

Algebra dei numeri complessi

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 13 marzo 2021)

Durante l'insegnamento di Analisi Matematica 1A abbiamo visto che l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è dotato di una struttura algebrica di campo numerico:

- è definita su $\mathbb{R}$ un'operazione di *addizione* (somma), che gode delle proprietà associative e commutativa, possiede un elemento neutro, lo zero 0, e ad ogni numero corrisponde un elemento inverso additivo, l'opposto;
- è definita su $\mathbb{R}$ una operazione di *moltiplicazione* (prodotto), che gode delle proprietà associative e commutativa, possiede un elemento neutro, l'unità 1, e ad ogni numero non nullo corrisponde un elemento inverso moltiplicativo, il reciproco;
- vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma;

Abbiamo anche visto che da queste proprietà fondamentali derivano tutte le proprietà del calcolo algebrico: leggi dell'annullamento del prodotto, regole di semplificazione, metodi di risoluzione di equazioni.

Nel contesto dei numeri reali è sempre possibile trovare soluzioni ad equazioni di primo grado genuine: se $A, B \in \mathbb{R}$ con $A \neq 0$ allora l'equazione

$$Ax + B = 0$$

ha come soluzione $x = -A^{-1}B = -\frac{B}{A}$. Non è sempre vero invece che equazioni di secondo grado possiedano soluzioni in $\mathbb{R}$. Ad esempio, l'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

non possiede alcuna soluzione reale, infatti se $x = p$ fosse una soluzione di (1) allora dovrebbe essere $p^2 = -1 < 0$, ma ciò è impossibile perchè il quadrato di ogni numero reale è sempre non negativo, $p^2 \geq 0$. Ci chiediamo allora se sia possibile ampliare il campo dei numeri reali in modo da poter includere anche soluzioni per ogni equazione di secondo grado o di grado superiore. Vogliamo farlo però senza rinunciare alle proprietà algebriche che caratterizzano i campi numerici. Se ciò fosse possibile dovremmo comunque aggiungere ad $\mathbb{R}$ almeno un nuovo elemento che rappresenti una soluzione dell'equazione (1). Proviamo ad immaginare che un tale elemento esista.

1 Numeri immaginari

Supponiamo che esista una soluzione dell'equazione (1), ovviamente non potrà essere un numero reale, e visto che al momento è solo un frutto della nostra immaginazione lo chiameremo *unità immaginaria* e lo indicheremo con il simbolo i . Vogliamo trattarlo come se fosse un numero, rispettando tutte le regole algebriche che valgono in un campo numerico. Tutto quello che sappiamo di i per ora è che $i^2 + 1 = 0$ e dunque la proprietà principale di i è che

$$i^2 = -1. \quad (2)$$

Esercizio 1.1. Verifica che se i è soluzione dell'equazione (1) allora anche $-i$ è soluzione della stessa equazione.

Esercizio 1.2. Utilizzando la proprietà (2) determina il valore di tutte le potenze i^n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Per quali n si ha che i^n è un numero reale?

Se i si deve comportare come un numero allora deve essere possibile considerare il prodotto ib tra i e un qualsiasi numero reale b ; esaminiamo il quadrato di tale prodotto (utilizzando le proprietà commutativa e associativa del prodotto):

$$(ib)^2 = i^2 b^2 = (-1)b^2 = -b^2.$$

Se $b \neq 0$ allora ne segue che $(ib)^2 = -b^2 < 0$ e dunque il risultato del prodotto ib non potrà mai essere un numero reale. Dovrà essere un nuovo tipo di numero che dovremo aggiungere al nostro campo numerico per il solo fatto di aver voluto includere l'unità immaginaria.

Definizione 1.3. Chiamiamo *numero immaginario* ogni numero il cui quadrato coincide con un numero reale non positivo.

Proposizione 1.4. *Tutti i numeri immaginari sono della forma ib con $b \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se w è un numero immaginario significa che $q = w^2$ è un numero reale non positivo. Siccome $-q \geq 0$ è ben definita la sua radice quadrata $b = \sqrt{-q} \geq 0$. Con semplici passaggi (usando le proprietà algebriche di un campo numerico) otteniamo

$$0 = w^2 - q = w^2 + b^2 = w^2 - (-b^2) = w^2 - (ib)^2 = (w - ib)(w + ib),$$

e per la legge dell'annullamento del prodotto segue che $w - ib = 0$ oppure $w + ib = 0$ e dunque $w = ib$ oppure $w = i(-b)$. $\square$

Possiamo indicare con $i\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri immaginari, ovvero l'insieme di tutti i multipli reali dell'unità immaginaria.

