Analisi Matematica 1B - Lezione 4

Radici n-esime in campo complesso

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 18 marzo 2021)

Nella prima lezione abbiamo ricavato un metodo algebrico per calcolare radici quadrate in campo complesso. Dopo aver introdotto la notazione esponenziale nella seconda lezione, possiamo ora descrivere un metodo geometrico che ci permette di calcolare radici n-esime per ogni ordine $n \in \mathbb{N}$.

1 Radici n-esime di un numero complesso

Definizione 1.1. Dati $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{C}$ diciamo che un numero complesso z è una *radice n-esima* di w quando $z^n = w$.

Le radici n-esime di w sono dunque le soluzioni z dell'equazione

$$z^n = w. \tag{1}$$

Se $w = 0$, per la legge dell'annullamento del prodotto l'unica soluzione di $z^n = 0$ è il solo numero $z = 0$.

Nel caso in cui $w \neq 0$, per determinare le soluzioni di (1) esprimiamo sia w che z in forma esponenziale,

$$\begin{aligned} w &= s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, & s &= |w|, & \varphi &= \operatorname{Arg}(w) \pmod{2\pi}, \\ z &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, & r &= |z|, & \theta &= \operatorname{Arg}(z) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Siccome $z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, l'equazione diventa

$$r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi};$$

si tratta di un'uguaglianza tra due forme esponenziali, a sinistra un numero con modulo r^n e argomento $n\theta$ e a destra un numero con modulo s e argomento φ. Dunque avremo uguaglianza tra i moduli e uguaglianza tra gli argomenti a meno di multipli interi di 2π:

$$\begin{aligned} r^n &= s, \\ n\theta &= \varphi + 2\pi k, \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ne segue che possiamo ricavare r prendendo la radice n-esima reale non negativa del numero non negativo s, e calcolare θ dividendo per n l'equazione tra gli argomenti,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[n]{s}, \\ \theta = \theta_k &:= \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Otteniamo così che ogni soluzione di (1) è della forma

$$z = z_k := \sqrt[n]{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi, se z è una radice n-esima di w allora il suo modulo è univocamente determinato,

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}.$$

Osserviamo invece che l'argomento del numero z può assumere diversi valori θ_k al variare di $k \in \mathbb{Z}$, essi differiscono tra loro per multipli interi di $2\pi/n$,

$$\theta_k = \frac{\varphi}{n} \pmod{2\pi/n}.$$

L'angolo $2\pi/n$ corrisponde all'n-esima parte di un angolo giro, ciò significa che quando si aggiunge o toglie n volte quest'angolo si ritorna ad un argomento equivalente a quello di partenza, ovvero

$$\theta_{k\pm n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(k \pm n)}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \pm 2\pi = \theta_k \pm 2\pi = \theta_k \pmod{2\pi}.$$

Una volta fissato l'argomento, due argomenti equivalenti definiscono lo stesso numero complesso. Abbiamo solo n valori per l'argomento che definiscono numeri distinti:

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1},$$

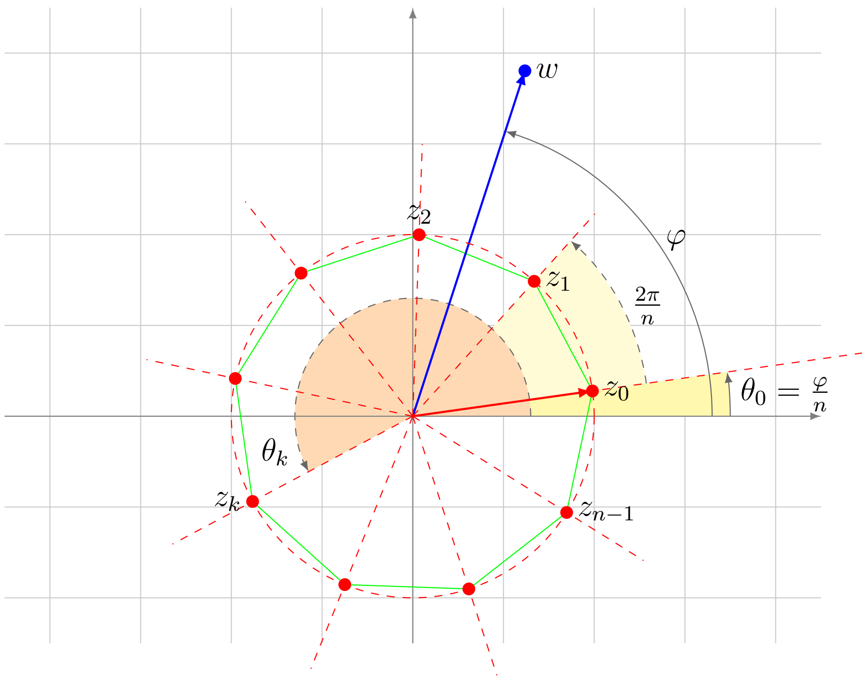
in quanto $\theta_n = \theta_0 \pmod{2\pi}$ e $\theta_{-1} = \theta_{n-1} \pmod{2\pi}$ e dunque $z_n = z_0$ e $z_{-1} = z_{n-1}$. Ne segue che, quando $w \neq 0$, abbiamo esattamente n soluzioni distinte per l'equazione (1): si tratta dei numeri che hanno modulo $\sqrt[n]{|w|}$ e argomento

