NUMERI COMPLESSI

a cura della Prof.ssa Francesca Prinari

per il Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica
Università degli Studi di Ferrara
(estratto delle Dispense del Prof. Damiano Foschi)

Contents

1. Motivazioni

Nel contesto dei numeri reali è sempre possibile trovare soluzioni ad equazioni di primo grado: se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ allora l'equazione

$$ax + b = 0$$

ha come soluzione

$$x = -a^{-1}b = -\frac{b}{a}.$$

Non è sempre vero invece che le equazioni di grado superiore al primo possiedano soluzioni in $\mathbb{R}$. Ad esempio, l'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

non possiede alcuna soluzione reale:
infatti se $x = p$ fosse una soluzione di (1) allora dovrebbe essere $p^2 = -1 < 0$ e ciò è assurdo.

Ci chiediamo allora se sia possibile ampliare il campo dei numeri reali in modo da poter includere anche soluzioni per ogni equazione di secondo grado o di grado superiore. **Primo step: introduciamo l'unità imma**

Aggiungiamo ad $\mathbb{R}$ un nuovo elemento che rappresenti una soluzione dell'equazione (1). Proviamo ad "immaginare" che esiste un elemento i (che per le ragioni dette prima non appartiene a $\mathbb{R}$) tale che

$$\mathrm{i}^2 = -1. \tag{2}$$

Lo chiameremo **unità immaginaria**. Vogliamo trattarlo come se fosse un numero, rispettando tutte le regole algebriche che valgono in un campo numerico.
Vogliamo ora costruire un nuovo campo (che chiameremo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$) tale che

- $\{\mathrm{i}\} \cup \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- le operazioni di somma e di moltiplicazione su $\mathbb{C}$ estendano le usuali operazioni su $\mathbb{R}$ (ossia vogliamo che le operazioni su $\mathbb{C}$ si comportino su $\mathbb{R}$ nel modo usuale);

In particolare su $\mathbb{C}$ varrà la legge di annullamento del prodotto, ossia

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Longrightarrow z_1 = 0 \text{ o } z_2 = 0.$$

Vedremo che qualcosa perderemo...
Secondo step: introduciamo le operazioni

* In $\mathbb{C}$ dobbiamo poter moltiplicare i numeri reali $b \in \mathbb{R}$ per l'unità immaginaria i: **chiamiamo** $b\mathrm{i}$ il risultato di questo prodotto; poichè vogliamo che il prodotto su $\mathbb{C}$ sia commutativo, deve valere $b\mathrm{i} = \mathrm{i}b$;
* dobbiamo poter sommare i numeri reali $a \in \mathbb{R}$ con i numeri ib; **chiamiamo** con $a + ib$ il risultato di questa addizione in $\mathbb{C}$; in particolare, poichè la somma in $\mathbb{C}$ deve soddisfare la proprietà commutativa e associativa, se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ deve valere
$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + (b + d)i;$$
* per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vogliamo poter definire il prodotto tra $(a + \mathrm{i}b)$ e $(c + \mathrm{i}d)$: poichè vogliamo che il prodotto in $\mathbb{C}$ sia distributivo rispetto alla somma, deve valere
$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = a(c + \mathrm{i}d) + \mathrm{i}b(c + \mathrm{i}d) = ac + a(\mathrm{i}d) + (\mathrm{i}b)c + (\mathrm{i}b)(\mathrm{i}d);$$
poichè vogliamo che il prodotto su $\mathbb{C}$ sia commutativo e associativo, deve valere che
$$a(\mathrm{i}d) = a(d\mathrm{i}) = (ad)\mathrm{i} = ad\mathrm{i}, \quad (\mathrm{i}b)c = cb \cdot \mathrm{i} = bc\mathrm{i}$$
$$(\mathrm{i}b)(\mathrm{i}d) = (bd)(\mathrm{ii}) = bd(\mathrm{i})^2 = (bd)(-1) = -bd$$
ed, usando l'associatività della somma, concludiamo che
$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + bc\mathrm{i} - bd = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$
$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Osservazione 1.1. *Osserviamo che*

$$(\mathrm{i}b)^2 = \mathrm{i}^2 b^2 = (-1)b^2 = -b^2 < 0.$$

In particolare, se $b \neq 0$, $\mathrm{i}b$ *non potrà mai essere un numero reale.*