Proposizione 1.5. *L'unico numero che è sia reale che immaginario è lo zero. Ovvero*

$$\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}.$$

Dimostrazione. Per la legge dell'annullamento del prodotto abbiamo che $0i = 0$, e dunque 0 è sia un numero reale che immaginario. Inoltre, se z è un numero sia reale che immaginario, per quanto visto sopra, dovremo avere che z^2 è un numero reale sia non negativo che non positivo, e dunque necessariamente $z^2 = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto dovrà allora essere $z = 0$. Ne deduciamo che l'unico numero che può essere sia reale che immaginario è 0 . $\square$

Indichiamo nel seguito con a, b, c, d dei generici numeri reali. La somma di due numeri reali, a e c , è un numero reale, $a + c$; per la proprietà distributiva otteniamo anche che la somma di due numeri immaginari, ib e id , è ancora un numero immaginario:

$$(ib) + (id) = i(b + d).$$

Il prodotto di due numeri reali, a e c , è un numero reale, ac ; anche il prodotto di due numeri immaginari, ib e id , risulta essere un numero reale:

$$(ib)(id) = i^2 bd = -bd.$$

Il prodotto di un numero reale a con un numero immaginario ib risulta essere un numero immaginario:

$$a(ib) = a(bi) = (ab)i = i(ab).$$

Cosa possiamo dire invece della somma tra un numero reale a e un numero immaginario ib ? Se $a + ib$ fosse uguale ad un numero reale c avremo che $c - a = ib$ risulterebbe essere sia reale che immaginario e dunque $bi = 0$. Analogamente, se $a + ib$ fosse uguale ad un numero immaginario id avremo che $a = i(d - b)$ risulterebbe essere sia reale che immaginario e dunque $a = 0$. Quindi se a e b non sono entrambi nulli la somma $a + ib$ non può essere né un numero reale e né un numero immaginario. Dovrà essere qualcosa di nuovo, un ulteriore tipo di numero che estende i concetti di numero reale e di numero immaginario.

2 Il campo dei numeri complessi

Definizione 2.1. Chiamiamo *numero complesso* la somma tra un numero reale e un numero immaginario, ovvero ogni espressione della forma

$$a + ib, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

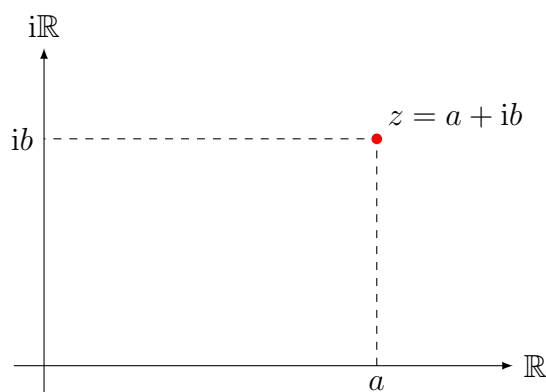
Se $z = a + ib$ è un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$, il coefficiente reale a si dice *parte reale* del numero complesso z e la indichiamo con $\operatorname{Re}(z)$; il coefficiente reale b si dice *parte immaginaria* del numero complesso z e la indichiamo con $\operatorname{Im}(z)$. Indichiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme di tutti i numeri complessi,

$$\mathbb{C} := \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ad esempio la parte reale del numero complesso $2 + i3$ è il numero reale 2, mentre la parte immaginaria è il numero reale 3 (e non il numero immaginario $i3$).

Ogni numero reale a può essere identificato con il numero complesso $a + i0$ che ha parte immaginaria nulla; ogni numero immaginario ib può essere identificato con il numero complesso $0 + ib$ che ha parte reale nulla.

Osservazione 2.2. Osserviamo che per definire un numero complesso $z = a + ib$ abbiamo bisogno di due numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$. Si chiama complesso non perché sia complicato, ma semplicemente perché è composto da più parti (due). Ad ogni coppia di numeri reali (a, b) corrisponde un numero complesso $a + ib$, e viceversa ad ogni numero complesso $a + ib$ corrisponde la coppia di numeri reali (a, b) . Ma le coppie di numeri reali non sono altro che coordinate di punti del piano cartesiano. Tramite questa corrispondenza biunivoca possiamo quindi identificare l'insieme dei numeri complessi con il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ che chiameremo in questo contesto *piano complesso*. È per questo che la scrittura dei numeri complessi nella forma algebrica $a + ib$ viene anche detta *forma cartesiana*.



