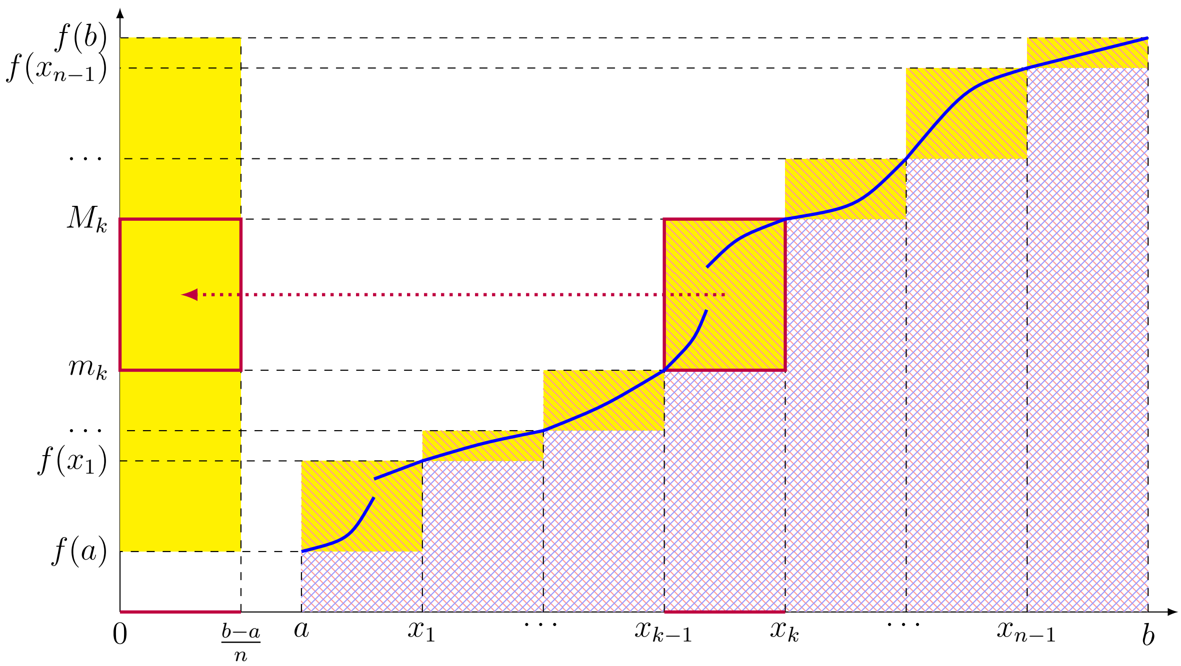
Siccome la funzione è non decrescente, su ciascun intervallo essa assume il suo valore minimo nell'estremo inferiore dell'intervallo e assume il suo valore massimo nell'estremo superiore dell'intervallo,

$$m_k := m_{I_k}(f) = \min_{I_k} f = f(x_{k-1}), \qquad M_k := M_{I_k}(f) = \max_{I_k} f = f(x_k).$$

Essendo σ_n una suddivisione uniforme, la differenza tra la somma superiore e la somma inferiore relative a σ_n si riduce ad una somma telescopica facilmente calcolabile,

$$\overline{S}(f,\sigma_n) - \underline{S}(f,\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\mathcal{L}(I_k) = |\sigma_n| \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) =$$
$$= \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \frac{(b-a)\big(f(b) - f(a)\big)}{n}.$$

Quando facciamo tendere $n \to +\infty$ otteniamo che questa differenza è infinitesima e dunque per uno dei criteri di integrabilità visti la scorsa lezione ne segue che f è integrabile su $[a,b]$.



$\square$

Ad esempio, essendo monotone sono dunque integrabili:

- per ogni $b > 0$, la funzione esponenziale $x \mapsto b^x$ su ogni intervallo limitato;
- la funzione logaritmo, $\log(x)$, e le funzioni potenza, $x \mapsto x^p$, su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $]0,+\infty[$;
- la funzione seno su $[-\pi/2, \pi/2]$ e la funzione coseno su $[0,\pi]$;

- la funzione tangente su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $]-\pi/2, \pi/2[$;
- le funzioni arcoseno e arcocoseno su $[-1, 1]$;
- la funzione arcotangente su ogni intervallo limitato;
- la funzione segno, la funzione parte intera, le funzioni parte positiva e parte negativa, su ogni intervallo limitato.