Definizione 1.2. *Chiamiamo* numero immaginario *ogni numero il cui quadrato coincide con un numero reale minore o uguale a zero.*

Proposizione 1.3. *Tutti i numeri immaginari sono della forma* $\mathrm{i}b$ *con* $b \in \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. Se w è un numero immaginario allora $w^2 = q \leq 0$. Siccome $-q \geqslant 0$ è ben definita la sua radice quadrata $b = \sqrt{-q} \geqslant 0$. Quindi

$$0 = w^2 - q = w^2 + b^2 = w^2 - (-b^2) = w^2 - (\mathrm{i}b)^2 = (w - \mathrm{i}b)(w + \mathrm{i}b),$$

e per la legge dell'annullamento del prodotto segue che $w - \mathrm{i}b = 0$ oppure $w + \mathrm{i}b = 0$ e dunque $w = \mathrm{i}b$ oppure $w = \mathrm{i}(-b)$. □

Possiamo indicare con $\mathrm{i}\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri immaginari, ovvero l'insieme di tutti i multipli reali dell'unità immaginaria.

Proposizione 1.4. *L'unico numero che è sia reale che immaginario è lo zero. Ovvero*

$$\mathbb{R} \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \{0\}\,.$$

Dimostrazione. Poichè $0^2 = 0$, abbiamo che 0 è sia un numero reale che immaginario. Inoltre, se z è un numero sia reale che immaginario, allora $0 \leq z^2 \leq 0$ e quindi $z^2 = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto in $\mathbb{C}$ dovrà allora essere $z = 0$. Ne deduciamo che l'unico numero che può essere sia reale che immaginario è 0. □

Cosa possiamo dire invece dei numeri che abbiamo "scritto" come somma tra un numero reale a e un numero immaginario $\mathrm{i}b$? Se $a + \mathrm{i}b = c \in \mathbb{R}$ allora il numero

$$z = c - a = \mathrm{i}b$$

risulterebbe essere sia reale che immaginario e dunque $b = 0$.
Analogamente, se $a + \mathrm{i}b = \mathrm{i}d \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ avremo che

$$a = \mathrm{i}(d - b)$$

risulterebbe essere sia reale che immaginario e dunque $a = 0$.

Quindi se a e b non sono entrambi nulli la somma $a + \mathrm{i}b$ non può essere né un numero reale e né un numero immaginario. Dovrà essere qualcosa di nuovo, un ulteriore tipo di numero che estende i concetti di numero reale e di numero immaginario.

2. Il campo dei numeri complessi

Siamo ora in grado di definire l'insieme dei numeri complessi.

Definizione 2.1. *Chiamiamo* numero complesso *la somma tra un numero reale e un numero immaginario, ovvero ogni espressione della forma*

$$a + \mathrm{i}b, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Se $z = a + \mathrm{i}b$ *è un numero complesso, con* $a, b \in \mathbb{R}$*, allora*

- *il coefficiente reale* a *si dice* **parte reale** *del numero complesso* z *e la indichiamo con* $\mathrm{Re}(z)$*;*
- *il coefficiente reale* b *si dice* **parte immaginaria** *del numero complesso* z *e la indichiamo con* $\mathrm{Im}(z)$*.*

Indichiamo con $\mathbb{C}$ *l'insieme di tutti i numeri complessi,*

$$\mathbb{C} := \{z = a + b\mathrm{i} \colon a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ad esempio la parte reale del numero complesso $2 + \mathrm{i}3$ è il numero reale 2, mentre la parte immaginaria è il numero reale 3 (e non il numero immaginario $\mathrm{i}3$).

Ogni numero reale a può essere identificato con il numero complesso $a + \mathrm{i}0$ che ha parte immaginaria nulla; ogni numero immaginario $\mathrm{i}b$ può essere identificato con il numero complesso $0 + \mathrm{i}b$ che ha parte reale nulla.