Proposizione 2.3. *Due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria.*

Dimostrazione. Se $a + ib = c + id$ allora si ha che $a - c = i(d - b)$ è una quantità sia reale che immaginaria, quindi per la proposizione 1.5 avremo che $a - c = 0$ e $d - b = 0$, ovvero $a = c$ e $b = d$. $\square$

Cosa succede ora se sommiamo o moltiplichiamo tra loro due numeri complessi? Si generano strutture ancora più complesse? No. Fortunatamente quello che si ottiene sono ancora dei numeri complessi, basta applicare le regole dell'algebra ed usare il fatto che $i^2 = -1$. Siano $z := a + ib$ e $w := c + id$ due numeri complessi (con i coefficienti a, b, c, d reali). Applicando le proprietà associative, commutativa e distributiva di somma e prodotto abbiamo:

$$\begin{aligned} z + w &= a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d), \\ zw &= (a + ib)(c + id) = ac + ibc + aid + ibid = \\ &= ac + i^2bd + iad + ibc = (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

La somma e il prodotto di due numeri complessi danno come risultato ancora dei numeri complessi in quanto le espressioni $(a + c)$ e $(ac - bd)$ definiscono dei numeri reali e le espressioni $i(b + d)$ e $i(ad + bc)$ definiscono dei numeri immaginari. Ricapitolando:

Definizione 2.4. Se $z = a + ib$ e $w = c + id$ sono due numeri complessi la loro somma e il loro prodotto sono i numeri complessi definiti dalle seguenti formule:

$$z + w = (a + c) + i(b + d), \quad (3)$$

$$zw = (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (4)$$

Osservazione 2.5. Ricordiamoci che per fare calcoli con numeri complessi non è importante imparare a memoria le formule (3) e (4), basta utilizzare le solite regole algebriche che valgono in un campo numerico, a cui aggiungiamo un'unica regola nuova: $i^2 = -1$.

Esempio 2.6. Se $z = 2 - i3$ e $w = 4 + i$ allora abbiamo

$$z + w = 2 - i3 + 4 + i = 6 - i2,$$

$$zw = (2 - i3)(4 + i) = 8 + 2i - 12i - 3i^2 = 8 - 10i + 3 = 11 - i10.$$

Teorema 2.7. *L'insieme dei numeri complessi dotato delle operazioni di somma e prodotto forma un campo (numerico). Ovvero valgono le seguenti proprietà:*

- *Proprietà della somma.*
 - *Associativa:* $\forall v, w, z \in \mathbb{C}$ si ha $(v + w) + z = v + (w + z)$.
 - *Commutativa:* $\forall w, z \in \mathbb{C}$ si ha $w + z = z + w$.
 - *Elemento neutro:* il numero $0 := 0 + i0 \in \mathbb{C}$ è tale che $\forall z \in \mathbb{C}$ si ha $z + 0 = z$.
 - *Opposto:* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists -z \in \mathbb{C}$ tale che $z + (-z) = 0$.
- *Proprietà del prodotto.*
 - *Associativa:* $\forall v, w, z \in \mathbb{C}$ si ha $(vw)z = v(wz)$.
 - *Commutativa:* $\forall w, z \in \mathbb{C}$ si ha $wz = zw$.
 - *Elemento neutro:* il numero $1 := 1 + i0 \in \mathbb{C}$ è tale che $\forall z \in \mathbb{C}$ si ha $1z = z$.
 - *Reciproco:* $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exists z^{-1} \in \mathbb{C}$ tale che $zz^{-1} = 1$.
- *Proprietà che definiscono il legame tra somma e prodotto.*
 - *Distributiva:* $\forall v, w, z \in \mathbb{C}$ si ha $(v + w)z = vz + wz$.

Osservazione 2.8. Come conseguenza del fatto che i numeri complessi formano un campo numerico abbiamo che in $\mathbb{C}$ possiamo continuare ad utilizzare le stesse regole e proprietà algebriche relative a somma e prodotto che già usavano in $\mathbb{R}$. Ad esempio le leggi di annullamento del prodotto ($zw = 0$ equivale a $z = 0$ oppure $w = 0$), oppure le formule

dei prodotti notevoli $(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$, oppure la formula di Newton per le potenze del binomio

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k,$$

oppure formule per somme di progressioni geometriche come

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

continuano a valere anche quando z e w sono numeri complessi.

Osservazione 2.9. In virtù della proprietà commutativa possiamo scrivere indifferentemente le forme $a + ib$ e $a + bi$ per indicare lo stesso numero complesso.