$$\theta_k := \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

ovvero dei numeri

$$z_k := \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{Arg}(w)}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Essendo i loro moduli tutti uguali e gli argomenti equamente distribuiti nell'arco di un angolo giro, queste n radici n-esime nel piano complesso formano i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza con centro nell'origine. Per questo motivo una volta che si conosce una radice n-esima, tutte le altre possono essere ottenute facilmente in modo grafico con compasso, goniometro e righello costruendo il poligono regolare che ha centro nell'origine e un vertice nella radice nota.



Per ottenere l'argomento della prima di queste radici n-esime, z_0, basta dividere l'argomento del numero w per l'ordine n della radice:

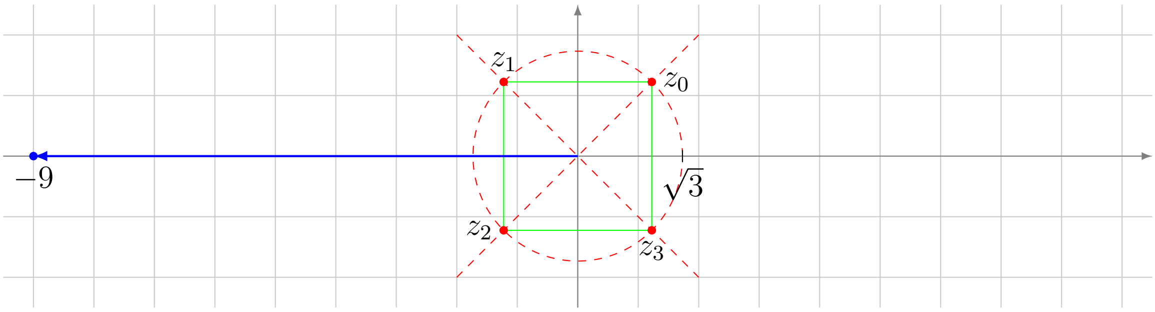
$$\operatorname{Arg}(z_0) = \frac{\operatorname{Arg}(w)}{n} \pmod{2\pi}.$$

Tutte le altre sono poi determinate dalla costruzione del poligono regolare.

Esempio 1.2. Calcoliamo le radici quarte del numero -9. Si tratta di un numero che ha modulo $|-9| = 9$ e argomento $\operatorname{Arg}(-9) = \pi$. Le sue radici quarte z_k, con $k = 0, 1, 2, 3$, avranno modulo $|z_k| = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. Una sua radice z_0 avrà argomento $\operatorname{Arg}(z_0) = \pi/4$ e dunque

$$z_0 = \sqrt{3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Tracciamo nel piano complesso la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$, il punto z_0 è individuato dall'intersezione di tale circonferenza con la bisettrice del primo quadrante ($\pi/4$ è metà dell'angolo retto). Tutte le altre le otteniamo costruendo il quadrato inscritto alla circonferenza con un vertice nel punto trovato, per la simmetria del quadrato questi punti si ottengono dalle intersezioni della circonferenza con le bisettrici dei quattro quadranti. Osservando la figura ottenuta troviamo che $z_2 = -z_0$, $z_3 = \overline{z_0}$ e $z_1 = -z_3$.