Proposizione 2.2. *Due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria.*

Dimostrazione. Se $a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d$ allora si ha che $a - c = \mathrm{i}(d - b)$ è una quantità sia reale che immaginaria, quindi per la proposizione 1.4 avremo che $a - c = 0$ e $d - b = 0$, ovvero $a = c$ e $b = d$. □

Ricapitolando:

Definizione 2.3. *Se $z = a + \mathrm{i}b$ e $w = c + \mathrm{i}d$ sono due numeri complessi la loro somma e il loro prodotto sono i numeri complessi definiti dalle seguenti formule:*

$$z + w = (a + c) + \mathrm{i}(b + d), \tag{3}$$

$$zw = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc). \tag{4}$$

Osservazione 2.4. *Ricordiamoci che per fare calcoli con numeri complessi non è importante imparare a memoria le formule* (3) *e* (4)*, basta utilizzare le solite regole algebriche che valgono in un campo numerico, a cui aggiungiamo un'unica regola nuova: $i^2 = -1$.*

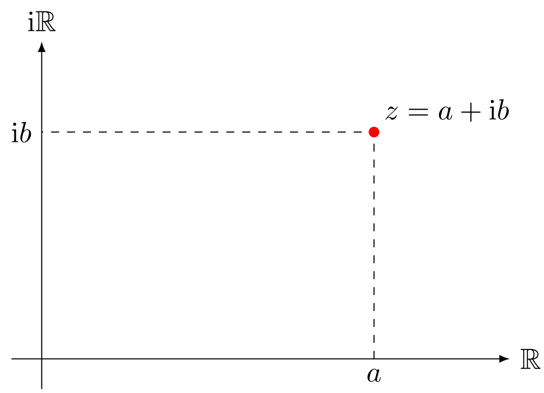
Esercizio 2.5. *Se $z = 2 - \mathrm{i}3$ e $w = 4 + \mathrm{i}$ allora abbiamo*

$$z + w = 2 - \mathrm{i}3 + 4 + \mathrm{i} = 6 - \mathrm{i}2,$$

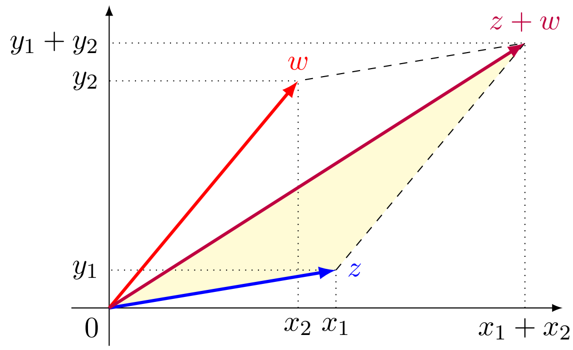
$$zw = (2 - \mathrm{i}3)(4 + \mathrm{i}) = 8 + 2\mathrm{i} - 12\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 8 - 10\mathrm{i} + 3 = 11 - \mathrm{i}10.$$

2.1. **Rappresentazione cartesiana di un numero complesso.**

Osservazione 2.6. Ad ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ corrisponde un numero complesso $a+\mathrm{i}b$, e viceversa ad ogni numero complesso $a+\mathrm{i}b$ corrisponde la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ossia il punto del piano di ascissa a e ordinata b. Tramite questa corrispondenza biunivoca identifichiamo l'insieme dei numeri complessi con il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ che chiameremo in questo contesto *piano complesso*. È per questo che la scrittura dei numeri complessi nella forma algebrica $a + \mathrm{i}b$ viene anche detta *forma cartesiana*.



2.2. **Rappresentazione geometrica dei numeri complessi.** Osserviamo che il numero complesso z può essere anche visualizzato come il vettore del piano cartesiano che parte dall'origine e arriva al punto (x, y). In particolare, dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ e $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, la loro somma $z + w = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$ corrisponde al vettore che parte dall'origine e arriva al punto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, e si può ottenere geometricamente con la regola del parallelogrammo (traslando uno dei due vettori dall'origine alla punta dell'altro vettore):



Osserviamo che se $z = a + \mathrm{i}b$, allora $\sqrt{a^2+b^2}$ è la lunghezza del segmento che unisce l'origine del piano cartesiano con il punto di coordinate (a, b).