La dimostrazione del teorema 2.7 non è difficile e la lasciamo come esercizio ai lettori più scrupolosi. Osserviamo solamente che l'opposto di un numero complesso z sarà dato necessariamente dal numero che ha come parti reale e immaginaria gli opposti di quelle di z : ovvero se $z = a + ib$ allora $-z = (-a) + i(-b)$. Un po' più elaborato risulta invece il calcolo del reciproco. Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$, indichiamo con w il reciproco di z , che possiamo pensare in forma cartesiana $w = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Abbiamo che $1 = zw$, ovvero

$$1 + i0 = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

da cui si ricava il sistema di equazioni

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo $x = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $y = -\frac{b}{a^2+b^2}$ (il denominatore non si annulla in quanto a e b non possono essere entrambi nulli). Abbiamo così trovato una formula per il reciproco:

Proposizione 2.10. *Il reciproco di un numero $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è dato da*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

Questa formula appare complicata, ma la si può ottenere e riscrivere in modo più semplice utilizzando l'operazione di coniugio.

3 Operazione di coniugio

Definizione 3.1. Dato un numero complesso z definiamo *coniugato* di z il numero complesso $\bar{z}$ che ha la stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta. Se $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ allora

$$\bar{z} = a + i(-b) = a - ib.$$

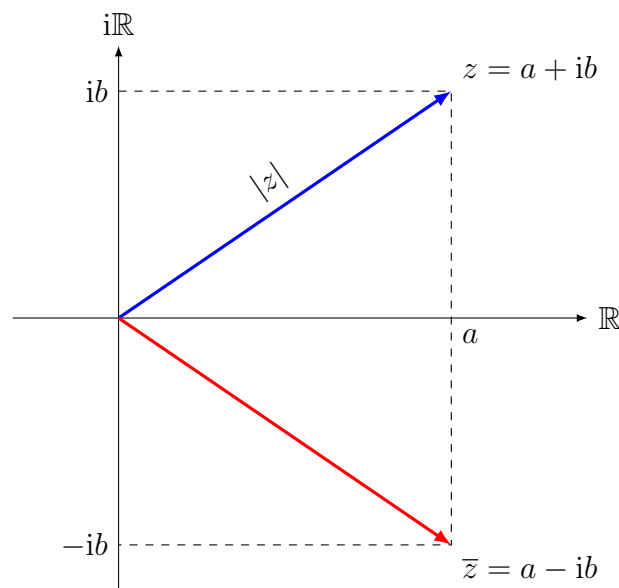
Moltiplicando un numero complesso $z = a + ib$ per il suo coniugato $\bar{z} = a - ib$ otteniamo sempre un numero reale non negativo:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 \geq 0.$$

La quantità $a^2 + b^2$, per il teorema di Pitagora, non è altro che il quadrato della lunghezza del segmento che unisce l'origine del piano cartesiano con il punto di coordinate (a, b) . Dunque, $\sqrt{z\bar{z}}$ non è altro che la distanza euclidea del punto z dall'origine del piano complesso.

Definizione 3.2. Definiamo *modulo* di un numero complesso $z = a + bi$ il numero reale non negativo $|z|$ definito da

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Tornando al calcolo del reciproco la formula (5) ora diventa:

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}. \quad (6)$$

Questo ci suggerisce un metodo pratico per calcolare il reciproco di un numero complesso: basta moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del numero di cui si vuole calcolare il reciproco, in questo modo si fanno sparire le quantità immaginarie dal denominatore.

Esempio 3.3. Sia $z = \frac{1}{2} - 3i$. Il suo coniugato è $\bar{z} = \frac{1}{2} + 3i$. Il modulo di z è

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 3i\right)\left(\frac{1}{2} + 3i\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (3i)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 9} = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Calcoliamo il reciproco di z :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{\frac{1}{2} - 3i} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 3i} \cdot \frac{\frac{1}{2} + 3i}{\frac{1}{2} + 3i} = \frac{\frac{1}{2} + 3i}{\left(\frac{1}{2} - 3i\right)\left(\frac{1}{2} + 3i\right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 3i}{\frac{1}{4} + 9} = \frac{\frac{1}{2} + 3i}{\frac{37}{4}} = \frac{4}{37} \left(\frac{1}{2} + 3i\right) = \frac{2}{37} + \frac{12}{37}i.\end{aligned}$$

Esercizio 3.4. Calcola l'opposto e il reciproco dei seguenti numeri complessi:

$$3 - 4i, \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4}i, \quad -\frac{4}{3}i, \quad \frac{1}{4 - 3i}.$$

Osservazione 3.5. Il metodo di calcolo del reciproco indicato dalla formula (6) ci permette anche di calcolare facilmente quozienti tra numeri complessi: in un rapporto tra numeri complessi, moltiplicando sia numeratore che denominatore per il coniugato del denominatore spariscono le quantità immaginarie dal denominatore,