2 Integrabilità di funzioni continue

Abbiamo visto (durante le lezioni del primo semestre) che una funzione $f(x)$ si dice continua quando per ogni punto $x_\star$ del suo dominio si ha che

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom}(f), \quad |x - x_\star| < \delta \implies |f(x) - f(x_\star)| < \varepsilon.$$

Il valore di δ che appare in questa definizione, dipende dalla scelta di ε, ma può dipendere anche dalla scelta del punto $x_\star$; quando il valore di δ può essere scelto in modo indipendente dalla scelta del punto $x_\star$ allora si dice che la continuità di f è uniforme.

Definizione 2.1. Una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ definita sul dominio $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice che è *uniformemente continua* su E quando

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E, \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Ovviamente ogni funzione uniformemente continua è continua, ma non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue.

Esempio 2.2.

- La funzione $f(x) = x^2$ è uniformemente continua su $[0, 1]$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, se scegliamo $\delta := \frac{1}{2}\varepsilon$, allora per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in [0, 1]$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ abbiamo
$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| = (x_1 + x_2) \cdot |x_1 - x_2| < 2 \cdot \delta = \varepsilon.$$
- La funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $[1, +\infty[$. Infatti, scegliamo ad esempio $\varepsilon = 1$, se supponiamo che esista un $\delta > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \geqslant 1$ si abbia
$$|x_1 - x_2| < \delta \implies \left|x_1^2 - x_2^2\right| < 1,$$
prendendo $x_1 = 1 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}\delta$ e $x_2 = 1 + \frac{1}{\delta}$, avremmo che dovrebbe essere
$$1 > \left(1 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}\delta\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^2 = 1 + \delta + \frac{1}{4}\delta^2,$$
ma ciò è impossibile.

- La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua su $[0, +\infty[$. Infatti, dato un $\varepsilon > 0$ scegliamo $\delta = \varepsilon^2$, se $0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 < x_2 + \delta$ allora quando $x_1 < \varepsilon^2$ abbiamo
$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \leqslant \sqrt{x_1} < \varepsilon,$$
mentre quando $x_1 \geqslant \varepsilon^2$ abbiamo
$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leqslant \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1}} < \frac{\delta}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Su intervalli chiusi e limitati i due concetti, continuità e uniforme continuità, coincidono.

Lemma 2.3. *Ogni funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.*

La dimostrazione di questo lemma si basa sulle proprietà di compattezza degli intervalli chiusi e limitati (come il fatto che ogni successione in un intervallo chiuso e limitato possiede una sottosuccessione convergente). Non riportiamo qui i dettagli. Vediamo invece come con altre ipotesi di regolarità, leggermente più forti della sola continuità, si può comunque recuperare l'uniforme continuità.

Definizione 2.4. Una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ definita sul dominio $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice che è *lipschitziana* su E quando esiste una costante $L \geqslant 0$ tale che
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2|\,, \qquad \forall x_1, x_2 \in E.$$
La costante L si dice *costante di lipschitzianità.*

Esempio 2.5.

- La funzione $f(x) = x^2$ è lipschitziana su $[0, 1]$ con costante di lipschitzianità $L = 2$. Infatti, per ogni $x_1, x_2 \in [0, 1]$ si ha
$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| = (x_1 + x_2) \cdot |x_1 - x_2| \leqslant 2 \cdot |x_1 - x_2|\,.$$

- La funzione $f(x) = x^2$ non è lipschitziana su $[1, +\infty[$. Infatti, se esistesse una costante L di lipschitzianità, per ogni $x_1, x_2 \geqslant 1$ si avrebbe
$$\left|x_1^2 - x_2^2\right| \leqslant L\,|x_1 - x_2|\,,$$
prendendo $x_1 = L + 2$ e $x_2 = L + 1$, avremmo che dovrebbe essere
$$\left|(L + 2)^2 - (L + 1)^2\right| \leqslant L\big|(L + 2) - (L + 1)\big|,$$
ma ciò si riduce a $2L + 3 \leqslant L$ che è impossibile per qualsiasi $L \geqslant 0$.

- La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è lipschitziana su $[1, +\infty[$. Infatti, quando $1 \leqslant x_2 \leqslant x_1$ abbiamo

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}(x_1 - x_2) \leqslant \frac{1}{2}(x_1 - x_2),$$

e dunque possiamo prendere $\frac{1}{2}$ come costante di lipschitzianità.