2.3. **Modulo, opposto, reciproco di un numero complesso.**

Definizione 2.7. *Definiamo* modulo *di un numero complesso $z = a + b\mathrm{i}$ il numero reale non negativo $|z|$ definito da*

$$|z| := \sqrt{a^2+b^2}.$$

Si osservi che $|a+b\mathrm{i}| = ||(a,b)||$. usando le proprietà della norma di $\mathbb{R}^2$, si ottiene la *disuguaglianza triangolare*:

$$|z+w| \leqslant |z| + |w|, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

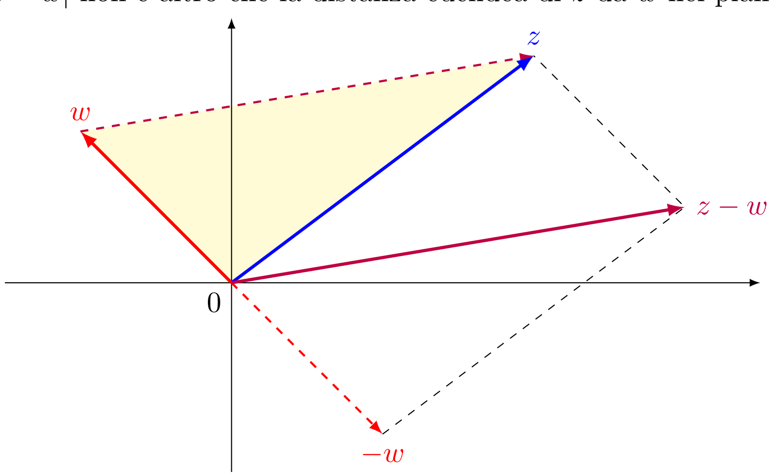
da cui segue che $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z-w|, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.$

Definizione 2.8. *L'opposto di un numero complesso z sarà il numero complesso $-z := (-a)+\mathrm{i}(-b)$ ossia il numero che ha come parte reale e immaginaria gli opposti di quelle di z.*

Quindi $-z$ corrisponde al vettore che congiunge 0 al punto $(-a, -b)$. Inoltre,

$$|z| = |-z|.$$

In particolare la differenza $z - w$ possiamo interpretarla come la somma tra z e $-w$ e possiamo immaginarla come il vettore che applicato nella punta del vettore w arriva nella punta del vettore z; il suo modulo $|z - w|$ non è altro che la distanza euclidea di z da w nel piano complesso.



Con le leggi che abbiamo introdotto, vale il seguente teorema.

Teorema 2.9. *L'insieme dei numeri complessi dotato delle operazioni di somma e prodotto forma un campo (numerico). Ovvero valgono le seguenti proprietà:*

- **Proprietà della somma**.

- *Associativa:* $\forall v, w, z \in \mathbb{C}$ *si ha* $(v+w)+z = v+(w+z)$.
- *Commutativa:* $\forall w, z \in \mathbb{C}$ *si ha* $w+z = z+w$.
- *Elemento neutro: il numero* $0 := 0 + \mathrm{i}0 \in \mathbb{C}$ *è tale che* $\forall z \in \mathbb{C}$ *si ha* $z+0 = z$.
- *Opposto:* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists -z \in \mathbb{C}$ *tale che* $z+(-z) = 0$.

• **Proprietà del prodotto**.
- *Associativa:* $\forall v, w, z \in \mathbb{C}$ *si ha* $(vw)z = v(wz)$.
- *Commutativa:* $\forall w, z \in \mathbb{C}$ *si ha* $wz = zw$.
- *Elemento neutro: il numero* $1 := 1 + \mathrm{i}0 \in \mathbb{C}$ *è tale che* $\forall z \in \mathbb{C}$ *si ha* $1z = z$.
- *Reciproco:* $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exists z^{-1} \in \mathbb{C}$ *tale che* $zz^{-1} = 1$.

• **Proprietà che definiscono il legame tra somma e prodotto.**
- *Distributiva:* $\forall v, w, z \in \mathbb{C}$ *si ha* $(v+w)z = vz+wz$.

La dimostrazione del teorema 2.9 non è difficile e la lasciamo come esercizio ai lettori più scrupolosi.

Definiamo chi è il reciproco di cui parla l'enunciato del teorema. Osserviamo

$$(a+ib)\cdot(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2-(i)^2(b^2) = a^2-(-1)b^2 = a^2+b^2 = |z|^2.$$