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Ad esempio,

$$\frac{2 + i}{1 - 3i} = \frac{(2 + i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{2 + i + 6i - 3}{1 + 9} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Raccogliamo nella seguente proposizione alcune utili, semplici, ma importanti, proprietà del coniugato e del modulo di numeri complessi:

Proposizione 3.6. *Dati due numeri complessi z e w valgono le seguenti proprietà:*

$$\begin{array}{ll}\bar{\bar{z}} = z, & |\bar{z}| = |z|, \\ z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), & z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z), \\ |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, & |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|, \\ \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, & \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \\ |zw| = |z||w|, & |z + w| \leq |z| + |w|.\end{array}$$

Dimostrazione. Scriviamo in forma cartesiana $z = a + ib$, $w = c + id$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Coniugato del coniugato: $\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.

Norma del coniugato: $|\bar{z}|^2 = \bar{z}z = \bar{z}z = |z|^2$.

Somma di un numero con il suo coniugato: $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$.

Differenza tra un numero e il suo coniugato: $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2b = 2i\operatorname{Im}(z) \in i\mathbb{R}$.

Confronto tra parte reale e modulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| = |\operatorname{Re}(z)|$.

Confronto tra parte immaginaria e modulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b| = |\operatorname{Im}(z)|$.

Coniugato della somma:

$$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + i(b+d)} = (a+c) - i(b+d) = (a-ib) + (c-id) = \bar{z} + \bar{w}.$$

Coniugato del prodotto:

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(ac-bd) + i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc) = \\ &= (ac - (-b)(-d)) + i(a(-d) + (-b)c) = (a-ib)(c-id) = \bar{z}\bar{w}.\end{aligned}$$

$$\text{Modulo del prodotto: } |zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\bar{z}w\bar{w}} = \sqrt{|z|^2 |w|^2} = |z| |w|.$$

Disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.\end{aligned}$$

□

Esercizio 3.7. Semplifica le seguenti espressioni fino a ridurle in forma cartesiana e rappresenta graficamente i numeri complessi ottenuti nel piano complesso.

$$\begin{aligned}(1+2i) - (3+4i)(5+6i) + \frac{7+8i}{9+10i}, & \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+i}}, \\ \left(\sqrt{3}+2i\right)^3 - \left(\sqrt{3}-2i\right)^3, & \quad \sum_{k=0}^5 \left(\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{5}i\right)^k.\end{aligned}$$

Esercizio 3.8. Se il coniugato di un numero complesso coincide con il reciproco dello stesso numero quanto vale il modulo di tale numero?

Esercizio 3.9. Spiega qual'è il significato geometrico di $|z-w|$ quando z e w sono due numeri complessi.

Esercizio 3.10. Sia $w = 4i$. Considera i seguenti sottoinsiemi del piano complesso:

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(z)\}, \quad B := \{z \in \mathbb{C} : |z-w| \leq |w|\}.$$

Disegna nel piano complesso l'insieme $A \cap B$.

Esercizio 3.11. Usando la formula per lo sviluppo delle potenze del binomio, insieme al fatto che $i^2 = -1$, calcola le seguenti potenze di numeri complessi:

$$(1+i)^{16}, \quad \left(1-i\sqrt{3}\right)^5, \quad (-3+2i)^6, \quad \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)^6.$$

Osservazione 3.12. Il campo $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, i numeri reali possiamo rappresentarli come punti di una retta, tutti in fila con un preciso ordine; dati due numeri reali è sempre possibile confrontarli e si avrà sempre che uno dei due è minore o uguale all'altro.

La relazione $\leq$ stabilisce su $\mathbb{R}$ un ordine totale compatibile con la struttura algebrica, in particolare, dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c, \quad (7)$$

$$a \geq 0, b \geq 0 \implies ab \geq 0. \quad (8)$$

Possiamo stabilire un relazione d'ordine con le stesse proprietà anche in campo complesso? Se fosse possibile dovremmo avere che $i \geq 0$ oppure $i \leq 0$. Ma per le proprietà (8) e (7) avremmo

$$\begin{aligned} i \geq 0 &\implies i^2 \geq 0 \implies -1 \geq 0, \\ i \leq 0 &\implies i + (-i) \leq 0 + (-i) \implies 0 \leq -i \implies 0 \leq (-i)^2 = -1, \end{aligned}$$

ed in ogni caso si avrebbe che $0 < -1$ e dunque $1 < 0$, che è **impossibile** in quanto $1 = 1^2 > 0$. Dunque nel campo complesso $\mathbb{C}$ non è possibile stabilire una relazione d'ordine totale che sia compatibile con la struttura algebrica. Se z e w sono numeri complessi non ha senso scrivere $z \leq w$, è una scrittura priva di significato.