- La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è lipschitziana su $[0, 1]$. Infatti, se esistesse una costante L di lipschitzianità, quando $0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant 1$ avremmo

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \leqslant L(x_1 - x_2),$$

e scegliendo $x_1 = (1 + 2L)^{-2}$e $x_2 = \frac{1}{4}(1 + 2L)^{-2}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1+2L)} = \sqrt{(1+2L)^{-2}} - \sqrt{\frac{1}{4}(1+2L)^{-2}} \leqslant \\ \leqslant L\left((1+2L)^{-2} - \frac{1}{4}(1+2L)^{-2}\right) = \frac{3L}{4(1+2L)^2},\end{aligned}$$

che equivale a $2(1 + 2L) \leqslant 3L$, cosa che non può essere vera.

Lemma 2.6. *Ogni funzione lipschitziana è anche uniformemente continua.*

Dimostrazione. Sia L una costante di lipschitzianità per la funzione f. Per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, quando $|x_1 - x_2| < \delta$ abbiamo

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2| < L\delta = \varepsilon.$$

□

Dalla definizione si deduce che una funzione è lipschitziana quando i suoi rapporti incrementali sono tutti limitati in valore assoluto dalla una costante. Il teorema di Lagrange ci dice che per funzioni derivabili su intervalli i rapporti incrementali coincidono con valori assunti dalla derivata; dunque la limitatezza della derivata implica la lipschitzianità della funzione. Una funzione si dice di classe C^1 quando è derivabile e la derivata è continua.

Lemma 2.7. *Ogni funzione di classe C^1 definita su un intervallo chiuso e limitato è lipschitziana.*

Dimostrazione. Sia $f(x)$ una funzione di classe C^1 definita sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Il valore assoluto della sua derivata $|f'(x)|$ è una funzione continua su $[a, b]$. Per il teorema di Weierstrass abbiamo che $|f'(x)|$ è una funzione limitata su $[a, b]$, in quanto possiede un punto di massimo; poniamo $L := \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 \neq x_2$, per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste un punto ξ compreso tra x_1 e x_2 tale che

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi),$$

e dunque
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant L\,|x_1 - x_2|\,.$$
$\square$

La regolarità di classe C^1 è una condizione più forte della lipschitzianità; esistono funzioni lipschitziane che non sono derivabili, come ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ che non è derivabile nel punto $x = 0$, ma è lipschitziana con costante di lipschitzianità uguale a 1, in quanto
$$\big||x_1| - |x_2|\big| \leqslant |x_1 - x_2|\,.$$
Riassumendo, per una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definita sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, abbiamo la seguente gerarchia di condizioni di regolarità:
$$\text{regolarità } C^1 \implies \text{lipschitzianità} \implies \text{uniforme continuità} \iff \text{continuità.} \tag{1}$$

Esercizio 2.8. Verifica che le funzioni "parte positiva", $(x)_+ := \max\{x, 0\}$, e "parte negativa", $(x)_- := \max\{0, -x\}$, sono lipschitziane su $\mathbb{R}$. Qual'è la loro migliore costante di lipschitzianità?

Esercizio 2.9. Determina quali delle seguenti funzioni è di classe C^1, o lipschitziana, o uniformemente continua, o continua, sugli intervalli indicati.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$ su $]-\infty, 0]$ e su $[0, +\infty[$.
2. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (funzione parte intera) su $[0, 10]$.
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ su $]0, 1]$ e su $[1, +\infty[$.
4. $f(x) = \sqrt{\sin x}$ su $[0, \pi]$ e su $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$.

Lemma 2.10. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata definita sull'intervallo limitato I. Siano $M := M_I(f) = \sup_I f$ e $m := m_I(f) = \inf_I f$. Allora*
$$M - m = \sup_{x_1, x_2 \in I} |f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

Dimostrazione. Sia $K := \sup_{x_1,x_2\in I} |f(x_1) - f(x_2)|$.

Per definizione di M e m, per ogni $x_1, x_2 \in I$ abbiamo che $f(x_1) \leqslant M$ e $f(x_2) \geqslant m$, e dunque
$$f(x_1) - f(x_2) \leqslant M - m;$$
scambiando tra loro x_1 e x_2 abbiamo anche
$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant M - m.$$
Quindi, per ogni $x_1, x_2 \in I$ abbiamo
$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leqslant M - m,$$

da cui segue che $K \leqslant M - m$.