Dunque le quattro radici quarte di -9 sono:

$$z_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad z_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad z_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Esempio 1.3. Calcoliamo le radici seste del numero $\frac{1}{8}\mathrm{i}$. Si tratta di un numero che ha modulo $\left|\frac{1}{8}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{8}$ e argomento $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{8}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{2}$. Le sue radici seste z_k, con $k = 0, 1, \ldots, 5$, avranno modulo $|z_k| = \sqrt[6]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Una sua radice z_0 avrà argomento

$$\operatorname{Arg}(z_0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12},$$

e dunque

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

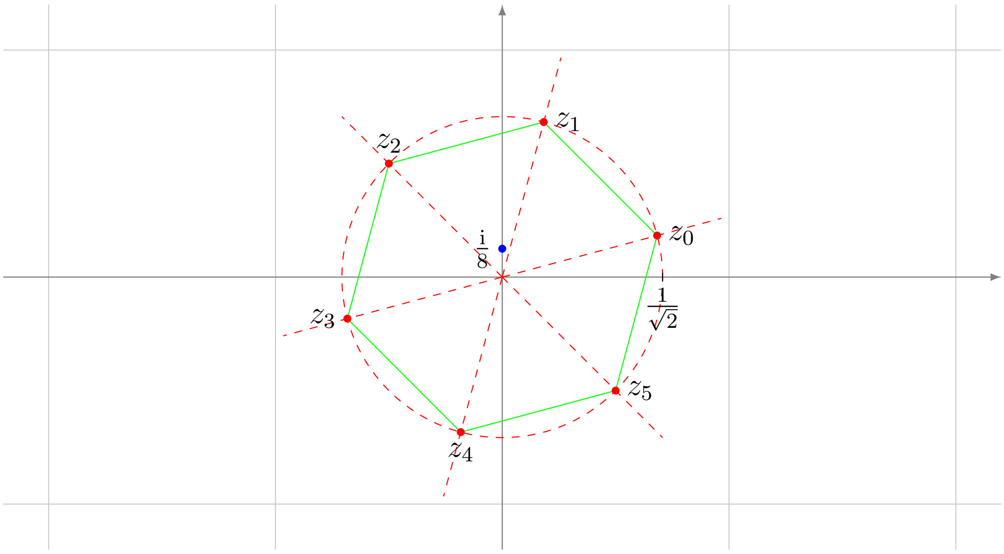
Tracciamo nel piano complesso la circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il punto z_0 è individuato dall'intersezione di tale circonferenza con la semiretta che forma un angolo di $\frac{\pi}{12}$ (ovvero 15 gradi) con il semiasse positivo delle ascisse. Tutte le altre le otteniamo costruendo l'esagono inscritto alla circonferenza con un vertice nel punto trovato, per la simmetria dell'esagono questi punti formano tre coppie di punti opposti separati da angoli di $\frac{\pi}{3}$ (ovvero 60 gradi). Per trovare z_1 basta ruotare z_0 di un angolo di $\frac{\pi}{3}$, ottenendo un argomento di $\frac{5}{12}\pi$ (angolo complementare di $\frac{\pi}{12}$),

$$z_1 = z_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{12}\pi} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$

Per trovare z_2 ruotiamo ulteriormente z_1 di un angolo di $\frac{\pi}{3}$, ottenendo un argomento di $\frac{3}{4}\pi$ (bisettrice del secondo quadrante),

$$z_2 = z_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Il punto z_3 è opposto a z_0; il punto z_4 è opposto a z_1; il punto z_5 è opposto a z_2.