4 Equazioni in campo complesso

Abbiamo visto nella proposizione 2.3 che due quantità complesse coincidono se e solo se coincidono rispettivamente le loro parti reali e le loro parti immaginarie. Questo significa che una equazione del tipo

$$F(z) = G(z),$$

dove $F(z)$ e $G(z)$ sono due funzioni a valori complessi della incognita complessa $z = x + iy$, è equivalente al sistema di due equazioni tra quantità reali in due incognite reali dato da

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(F(x + iy)) = \operatorname{Re}(G(x + iy)), \\ \operatorname{Im}(F(x + iy)) = \operatorname{Im}(G(x + iy)). \end{cases}$$

Esempio 4.1. Risolviamo l'equazione

$$2z - 3i\bar{z} = 1 + 4i. \quad (9)$$

Scriviamo z in forma cartesiana, $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa

$$2(x + iy) - 3i(x - iy) = 1 + 4i.$$

Semplificando otteniamo

$$(2x - 3y) + i(2y - 3x) = 1 + 4i.$$

uguagliando le parti reali e le parti immaginarie delle espressioni a destra e a sinistra dell'uguale otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ -3x + 2y = 4, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x = -\frac{14}{5}$ e $y = -\frac{11}{5}$. Dunque l'equazione (9) ha come soluzione

$$z = -\frac{14}{5} - \frac{11}{5}i.$$

Esercizio 4.2. Determina tutti i numeri complessi che sono uguali al complesso coniugato del proprio quadrato e rappresentali graficamente nel piano complesso.

Per risolvere in campo complesso equazioni di primo grado in cui compare solamente l'incognita z , e non la sua coniugata $\bar{z}$, ovvero equazioni del tipo

$$Az + B = 0,$$

con coefficienti complessi $A, B \in \mathbb{C}$, non è necessario trasformarlo in un sistema di due equazioni reali; grazie alle proprietà algebriche di campo possiamo risolverla nel modo solito: se $A \neq 0$ abbiamo

$$Az + B = 0 \implies Az = -B \implies z = A^{-1}(-B) = -\frac{B}{A}.$$

Esempio 4.3. Risolviamo l'equazione

$$\frac{3}{z+i} = \frac{i}{2-z}.$$

Ovviamente affinché non si annullino i denominatori dovremo richiedere che $z \neq -i$ e $z \neq 2$. Moltiplichiamo a destra e a sinistra per i due denominatori e l'equazione si riduce ad una equazione di primo grado:

$$3(2-z) = i(z+i),$$

che si semplifica in

$$6 - 3z = iz - 1,$$

e portando i termini con la z a sinistra e i termini senza z a destra otteniamo

$$(-3-i)z = -7,$$

da cui ricaviamo che

$$z = \frac{7}{3+i} = \frac{7(3-i)}{9+1} = \frac{21}{10} - \frac{7}{10}i.$$

Esercizio 4.4. Determina la soluzione in campo complesso dell'equazione

$$\frac{1}{i + \frac{3}{2-i}} = \frac{i}{1 + \frac{2}{z-i}}.$$

Esercizio 4.5. Determina le soluzioni in campo complesso del seguente sistema

$$\begin{cases} 2z + iw = 7 + 6i, \\ (1+i)z + (1-i)w = 2 - 4i. \end{cases}$$

Esercizio 4.6. Determina due numeri complessi w_1 e w_2 in modo che l'equazione

$$w_1 z^2 + w_2 z + i = 0$$

abbia come soluzioni $z = 2 + i$ e $z = 1/(2 + i)$.

Esercizio 4.7. Determina l'insieme delle soluzioni complesse per ciascuna delle seguenti equazioni e disegna la loro posizione nel piano complesso:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) &= 1, \\ \operatorname{Re}\left(\frac{1-z}{1+z}\right) &= 0, \\ \bar{z} + 5i + \frac{4}{z} &= 0, \\ |z|^2 + iz &= 2 - 3i.\end{aligned}$$

5 Calcolo algebrico di radici quadrate

Prima di passare alle equazioni di secondo grado (che sono state per noi la motivazione per la nostra costruzione dei numeri complessi) poniamoci il problema del calcolo di radici quadrate in campo complesso. Sappiamo che in campo reale esistono radici quadrate solo per numeri non negativi: dato $q \in \mathbb{R}$, l'equazione $x^2 = q$ ha soluzioni in $\mathbb{R}$ se e solo se $q \geq 0$ e tali soluzioni sono date da $x = \pm\sqrt{q}$. (dove $\sqrt{q}$ indica l'unico numero reale non negativo il cui quadrato è q).