Viceversa. Fissato $\varepsilon > 0$, siccome $M - \frac{1}{2}\varepsilon$ non è maggiorante dei valori di f esiste un $x_1 \in I$ tale che $f(x_1) > M - \frac{1}{2}\varepsilon$, e siccome $m + \frac{1}{2}\varepsilon$ non è minorante dei valori di f esiste un $x_2 \in I$ tale che $f(x_2) < m + \frac{1}{2}\varepsilon$. Allora

$$K \geqslant f(x_1) - f(x_2) > \Big(M - \frac{1}{2}\varepsilon\Big) - \big(m + \frac{1}{2}\varepsilon\big) = M - m - \varepsilon,$$

Dunque $K > M - m - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$; facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$ otteniamo che $K \geqslant M - m$. □

Teorema 2.11. *Ogni funzione uniformemente continua definita su un intervallo chiuso e limitato è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su $[a,b]$. Per la definizione di uniforme continuità, dato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2}$$

Consideriamo ora una suddivisione uniforme σ che scompone $[a,b]$ in n intervalli di uguale lunghezza,

$$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad [a,b] = \cup_{k=1}^{n} I_k, \quad I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad \mathcal{L}(I_k) = \frac{b-a}{n}.$$

Scegliamo n sufficientemente grande in modo che l'ampiezza della suddivisione sia minore di δ, ovvero

$$|\sigma| = \frac{b-a}{n} < \delta \iff n > \frac{b-a}{\delta}.$$

Su ciascun intervallo I_k poniamo $m_k := m_{I_k(f)} = \min_{I_k} f$ e $M_k := M_{I_K(f)} = \max_{I_k} f$. Siccome l'intervallo I_k ha una lunghezza minore di δ, due punti qualsiasi in I_k distano tra loro sempre meno di δ, quindi per il lemma 2.10 applicato ad f su I_k e utilizzando la condizione (2) di uniforme continuità, otteniamo che

$$M_k - m_k = \sup_{t_1, t_2 \in I_k} |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Se ora calcoliamo la differenza tra la somma superiore e la somma inferiore troviamo

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\mathcal{L}(I_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Per il criterio di integrabilità segue che f è integrabile. □

Per via delle implicazioni (1) sulle varie condizioni di regolarità, dal teorema segue come corollario che ogni funzione di classe C^1, o anche solo lipschitziana, o anche solo continua, definita su un intervallo chiuso e limitato, è integrabile secondo Riemann.

La continuità è quindi una condizione sufficiente per l'integrabilità, ma comunque non è una condizione necessaria. Ad esempio possiamo avere funzioni monotone che non sono continue, ma che sappiamo essere integrabili per via del teorema 1.1.

3 Integrabilità di funzioni composte

Teorema 3.1. *Sia $f\colon [a,b] \to [c,d]$ una funzione integrabile secondo Riemann definita sull'intervallo limitato $[a,b]$ che assume valori nell'intervallo limitato $[c,d]$. Sia $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora la funzione composta $g \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Sia $L > 0$ una costante di lipschitzianità della funzione g. Dato $\varepsilon > 0$, siccome f è integrabile, per i criteri di integrabilità sappiamo che esiste una suddivisione σ di $[a,b]$ tale che

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Indichiamo la suddivisione σ con la solita notazione

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad [a,b] = \cup_{k=1}^n I_k, \quad I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Vogliamo confrontare le somme di Darboux della funzione composta $g \circ f$ con quelle della funzione f. Per ogni intervallo I_k poniamo

$$\begin{aligned} m_k &:= m_{I_k}(f) = \inf_{x \in I_k} f(x), & M_k &:= M_{I_k}(f) = \sup_{x \in I_k} f(x), \\ \widetilde{m}_k &:= m_{I_k}(g \circ f) = \inf_{x \in I_k} g(f(x)), & \widetilde{M}_k &:= M_{I_k}(g \circ f) = \sup_{x \in I_k} g(f(x)). \end{aligned}$$

Per il lemma 2.10 e per la condizione di lipschitzianità di g abbiamo

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k = \sup_{x_1, x_2 \in I_k} \left| g\big(f(x_1)\big) - g\big(f(x_2)\big) \right| &\leqslant \sup_{x_1, x_2 \in I_k} L\,|f(x_1) - f(x_2)| = \\ &= L \sup_{x_1, x_2 \in I_k} |f(x_1) - f(x_2)| = L(M_k - m_k). \end{aligned}$$