Dunque le sei radici quarte di -9 sono:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \qquad z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{4},$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_3 = -\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{4},$$
$$z_4 = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \qquad z_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Osservazione 1.4. In campo reale, quando $p \geqslant 0$, con il simbolo $\sqrt[n]{p}$ indichiamo l'unica radice n-esima non negativa di p. Se $p > 0$ e n è pari, esiste anche un'altra radice n-esima data da $-\sqrt[n]{p} < 0$. Inoltre: se $p < 0$ e n è pari sappiamo che radici n-esime di p non esistono in campo reale, in quanto $x^n \geqslant 0$ per ogni x reale; mentre se $p < 0$ e n è dispari poniamo $\sqrt[n]{p} = -\sqrt[n]{-p}$, sfruttando la simmetria dispari della funzione $x \mapsto x^n$. In ogni caso, quando esiste, il simbolo $\sqrt[n]{p}$ in modo unico una ben precisa radice n-esima di p.

In campo complesso, le radici n-esime sono n disposte secondo la simmetria che abbiamo descritto formando i vertici di un poligono regolare. Tra esse non ce ne è una che sia più importante delle altre. Dunque in $\mathbb{C}$ non ha molto senso parlare *della* radice n-esima di un numero, piuttosto ha senso parlare *delle* radici n-esime, tutte insieme. E' per questo che il simbolo $\sqrt[n]{w}$ non ha un significato univoco per numeri complessi w, ed è dunque consigliabile evitarne l'uso.

Osservazione 1.5. Possediamo ora due metodi per calcolare radici quadrate ($n = 2$), uno algebrico (visto nella prima lezione) e uno geometrico (ottenuto in questa lezione). Quando $n = 2$, il procedimento appena descritto ci dice che le radici quadrate di un numero non nullo w sono due numeri con modulo pari a $\sqrt{|w|}$ e argomenti che differiscono tra loro di un angolo di $\frac{2\pi}{2} = \pi$, ovvero mezzo giro. Dunque i due numeri sono uno l'opposto dell'altro (cosa che avevamo già capito nel procedimento algebrico). Inoltre uno dei due ha argomento uguale alla metà dell'argomento di w.

Dal confronto dei due metodi possiamo ricavare alcune identità utili. Ad esempio consideriamo il numero

$$w := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

E' un numero con modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{4}$. Una sua radice quadrata è il numero con modulo $\sqrt{1} = 1$ e argomento $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$, ovvero il numero che si trova nel primo quadrante dato da

$$z := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}.$$

Se invece procediamo con il procedimento algebrico (vedi le formule ricavate durante la prima lezione) troviamo che la radice quadrata z di w che si trova nel primo quadrante è data da

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Dal confronto tra i due risultati otteniamo i valori di seno e coseno dell'angolo $\frac{\pi}{8}$ espressi in termini di radicali:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Esercizio 1.6. Calcola le seguenti radici n-esime dei seguenti numeri complessi:

- radici quadrate di $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$;
- radici cubiche di $-8\mathrm{i}$;
- radici quarte di $-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$;
- radici quinte di $2 + 5\mathrm{i}$;
- radici seste di 64;
- radici ottave di $-\frac{1}{16}$.

Esercizio 1.7. Verifica che la sequenza delle n radici n-esime di un numero complesso non nullo, considerate in ordine antiorario, formano una progressione geometrica. Qual'è la ragione della progressione?

Esercizio 1.8. Sia $w := \sqrt{3} + \mathrm{i}$. Determina parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di ogni numero complesso z che risolve l'equazione

$$z^3 + \mathrm{e}^{\pi/w} = 0.$$

Esercizio 1.9. Determina tutte le radici terze dei numeri complessi $\frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6}{(1-\mathrm{i})^3}$ e $\frac{(1+\mathrm{i})^{30}}{(1-\mathrm{i})^{20}}$.