Consideriamo ora un dato numero complesso $w = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, e cerchiamo di determinare per quali numeri complessi $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha che z è soluzione dell'equazione

$$z^2 = w. \tag{10}$$

Osservazione 5.1. Prima di tutto osserviamo che se z_* è una soluzione di (10), anche il suo opposto $-z_*$ lo è, in quanto $(-z)^2 = z^2$. Inoltre, se z_1 e z_2 sono due soluzioni, allora $z_1^2 = z_2^2$; da ciò ricaviamo che

$$0 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2),$$

e per la legge dell'annullamento del prodotto dovrà essere $z_1 = z_2$ oppure $z_1 = -z_2$. Da queste considerazioni deduciamo che le radici quadrate di un numero complesso non nullo sono necessariamente due, una l'opposta dell'altra; mentre di radici quadrate di 0 abbiamo solo 0 (che coincide con il suo opposto).

Cominciamo la ricerca delle soluzioni di (10). Utilizzando la forma algebrica per z abbiamo che

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

Dunque l'equazione (10) diventa equivalente al sistema di equazioni

$$x^2 - y^2 = a, \quad (11)$$

$$2xy = b. \quad (12)$$

Inoltre, sempre dall'equazione (10) segue che $|z|^2 = |z^2| = |w|$, ma $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$, e dunque otteniamo anche l'equazione

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (13)$$

Sommando e sottraendo tra loro (13) e (11) otteniamo

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}, \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2},$$

da cui ricaviamo i valori assoluti di x e y ,

$$|x| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \quad |y| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}, \quad (14)$$

Per determinare i segni di x e y utilizziamo l'informazione che ci viene da (12): se $b > 0$ i segni di x e y devono essere concordi, mentre se $b < 0$ i segni di x e y devono essere discordi. Nel caso in cui $b = 0$ (ovvero quando w è un numero reale) abbiamo che $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ e le formule (14) si riducono a

$$|x| = \sqrt{\frac{|a| + a}{2}} = \sqrt{(a)_+}, \quad |y| = \sqrt{\frac{|a| - a}{2}} = \sqrt{(a)_-},$$

dove $(a)_+$ e $(a)_-$ indicano la parte positiva e la parte negativa di a .

$$(a)_+ := \max\{a, 0\} = \frac{|a| + a}{2}, \quad (a)_- := \max\{0, -a\} = \frac{|a| - a}{2}.$$

Riassumiamo quanto abbiamo trovato nella seguente proposizione:

Proposizione 5.2 (Formule algebriche per calcolare radici quadrate in campo complesso). *Dato il numero $w = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, le radici quadrate di w (ovvero le soluzioni dell'equazione (10)) sono date dalle seguenti formule:*

- (*w nel semipiano superiore*) se $b = \text{Im}(w) > 0$ abbiamo due radici quadrate opposte date da

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right);$$

- (*w nel semipiano inferiore*) se $b = \text{Im}(w) < 0$ abbiamo due radici quadrate opposte date da

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right);$$

- (*w* numero reale positivo) se $b = 0$ e $a > 0$ abbiamo due radici quadrate reali opposte date da

$$z = \pm\sqrt{a};$$

- (*w* numero reale negativo) se $b = 0$ e $a < 0$ abbiamo due radici quadrate immaginarie opposte date da

$$z = \pm i\sqrt{-a};$$

- (*w* nullo) se $w = 0$ l'unica radice quadrata è $z = 0$.

Osservazione 5.3. Siccome le radici quadrate di uno stesso numero w sono sempre una l'opposta dell'altra e nessuna delle due ha un valore privilegiato rispetto all'altra, non ha molto senso parlare *della* radice quadrata $\sqrt{w}$ di w , in quanto tale scrittura non individua univocamente un valore, mentre ha più senso parlare *delle* (due) radici quadrate $\pm\sqrt{w}$ di w , in quanto la coppia delle due radici quadrate invece è univocamente determinata.

Esempio 5.4.