Otteniamo allora che

$$\begin{aligned} \overline{S}(g \circ f, \sigma) - \underline{S}(g \circ f, \sigma) &= \sum_{k=1}^n \left(\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k \right) \mathcal{L}(I_k) \leqslant \sum_{k=1}^n L\,(M_k - m_k)\,\mathcal{L}(I_k) = \\ &= L \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\,\mathcal{L}(I_k) = L\left(\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) \right) < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per il criterio di integrabilità segue che $g \circ f$ è integrabile. □

Corollario 3.2. *Se $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ allora sono integrabili anche le funzioni:*

- *$|f(x)|$ (valore assoluto di f),*
- *$(f(x))_+$ (parte positiva di f),*
- *$(f(x))_-$ (parte negativa di f).*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema 3.1 componendo f con le funzioni lipschitziane $g_1(t) := |t|$, $g_2(t) := (t)_+$, $g_3(t) := (t)_-$. □

Corollario 3.3. *Se $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$ allora anche $(f(x))^2$ è integrabile.*

Dimostrazione. Se f è integrabile significa che è limitata; supponiamo che assuma valori compresi nell'intervallo $[m, M]$. Sull'intervallo chiuso e limitato $[m, M]$ la funzione $g(t) = t^2$ è lipschitziana (in quanto è di classe C^1). Per il teorema 3.1 la funzione composta di $g(f(x)) = (f(x))^2$ è integrabile. □

Esercizio 3.4. Spiega perché se $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$ allora lo è anche $e^{f(x)}$.

Esercizio 3.5. Sia $f(x)$ integrabile su $[a, b]$ e sia $m := \inf_{[a,b]} f$. Dimostra che se $m > 0$ allora $\frac{1}{f(x)}$ è integrabile su $[a, b]$.

Esercizio 3.6. Sia $f(x)$ integrabile su $[a, b]$. Sotto quali ipotesi su f puoi garantire che sia integrabile anche $\log(f(x))$?

---

4 Proprietà di monotonia

Per l'integrale di Riemann vale una proprietà di monotonia riguardante il confronto tra le funzioni integrande.

Teorema 4.1. *Siano f e g due funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$. Se $f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

Dimostrazione. Se I è un qualsiasi intervallo contenuto in $[a, b]$, per il fatto che f è puntualmente maggiorata da g, abbiamo che $m_I(f) \leqslant m_I(g)$. Se consideriamo una qualsiasi suddivisione σ che scompone $[a, b]$ in n intervalli I_k, con $k = 1, \ldots, n$, abbiamo dunque che $m_{I_k}(f) \leqslant m_{I_k}(g)$ per ogni k, e per quanto riguarda le somme inferiori otteniamo

$$\underline{S}(f, \sigma) = \sum_k m_{I_k}(f)\mathcal{L}(I_k) \leqslant \sum_k m_{I_k}(g)\mathcal{L}(I_k) = \underline{S}(g, \sigma) \leqslant \int_a^b g.$$

Dunque $\int_a^b g$ è un maggiorante di ogni somma inferiore per f e quindi $\int_a^b f$, essendo il minimo dei maggioranti delle somme inferiori di f, sarà minore o uguale a $\int_a^b g$.

(Potevamo fare una dimostrazione analoga utilizzando le somme superiori invece che quelle inferiori.) □

In particolare, se f è integrabile su $[a, b]$ e poniamo

$$m := m_{[a,b]}(f) = \inf_{[a,b]} f, \qquad M := M_{[a,b]}(f) = \sup_{[a,b]} f,$$

siccome $m \leqslant f(x) \leqslant M$ per ogni $x \in [a,b]$, dalla proprietà di monotonia segue che

$$m(b-a) = \int_a^b m \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a).$$

Abbiamo anche una seconda proprietà di monotonia riguardante il dominio di integrazione.

Proposizione 4.2. *Sia f integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a,b]$. Se l'intervallo $[c,d]$ è contenuto in $[a,b]$, ovvero se $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, allora abbiamo che f è integrabile su $[c,d]$.*

Dimostrazione. Siccome f è integrabile su $[a,b]$, dato $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione σ di $[a,b]$ tale che

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Raffiniamo la suddivisione aggiungendo a σ i punti c e d ponendo $\widetilde{\sigma} := \sigma \cup \{c,d\}$. Essendo $\widetilde{\sigma}$ un raffinamento di σ abbiamo che

$$\underline{S}(f,\sigma) \leqslant \underline{S}(f,\widetilde{\sigma}), \qquad \overline{S}(f,\widetilde{\sigma}) \leqslant \overline{S}(f,\sigma).$$

e dunque,

$$\overline{S}(f,\widetilde{\sigma}) - \underline{S}(f,\widetilde{\sigma}) < \varepsilon.$$