Definizione 2.10. *Dato un numero complesso* z *definiamo* **coniugato** *di* z *il numero complesso* $\overline{z}$ *che ha la stessa parte reale di* z *e parte immaginaria opposta. Se* $z = a+\mathrm{i}b$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *allora*

$$\overline{z} = a + \mathrm{i}(-b) = a - \mathrm{i}b.$$

Allora possiamo riscrivere l'uguaglianza precedente come

$$z\overline{z} = |z|^2$$

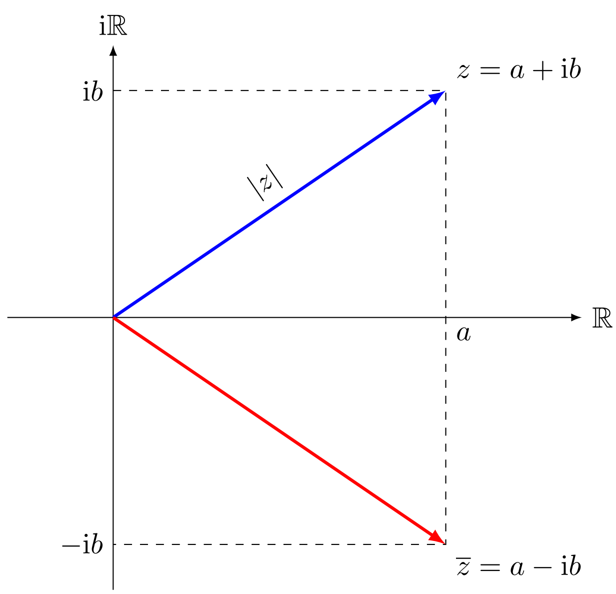
ossia

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

Abiamo pertanto trovato una formula per il reciproco:

Proposizione 2.11. *Il reciproco di un numero* $z = a+\mathrm{i}b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *è dato da*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} := \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}. \tag{5}$$



Esercizio 2.12. *Sia* $z = \frac{1}{2} - 3\mathrm{i}$*. Il suo coniugato è* $\overline{z} = \frac{1}{2} + 3\mathrm{i}$*. Il modulo di* z *è*

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (3)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 9} = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Calcoliamo il reciproco di z*:*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 3\mathrm{i}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 3\mathrm{i}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}}{\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}} = \frac{\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}}{\left(\frac{1}{2} - 3\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}}{\frac{1}{4} + 9} = \frac{\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}}{\frac{37}{4}} = \frac{4}{37}\left(\frac{1}{2} + 3\mathrm{i}\right) = \frac{2}{37} + \frac{12}{37}\mathrm{i}.$$

Osservazione 2.13. La definizione di reciproco consente di

- dare senso alla definizione di $\dfrac{1}{a+ib}$ ed offre anche una regola per il suo calcolo:

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

- calcolare facilmente quozienti tra numeri complessi: in un rapporto tra numeri complessi, moltiplicando sia numeratore che denominatore per il coniugato del denominatore spariscono le quantità immaginarie dal denominatore,

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}.$$

  Ad esempio,

$$\frac{2+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} = \frac{2+\mathrm{i}+6\mathrm{i}-3}{1+9} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}\mathrm{i}.$$

Proposizione 2.14 (Proprietà del coniugato e del modulo). *Dati due numeri complessi* z *e* w *valgono le seguenti proprietà:*

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= z, & |\overline{z}| &= |z|\,, \\ z + \overline{z} &= 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}, & z - \overline{z} &= 2i\mathrm{Im}(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}, \\ |\mathrm{Re}(z)| &\leqslant |z|\,, & |\mathrm{Im}(z)| &\leqslant |z|\,, \\ \overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w}, & \overline{zw} &= \overline{z}\,\overline{w}, \\ |zw| &= |z|\,|w|\,, & |z+w| &\leqslant |z| + |w|\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Scriviamo in forma cartesiana $z = a + \mathrm{i}b$, $w = c + \mathrm{i}d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Coniugato del coniugato: $\overline{\overline{z}} = \overline{a - \mathrm{i}b} = a + \mathrm{i}b = z$.
- Norma del coniugato: $|\overline{z}|^2 = \overline{z}\,\overline{\overline{z}} = \overline{z}z = |z|^2$.
- Somma di un numero con il suo coniugato: $z + \overline{z} = (a + \mathrm{i}b) + (a - \mathrm{i}b) = 2a = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$.
- Differenza tra un numero e il suo coniugato: $z - \overline{z} = (a + \mathrm{i}b) - (a - \mathrm{i}b) = 2b = 2\mathrm{Im}(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
- Confronto tra parte reale e modulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \sqrt{a^2} = |a| = |\mathrm{Re}(z)|$.
- Confronto tra parte immaginaria e modulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \sqrt{b^2} = |b| = |\mathrm{Im}(z)|$.
- Coniugato della somma:

$$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + \mathrm{i}(b+d)} = (a+c) - \mathrm{i}(b+d) = (a - \mathrm{i}b) + (c - \mathrm{i}d) = \overline{z} + \overline{w}.$$