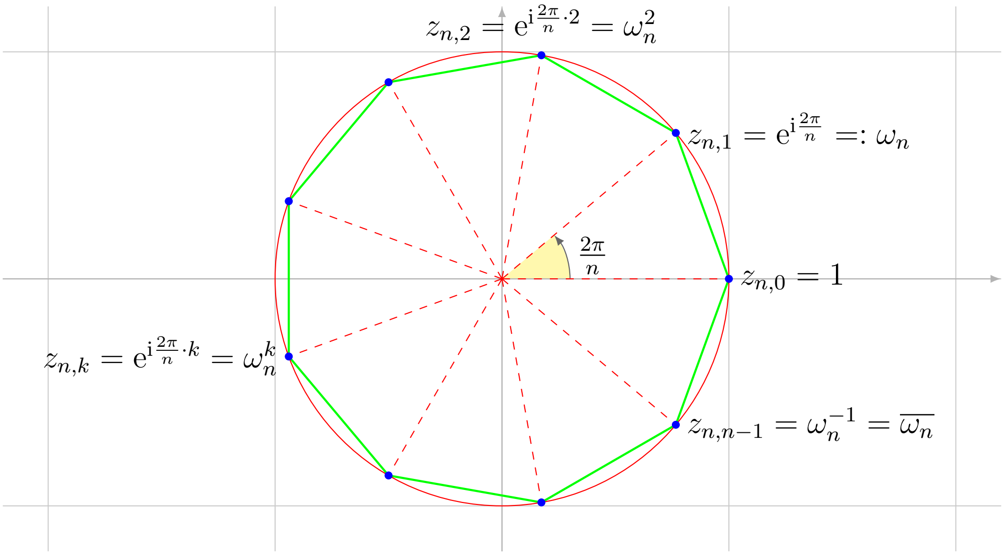
Esercizio 1.10. Determina *quante* sono, tra tutte le radici **undicesime** del numero complesso

$$\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}},$$

quelle che appartengono al quadrante positivo $Q = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

2 Radici dell'unità

Sia $n \in \mathbb{N}$. Esaminiamo il caso particolare delle radici n-esime dell'unità 1. Siccome $\sqrt[n]{|1|} = 1$, le n radici n-esime di 1 sono sempre disposte sulla circonferenza trigonometrica con centro l'origine e raggio 1, e formano i vertici di un poligono regolare di n lati. Poiché $1^n = 1$, il numero 1 è esso stesso sempre una delle sue radici n-esime; quindi il poligono è univocamente individuato per il fatto che ha uno dei suoi vertici in 1.



Siano $z_{n,k}$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, le n radici n-esime di 1, enumerate al variare di k in senso antiorario, a partire da $z_{n,0} = 1$. Per passare da una radice alla successiva basta fare una rotazione di un angolo pari all'n-esima parte dell'angolo giro; gli argomenti di queste radici saranno dunque tutti multipli interi di $\frac{2\pi}{n}$. In notazione esponenziale avremo:

$$z_{n,k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}k}, \quad \text{per } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Osserviamo che tutte questi numeri sono tutte potenze di $z_{n,1}$. Se poniamo

$$\omega_n := z_{n,1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}},$$

abbiamo che le potenze di ω_n generano tutte le radici n-esime dell'unità:

$$\omega_n^k = z_{n,k}, \quad \text{per } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Chiameremo ω_n *radice n-esima fondamentale* dell'unità. Sappiamo che per i numeri con modulo 1 il coniugato coincide con il reciproco e dunque

$$\overline{\omega_n^k} = \frac{1}{\omega_n^k} = \omega_n^{-k} = \omega_n^{n-k} = z_{n,n-k}. \tag{2}$$

Osserviamo anche che $\omega_n^n = 1$ e dunque

$$\omega_n^{-1} = \omega_n^{n-1} = z_{n,n-1} = \overline{\omega_n}.$$

Proposizione 2.1. *Dato $n \in \mathbb{N}$, la somma di tutte le n radici n-esime dell'unità è sempre nulla.*

Dimostrazione. Le radici n-esime dell'unita ω_n^k formano una progressione geometrica di ragione ω_n. Abbiamo quindi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = \frac{1-\omega_n^n}{1-\omega_n} = \frac{1-1}{1-\omega_n} = 0.$$

□

Esempio 2.2. Calcoliamo $\omega_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$, la radice fondamentale dell'unità nel caso $n = 5$. Poniamo

$$t := \omega_5 + \omega_5^{-1} = \omega_5 + \overline{\omega_5} = 2\mathrm{Re}(\omega_5) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geqslant 0.$$

Calcoliamo il suo quadrato

$$t^2 = \left(\omega_5 + \omega_5^{-1}\right) = \omega_5^2 + 2 + \omega_5^{-2}.$$

Osserviamo che per le proprietà (2) si ha

$$t^2+t-1 = \omega_5^2+2+\omega_5^{-2}+\omega_5+\omega_5^{-1}-1 = 1+\omega_5+\omega_5^2+\omega_5^{-2}+\omega_5^{-1} = 1+\omega_5+\omega_5^2+\omega_5^3+\omega_5^4.$$

Per la proposizione 2.1 ne segue che t è la soluzione positiva dell'equazione

$$t^2 + t - 1 = 0.$$

Ne ricaviamo che $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e dunque

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Otteniamo così che

$$\omega_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}. \tag{3}$$

Esercizio 2.3. Calcola esplicitamente (utilizzando eventualmente formule con radicali) le radici fondamentali dell'unità ω_8, ω_{10} e ω_{12}.