Se estraiamo da $\widetilde{\sigma}$ solo i punti che appartengono a $[c,d]$ otteniamo la suddivisione

$$\widehat{\sigma} := \widetilde{\sigma} \cap [c,d]$$

relativa all'intervallo $[c,d]$. Gli intervalli in cui viene scomposto $[c,d]$ da parte di $\widehat{\sigma}$ fanno parte degli intervalli in cui viene scomposto $[a,b]$; poiché il contributo di ciascun intervallo I nel calcolo della differenza tra somma superiore e somma inferiore è sempre una quantità non negativa, $(M_I(f) - m_I(f))\,\mathcal{L}(I) \geqslant 0$, avremo perciò

$$\overline{S}(f,\widehat{\sigma}) - \underline{S}(f,\widehat{\sigma}) \leqslant \overline{S}(f,\widetilde{\sigma}) - \underline{S}(f,\widetilde{\sigma}) < \varepsilon.$$

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare una suddivisione $\widehat{\sigma}$ di $[c,d]$ per la quale la differenza tra somma superiore e somma inferiore è minore di ε, e per il criterio di integrabilità questo significa che f è integrabile su $[c,d]$. □

5 Proprietà di additività

Funzioni integrabili su ciascuno di due intervalli adiacenti sono integrabili sull'unione dei due intervalli.

Teorema 5.1. *Siano $a,b,c \in \mathbb{R}$ tali che $a < b < c$. Sia f una funzione definita su $[a,c]$. Se f è integrabile secondo Riemann sia sull'intervallo $[a,b]$ e sia sull'intervallo $[b,c]$, allora f è integrabile sull'intervallo $[a,c]$ e abbiamo che*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{3}$$

Dimostrazione. Siccome f è integrabile su $[a,b]$, per il criterio di integrabilità, sappiamo che esiste una successione $(\sigma_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[a,b]$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f,\sigma_n^{(1)}) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,\sigma_n^{(1)}) = \int_a^b f.$$

Analogamente, siccome f è integrabile su $[b,c]$, per il criterio di integrabilità, sappiamo che esiste una successione $(\sigma_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[b,c]$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f,\sigma_n^{(2)}) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,\sigma_n^{(2)}) = \int_b^c f.$$

Le unioni $\sigma_n := \sigma_n^{(1)} \cup \sigma_n^{(2)}$ definiscono una successione di suddivisioni di $[a,c]$, e abbiamo che

$$\underline{S}(f,\sigma_n) = \underline{S}(f,\sigma_n^{(1)}) + \underline{S}(f,\sigma_n^{(2)}), \qquad \overline{S}(f,\sigma_n) = \overline{S}(f,\sigma_n^{(1)}) + \overline{S}(f,\sigma_n^{(2)}).$$

Otteniamo allora che

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f,\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,\sigma_n) = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dunque f è integrabile su $[a,c]$ e l'integrale su $[a,c]$ coincide con la somma degli integrali su $[a,b]$ e su $[b,c]$. □

Finora abbiamo definito l'integrale $\int_a^b f$ sempre sottointendendo che gli estremi di integrazione verificassero la condizione $a < b$. Possiamo dare un senso all'integrale $\int_a^b f$ anche quando $a \geqslant b$ utilizzando come criterio per la sua definizione quello di cercare di rispettare in ogni caso la formula di additività (3). Ad esempio, scegliendo $b = a$ in (3) avremo

$$\int_a^c f = \int_a^a f + \int_a^c f,$$

da cui si ricava che dovrà essere $\int_a^a f = 0$. Mentre se scegliamo $c = a$ avremo

$$0 = \int_a^a f = \int_a^b f + \int_b^a f,$$

da cui si ricava che $\int_a^b f$ e $\int_b^a f$ sono due valori opposti. Ecco dunque giustificata la seguente definizione:

Definizione 5.2. Per ogni funzione definita nel punto $a \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\int_a^a f = 0.$$

Per ogni funzione integrabile sull'intervallo $[a,b]$, con $a < b$, poniamo

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

È facile verificare che con queste definizioni la proprietà di additività (3) continua a valere per ogni funzione f che sia integrabile su un intervallo contenente i tre punti a, b, c, qualsiasi sia l'ordine con cui si presentano:

Proposizione 5.3. *Sia f integrabile sull'intervallo I. Allora per ogni $a, b, c \in I$ si ha che*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