- Coniugato del prodotto:

$$\overline{zw} = \overline{(ac-bd) + \mathrm{i}(ad+bc)} = (ac-bd) - \mathrm{i}(ad+bc) =$$

$$= \big(ac - (-b)(-d)\big) + \mathrm{i}\big(a(-d) + (-b)c\big) = (a - \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d) = \overline{z}\,\overline{w}.$$

- Modulo del prodotto: $|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{|z|^2\,|w|^2} = |z|\,|w|$.

$\square$

- Disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z\overline{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = \big(|z| + |w|\big)^2.\end{aligned}$$

$\square$

Cosa abbiamo perso...

Osservazione 2.15. Il campo $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, ossia esiste una relazione d'ordine totale per cui, dati due numeri reali, è sempre possibile confrontarli e si avrà sempre che uno dei due è minore o uguale all'altro.
La relazione $\leqslant$ stabilisce su $\mathbb{R}$ un ordine totale compatibile con la struttura algebrica, in particolare, dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$a \leqslant b \implies a + c \leqslant b + c, \tag{6}$$
$$a \geqslant 0,\, b \geqslant 0 \implies ab \geqslant 0. \tag{7}$$

Possiamo stabilire un relazione d'ordine anche in campo complesso? Se fosse possibile dovremmo avere che $\mathrm{i} \geqslant 0$ oppure $\mathrm{i} \leqslant 0$. Ma allora avremmo

$$\mathrm{i} \geqslant 0 \implies \mathrm{i}^2 \geqslant 0 \implies -1 \geqslant 0,$$
$$\mathrm{i} \leqslant 0 \implies -\mathrm{i} \geq 0 \implies -1 = (-\mathrm{i})^2 \geq 0,$$

ed in ogni caso troveremmo una contraddizione. Dunque nel campo complesso $\mathbb{C}$ non è possibile stabilire una relazione d'ordine totale che sia compatibile con la struttura algebrica.

3. **Equazioni in campo complesso**

Per risolvere in campo complesso equazioni di primo grado in cui compare solo l'incognita z, (e non la sua coniugata $\overline{z}$), ovvero equazioni del tipo

$$Az + B = 0, \text{ con } A, B \in \mathbb{C}, A \neq 0$$

grazie alle proprietà algebriche di campo possiamo procedere nel modo solito:

$$Az + B = 0 \implies Az = -B \implies z = A^{-1}(-B) = -\frac{B}{A}.$$

Esempio 3.1. Risolviamo l'equazione

$$\frac{3}{z+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2-z}.$$

Ovviamente dobbiamo richiedere che $z \neq -\mathrm{i}$ e $z \neq 2$. Moltiplicando a destra e a sinistra per i due denominatori, otteniamo l'equazione di primo grado:

$$3(2-z) = \mathrm{i}(z+\mathrm{i}),$$

da cui segue

$$(-3-\mathrm{i})z = -7,$$

ossia

$$z = \frac{7}{3+\mathrm{i}} = \frac{7(3-\mathrm{i})}{9+1} = \frac{21}{10} - \frac{7}{10}\mathrm{i}.$$

Nel caso in cui oltre a z compare anche $\bar{z}$ allora si procede introducendo le due incognite ausiliarie $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$. Allora $z = x + \mathrm{i}y$ e $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$. Grazia alla proposizione 2.2 per risolvere un' equazione del tipo

$$F(z) = G(z),$$

dove $F(z)$ e $G(z)$ sono due funzioni a valori complessi della variabile incognita complessa $z = x+\mathrm{i}y$, basta risolvere il sistema di due equazioni tra quantità reali in due incognite reali x, y dato da

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\big(F(x+\mathrm{i}y)\big) = \mathrm{Re}\big(G(x+\mathrm{i}y)\big), \\ \mathrm{Im}\big(F(x+\mathrm{i}y)\big) = \mathrm{Im}\big(G(x+\mathrm{i}y)\big). \end{cases}$$