- Calcoliamo le radici quadrate del numero $3+4i$. Si tratta di un punto nel semipiano superiore, dunque

$$\pm\sqrt{3+4i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+4^2}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+4^2}-3}{2}} \right) = \pm(2+i).$$

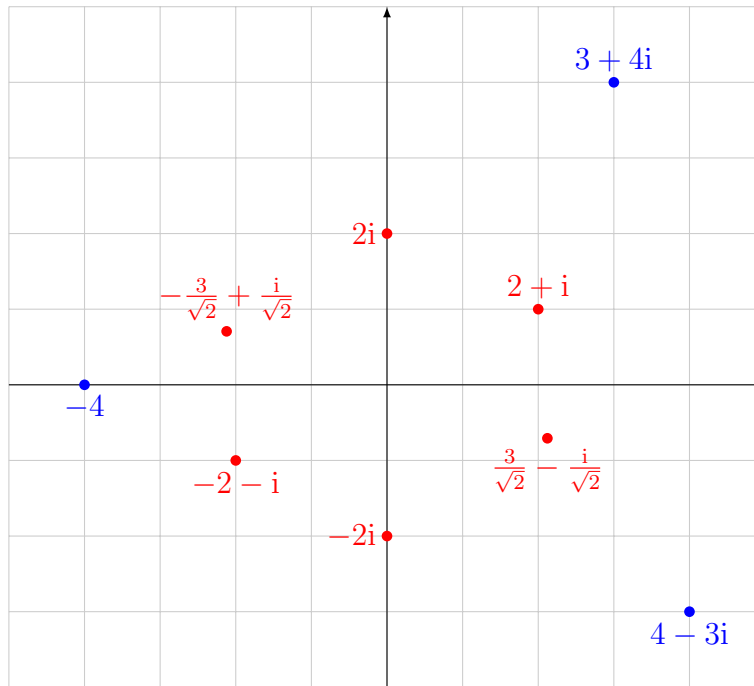
- Calcoliamo le radici quadrate del numero $4-3i$. Si tratta di un punto nel semipiano inferiore, dunque

$$\pm\sqrt{4-3i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{4^2+3^2}+4}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{4^2+3^2}-4}{2}} \right) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

- Calcoliamo le radici quadrate del numero -4 . Si tratta di un numero reale negativo, dunque

$$\pm\sqrt{-4} = \pm i\sqrt{4} = \pm 2i.$$

Rappresentiamo i risultati trovati nel piano cartesiano:



Esercizio 5.5. Calcola, in forma algebrica, le radici quadrate dei seguenti numeri complessi:

$$-5 - 12i, \quad 15 + 8i, \quad -i\pi, \quad -\pi^2, \quad 1 + i^4, \quad (3 - 7i)^4.$$

6 Equazioni di secondo grado

Anche per equazioni di secondo grado in campo complesso possiamo procedere esattamente come nel campo reale. Consideriamo l'equazione

$$Az^2 + Bz + C = 0, \tag{15}$$

dove $A, B, C \in \mathbb{C}$ con $A \neq 0$. Raccogliamo A dai primi due termini del trinomio e cerchiamo di completare il quadrato di un binomio:

$$\begin{aligned} Az^2 + Bz + C &= A \left(z^2 + 2\frac{B}{2A}z + \frac{C}{A} \right) = A \left(z^2 + 2\frac{B}{2A}z + \left(\frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A} \right) = \\ &= A \left(\left(z + \frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2} \right). \end{aligned}$$

Dunque l'equazione (15) diventa equivalente a

$$\left(z + \frac{B}{2A} \right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2},$$

da cui ricaviamo che $z + \frac{B}{2A}$ deve essere una radice quadrata della quantità $\frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}$. Otteniamo così la nota formula

$$z = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Ora il discriminante $B^2 - 4AC$ può tranquillamente assumere qualsiasi valore, abbiamo visto che in campo complesso le radici quadrate esistono per qualsiasi numero.

Esempio 6.1. Risolviamo l'equazione di secondo grado

$$z^2 - (3 - 2i)z - 6i = 0. \quad (16)$$

Il discriminante in questo caso è dato da

$$(3 - 2i)^2 + 4(6i) = 9 - 12i - 4 + 24i = 5 + 12i,$$

ed è un numero che si trova nel semipiano superiore. Le sue radici quadrate sono date da

$$\pm\sqrt{5 + 12i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{25 + 144} + 5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25 + 144} - 5}{2}} \right) = \pm(3 + 2i).$$

Le due soluzioni dell'equazione (16) saranno allora date da

$$z_{\pm} = \frac{(3 - 2i) \pm (3 + 2i)}{2},$$

ovvero $z_+ = 3$ e $z_- = -2i$.

Esercizio 6.2. Determina l'insieme delle soluzioni complesse per ciascuna delle seguenti equazioni e disegna la loro posizione nel piano complesso:

$$\begin{array}{ll} z^2 + 3iz - 4 + 6i = 0, & z^2 - 2iz + 1 = 0, \\ z - \frac{1}{z} = i, & 2z^2 - iz + 8 + 9i = 0; \\ \frac{1 - z}{i + z} = \frac{2z}{1 - iz}, & z^4 + z^2 + 1 = 0, \\ z^8 - 16 = 0, & z^8 + 16 = 0. \end{array}$$