6 Proprietà di linearità

Proposizione 6.1. *Siano f e g due funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$. Allora la somma $f + g$ è integrabile su $[a, b]$ e abbiamo*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Dimostrazione. Per ogni intervallo I contenuto in $[a, b]$ abbiamo

$$m_I(f) + m_I(g) \leqslant f(x) + g(x) \leqslant M_I(f) + M_I(g), \quad \forall x \in I,$$

e ciò implica che

$$m_I(f) + m_I(g) \leqslant m_I(f+g) \leqslant M_I(f+g) \leqslant M_I(f) + M_I(g).$$

Sommando rispetto a tutti gli intervalli in cui una qualsiasi suddivisione σ scompone l'intervallo $[a, b]$ otteniamo allora che

$$\underline{S}(f,\sigma) + \underline{S}(g,\sigma) \leqslant \underline{S}(f+g,\sigma) \leqslant \overline{S}(f+g,\sigma) \leqslant \overline{S}(f,\sigma) + \overline{S}(g,\sigma). \tag{4}$$

Siccome f e g sono integrabili su $[a, b]$, esisterà una successione $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[a, b]$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f,\sigma_n) = \int_a^b f,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(g,\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(g,\sigma_n) = \int_a^b g.$$

(Ad esempio, possiamo considerare la successione (σ_n) delle suddivisioni uniformi.) Applichiamo le disuguaglianze (4) alla successione di suddivisioni σ_n,

$$\underline{S}(f,\sigma_n) + \underline{S}(g,\sigma_n) \leqslant \underline{S}(f+g,\sigma_n) \leqslant \overline{S}(f+g,\sigma_n) \leqslant \overline{S}(f,\sigma_n) + \overline{S}(g,\sigma_n).$$

I termini centrali sono compresi tra due successioni che nel limite per $n \to +\infty$ convergono entrambe alla somma $\int_a^b f + \int_a^b g$; dunque per il confronto a sandwich otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f+g,\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f+g,\sigma_n) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Questo prova che $f + g$ è integrabile e che in suo integrale è dato dalla somma dei due integrali di f e g. □

Proposizione 6.2. *Se f è integrabile su $[a,b]$, allora anche la funzione opposta $-f$ è integrabile su $[a,b]$ e abbiamo che $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$.*

Dimostrazione. Useremo ripetutamente la seguente semplice proprietà degli estremi inferiori e degli estremi superiori di insiemi di numeri reali: se A è un insieme di numeri reali non vuoto, e $B = \{-x \colon x \in A\}$ è l'insieme degli opposti degli elementi di A, allora

$$\inf A = -\sup B, \qquad \sup A = -\inf B.$$

Applicando tale proprietà ai valori che la funzione f assume su un intervallo I contenuto in $[a,b]$ otteniamo

$$m_I(-f) = -M_I(f), \qquad M_I(-f) = -m_I(f).$$

Da ciò segue che per ogni suddivisione σ di $[a,b]$ abbiamo che

$$\underline{S}(-f,\sigma) = -\overline{S}(f,\sigma), \qquad \overline{S}(-f,\sigma) = -\underline{S}(f,\sigma).$$

Passando all'estremo superiore per le somme inferiori e all'estremo inferiore per le somma superiori otteniamo

$$\underline{\int_a^b}(-f) = -\overline{\int_a^b} f, \qquad \overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f.$$

Siccome f è integrabile abbiamo che $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$ e dunque segue che

$$\underline{\int_a^b}(-f) = \overline{\int_a^b}(-f) = -\int_a^b f.$$

□

Osservazione 6.3. Abbiamo visto nel Corollario 3.2 che se f è integrabile su $[a,b]$ allora anche $|f|$ lo è. Siccome abbiamo che

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

per la proprietà di monotonia e per l'integrabilità della funzione opposta abbiamo che

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|,$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|,$$

ovvero, il valore assoluto di un integrale è sempre minore o uguale all'integrale del valore assoluto. Questa è una proprietà analoga alla disuguaglianza triangolare, che dice che il valore assoluto di una somma è sempre minore o uguale alla somma dei valori assoluti.