Esercizio 2.4. Verifica che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ si ha che $\omega_{nm}^m = \omega_n$.

Esempio 2.5. Calcoliamo esplicitamente le radici dell'unità per alcuni valori di n.

- Se $n = 2$, la radice fondamentale è $\omega_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, dunque le due radici quadrate dell'unità sono: 1 e -1.

- Se $n = 3$, la radice fondamentale è $\omega_3 = e^{i\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, dunque le tre radici cubiche dell'unità sono:

$$1, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3^2 = \overline{\omega_3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Se $n = 4$, la radice fondamentale è $\omega_4 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, dunque le quattro radici quarte dell'unità sono:

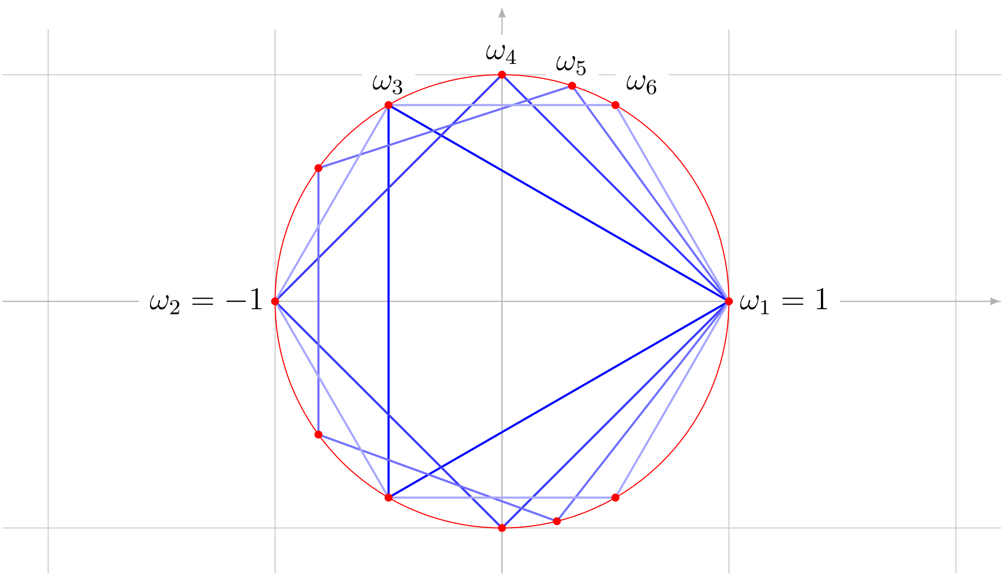
$$1, \quad \omega_4 = i, \quad \omega_4^2 = \omega_2 = -1, \quad \omega_4^3 = \overline{\omega_4} = -i.$$

- Se $n = 5$, la radice fondamentale l'abbiamo calcolata nell'esempio 2.2 ed è data da (3), dunque le cinque radici quinte dell'unità sono:

$$\begin{aligned}
&\omega_5^0 = 1, \\
&\omega_5 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, && \omega_5^2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \\
&\omega_5^3 = \overline{\omega_5^2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, && \omega_5^4 = \overline{\omega_5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.
\end{aligned}$$

- Se $n = 6$, la radice fondamentale è $\omega_6 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, dunque le sei radici seste dell'unità sono:

$$\begin{aligned}
&\omega_6^0 = 1, && \omega_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, && \omega_6^2 = \omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
&\omega_6^3 = \omega_2 = -1, && \omega_6^4 = \overline{\omega_6^2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, && \omega_6^5 = \overline{\omega_6} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$



Esercizio 2.6. Calcola esplicitamente (utilizzando eventualmente formule con radicali) le radici dell'unità per i casi $n = 8$, $n = 10$ e $n = 12$.