Proposizione 6.4. *Sia $f(x)$ integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a,b]$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora il prodotto per scalare $\lambda f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ e abbiamo*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Diamo solo un cenno, lasciando al lettore l'esercizio di completare i dettagli. Nel caso $\lambda \geqslant 0$, si può partire con l'osservare che

$$m_I(\lambda f) = \lambda m_I(f), \qquad M_I(\lambda f) = \lambda M_I(f),$$

e poi si procede in modo analogo alle dimostrazioni precedenti considerando prima le somme di Darboux per arrivare poi agli integrali. Nel caso $\lambda < 0$, siccome $\lambda = -|\lambda|$, combiniamo quello che abbiamo ottenuto nel caso positivo con quello che sappiamo per l'opposto,

$$\int_a^b \lambda f = -\int_a^b |\lambda|\, f = -|\lambda| \int_a^b f = \lambda \int_a^b f.$$

□

Possiamo riassumere le proposizioni che abbiamo illustrato in questa sezione in un unico teorema, che dice che l'integrale di una combinazione lineare di funzioni integrabili coincide con la combinazione lineare degli integrali.

Teorema 6.5. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo $[a,b]$. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora la combinazione lineare $\lambda f(x) + \mu g(x)$ è integrabile su $[a,b]$ e abbiamo*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Applicando i risultati delle precedenti proposizioni abbiamo

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \int_a^b (\lambda f) + \int_a^b (\mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

□

Vediamo alcune conseguenze di queste proprietà di linearità.

Corollario 6.6. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili su $[a,b]$ allora sono integrabili su $[a,b]$ anche le seguenti funzioni:*

- *la funzione prodotto $(fg)(x) := f(x)g(x)$;*
- *la funzione massimo $\max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$;*
- *la funzione minimo $\min(f,g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$.*

Dimostrazione. Per il prodotto, osserviamo prima che se una funzione $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$ allora anche $(f(x))^2$ è integrabile su $[a,b]$, in quanto f^2 si ottiene componendo f con la funzione $g(t)=t^2$, che è lipschitziana sull'intervallo limitato che contiene l'immagine di f. Se f e g sono integrabili per linearità lo sono anche $f+g$ e $f-g$, e dunque anche $(f+g)^2$ e $(f-g)^2$. Dopo di che, l'integrabilità di fg segue per linearità dalla seguente identità

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2.$$

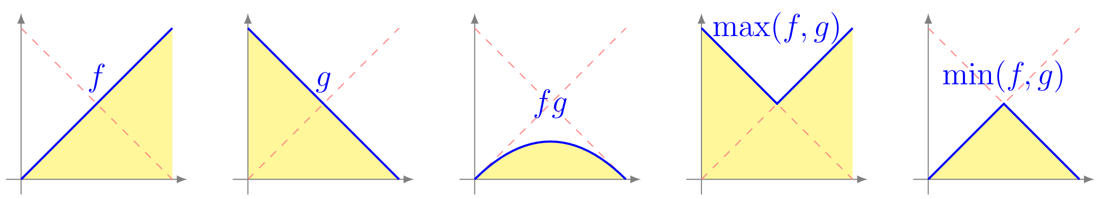
Osserviamo poi che se f e g sono integrabili allora lo sono anche $f+g$ e $|f-g|$ e quindi per l'integrabilità del massimo e del minimo possiamo usare le identità

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}\left|f-g\right|, \qquad \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}\left|f-g\right|.$$

□

Osservazione 6.7. Attenzione a non incorrere in errori banali, il corollario ci assicura l'integrabilità di prodotto, massimo e minimo di due funzioni, ma non ci dice niente riguardo al valore dei loro integrali. In generale non è vero che l'integrale di un prodotto sia il prodotto degli integrali, o che l'integrale del massimo sia il massimo degli integrali, o che l'integrale del minimo sia il minimo degli integrali. Ad esempio, se consideriamo $f(x) := x$ e $g(x) := 1-x$ sull'intervallo $[0,1]$ abbiamo che

$$\int_0^1 f = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 g = \int_0^1 (1-x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 fg = \int_0^1 (x-x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6}, \qquad \int_0^1 f \cdot \int_0^1 g = \frac{1}{4},$$
$$\int_0^1 \max(f,g) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \mathrm{d}x = \frac{3}{4},$$
$$\int_0^1 \min(f,g) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4},$$
$$\max\left\{\int_0^1 f, \int_0^1 g\right\} = \min\left\{\int_0^1 f, \int_0^1 g\right\} = \frac{1}{2}.$$



Esercizio 6.8. Sapendo che $\int_1^2 (f)_+ = 5$, $\int_2^4 (f)_+ = 3$, $\int_1^3 (f)_- = 8$, $\int_3^4 (f)_- = 2$, calcola il valore degli integrali $\int_1^4 f$ e $\int_1^4 |f|$.