Moltiplicare un numero per la radice n-esima fondamentale ω_n significa ruotare il numero di un angolo di $\frac{2\pi}{n}$ in senso antiorario intorno all'origine. Abbiamo visto che tutte le radici n-esime di un numero complesso si ottengono proprio con successive rotazioni di questo tipo. Ecco che allora conoscendo una radice n-esima $z_\star$ di un numero w, per ottenere tutte le altre radici n-esime di w basta moltiplicare la radice nota $z_\star$ per una qualsiasi radice dell'unità:

Proposizione 2.7. *Sia $z_\star$ una radice n-esima del numero complesso non nullo w. Tutte le n radici n-esime di w sono date da*

$$z_k := z_\star \, \omega_n^k, \quad \textit{per } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

dove $\omega_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ è la radice n-esima fondamentale dell'unità.

Esempio 2.8. Calcoliamo tutte le radici quarte del numero $w = (2-3\mathrm{i})^8$. Chiaramente abbiamo che il numero $z_\star = (2-3\mathrm{i})^2$ è una radice quarta di w. Quindi tutte le radici quarte di w si ottengono moltiplicando $z_\star$ per ciascuna delle quattro radici quarte dell'unità: 1, i, -1, $-\mathrm{i}$, e dunque sono date da

$$\begin{aligned} z_1 &= z_\star = (2-3\mathrm{i})^2 = -5-12\mathrm{i}, \\ z_2 &= \mathrm{i} z_\star = 12 - 5\mathrm{i}, \\ z_3 &= -z_\star = 5 + 12\mathrm{i}, \\ z_4 &= -\mathrm{i} z_\star = -12 + 5\mathrm{i}. \end{aligned}$$

3 Ulteriori esercizi

Esercizio 3.1. Considera il numero complesso $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ e sia m il tuo numero di matricola universitaria. Determina parte reale e parte immaginaria di un numero complesso w tale che

$$w^2\big(z^{m+2} - z^{m-1}\big) = \mathrm{i}.$$

Esercizio 3.2. Determina tutte le radici cubiche del numero complesso che si ottiene semplificando la seguente espressione:

$$(2+3\mathrm{i})^2 - \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} + 9\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}.$$

Esercizio 3.3. Per quali numeri complessi z si ha che il cubo z^3 coincide con una delle radici cubiche di z?

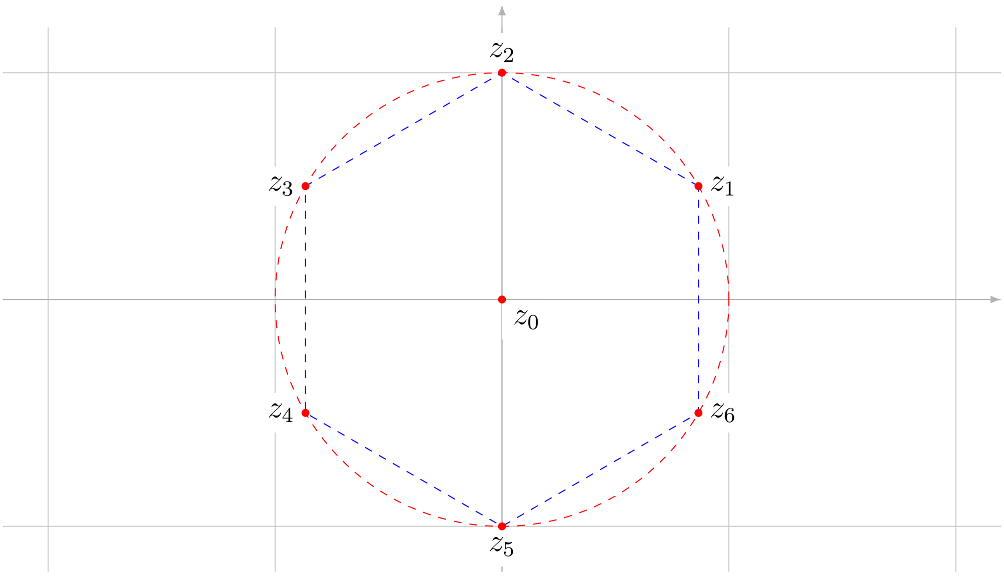
Esercizio 3.4. Determina le quattro soluzioni (nel campo complesso) dell'equazione

$$(z+\mathrm{i})^4 + \frac{\mathrm{i}-3}{1+3\mathrm{i}} = 0.$$

Esercizio 3.5. Determina tutte le soluzioni in campo complesso dell'equazione
$$\left(\frac{\overline{z}-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^4 = 16.$$

L'idea di utilizzare la forma esponenziale per il procedimento che ci ha portato alla costruzione geometrica delle radici n-esime, può essere applicata anche ad equazioni diverse dall'equazione (1), funziona quando sono coinvolti solo potenze o prodotti (e non somme).

Esempio 3.6. Determiniamo tutte le soluzioni in campo complesso dell'equazione:
$$z^5 = -\overline{z}.$$
Scriviamo z in forma esponenziale $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, con $r = |z|$ e $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. Abbiamo
$$z^5 = r^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\theta}, \qquad -\overline{z} = -r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}.$$
L'equazione diventa
$$r^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}. \tag{4}$$
Dall'uguaglianza dei moduli ricaviamo che
$$r^5 = r \implies r^5 - r = 0 \implies r(r-1)(r+1)(r^2+1) = 0 \implies r = 0 \text{ oppure } r = 1,$$
essendo $r \geqslant 0$. Se $r = 0$ allora otteniamo la soluzione $z = z_0 := 0$. Se $r = 1$ dobbiamo determinare l'argomento. Dall'equivalenza tra gli argomenti in (4) otteniamo che deve essere
$$5\theta = \pi - \theta + 2\pi k,$$
per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Ricaviamo che
$$\theta = \theta_k := \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
Le soluzioni con $r = 1$ sono dunque date da
$$z = z_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\omega_6^k,$$
dove $\omega_6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ è la radice sesta fondamentale dell'unità. Le potenze distinte di ω_6 sono solo 6, consideriamo dunque solo gli esponenti $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e otteniamo così altre sei soluzioni che formano i vertici di un esagono regolare sulla circonferenza trigonometrica e sono date da
$$\begin{aligned}
z = z_1 &:= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i},\\
z = z_2 &:= z_1\omega_6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i},\\
z = z_3 &:= z_1\omega_6^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i},\\
z = z_4 &:= z_1\omega_6^3 = -z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},\\
z = z_5 &:= z_1\omega_6^4 = -z_2 = -\mathrm{i},\\
z = z_6 &:= z_1\omega_6^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.
\end{aligned}$$



Esercizio 3.7. Determina per quali numeri complessi z si ha che

$$9\mathrm{i}z^5 + 16\overline{z} = 0.$$

Esercizio 3.8. Sia $Q = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ il primo quadrante del piano complesso $\mathbb{C}$. Disegna nel piano complesso la regione Ω formata dai numeri complessi z con modulo minore di 1 tali che z^3 appartiene a Q ed inoltre una radice quadrata di z appartiene a Q.

Esercizio 3.9. Rappresenta graficamente nel piano complesso le soluzioni dell'equazione

$$(3 - \mathrm{i}z)^6 + 64 = 0.$$

Esercizio 3.10. Determina tutte le soluzioni in campo complesso dell'equazione

$$\left(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} - \mathrm{i}z\right)^4 = \left(\frac{\mathrm{i} - \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}}\right)^4.$$

Esercizio 3.11. Determina per quali valori del parametro reale λ l'equazione

$$(z + \mathrm{i})^3 = \lambda\mathrm{i}$$

ammette almeno una soluzione in campo complesso con modulo maggiore di 3.

Esercizio 3.12. Determina le coppie di numeri complessi $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} 2z + \mathrm{i}w^3 = 2 + 2\mathrm{i}, \\ \mathrm{i}z + 2w^3 = -1 - 19\mathrm{i}. \end{cases}$$

Esercizio 3.13. Determina le soluzioni in campo complesso della seguente equazione e illustra con un grafico la loro disposizione nel piano complesso:

$$\mathrm{e}^{\left((z-1)^3\right)} = j.$$