Esempio 3.2. Risolviamo l'equazione

$$2z - 3\mathrm{i}\overline{z} = 1 + 4\mathrm{i}. \tag{8}$$

Scriviamo z in forma cartesiana, $z = x + \mathrm{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa

$$2(x + \mathrm{i}y) - 3\mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) = 1 + 4\mathrm{i}.$$

Semplificando otteniamo

$$(2x - 3y) + \mathrm{i}(2y - 3x) = 1 + 4\mathrm{i}.$$

uguagliando le parti reali e le parti immaginarie delle espressioni a destra e a sinistra dell'uguale otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y & = 1, \\ -3x + 2y & = 4, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x = -\frac{14}{5}$ e $y = -\frac{11}{5}$. Dunque l'equazione (8) ha come soluzione

$$z = x + \mathrm{i}y = -\frac{14}{5} - \frac{11}{5}\mathrm{i}.$$

3.1. **Calcolo algebrico di radici quadrate.** Le equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$ si possono risolvere con la formula risolutiva che si usa in $\mathbb{R}$ pur di saper calcolare le radici quadrate di un numero complesso w. Sappiamo che in campo reale esistono radici quadrate solo per numeri non negativi. Consideriamo ora un numero complesso $w = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, e cerchiamo di determinare per quali numeri complessi z si ha che

$$z^2 = w. \tag{9}$$

Osservazione 3.3. Osserviamo che se $z_\star$ è una soluzione di (9), anche il suo opposto $-z_\star$ lo è, in quanto $(-z)^2 = z^2$. Inoltre, se z_1 e z_2 sono due soluzioni, allora $z_1^2 = z_2^2$; da ciò ricaviamo che

$$0 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2),$$

da cui $z_1 = z_2$ oppure $z_1 = -z_2$. Segue che le radici quadrate di un numero complesso non nullo sono necessariamente due, una l'opposta dell'altra; mentre di radici quadrate di 0 abbiamo solo 0 (che coincide con il suo opposto). Nel caso in cui $w = a \in \mathbb{R}$ vale che le due radici complesse di w sono

$$\sqrt{w} = \begin{cases} \pm\sqrt{a} \ (\in \mathbb{R}) \text{ se } a \geq 0 \\ \pm\mathrm{i}\sqrt{-a} \ (\in \mathbb{R}\mathrm{i}) \text{ se } a < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Cominciamo la ricerca delle soluzioni di (9). Utilizzando la forma algebrica per z abbiamo che

$$z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 + 2x\mathrm{i}y + (\mathrm{i}y)^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy).$$

Dunque l'equazione (9) diventa equivalente al sistema di equazioni

$$x^2 - y^2 = a, \tag{11}$$

$$2xy = b. \tag{12}$$

Inoltre, sempre dall'equazione (9) segue che

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = \left|z^2\right| = |w| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

ossia

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{13}$$

Sommando e sottraendo tra loro (13) e (11) otteniamo

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}, \qquad y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2},$$

da cui ricaviamo che

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}, \tag{14}$$

con il vincolo (dalla (12)) che $segno(xy) = segno(b)$: se $b > 0$ i segni di x e y devono essere concordi, mentre se $b < 0$ i segni di x e y devono essere discordi.

Proposizione 3.4 (**Radici quadrate in campo complesso**). *Dato il numero $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, con $a, b, \in \mathbb{R}$, le radici quadrate di w (ovvero le soluzioni dell'equazione (9)) sono date dalle seguenti formule:*

- *(w nel semipiano superiore) se $b = \mathrm{Im}(w) > 0$ abbiamo due radici quadrate opposte date da*
$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right);$$
- *(w nel semipiano inferiore) se $b = \mathrm{Im}(w) < 0$ abbiamo due radici quadrate opposte date da*
$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right);$$
- *(w numero reale positivo) se $b = 0$ e $a > 0$ abbiamo due radici quadrate reali opposte date da $z = \pm\sqrt{a}$;*
- *(w numero reale negativo) se $b = 0$ e $a < 0$ abbiamo due radici quadrate immaginarie opposte date da $z = \pm\mathrm{i}\sqrt{-a}$;*
- *(w nullo) se $w = 0$ l'unica radice quadrata è $z = 0$.*

Osservazione 3.5. *In $\mathbb{C}$ non ha senso parlare* della *radice quadrata $\sqrt{w}$ di w, ma ha più senso parlare* delle *(due) radici quadrate $\pm\sqrt{w}$ di w.*

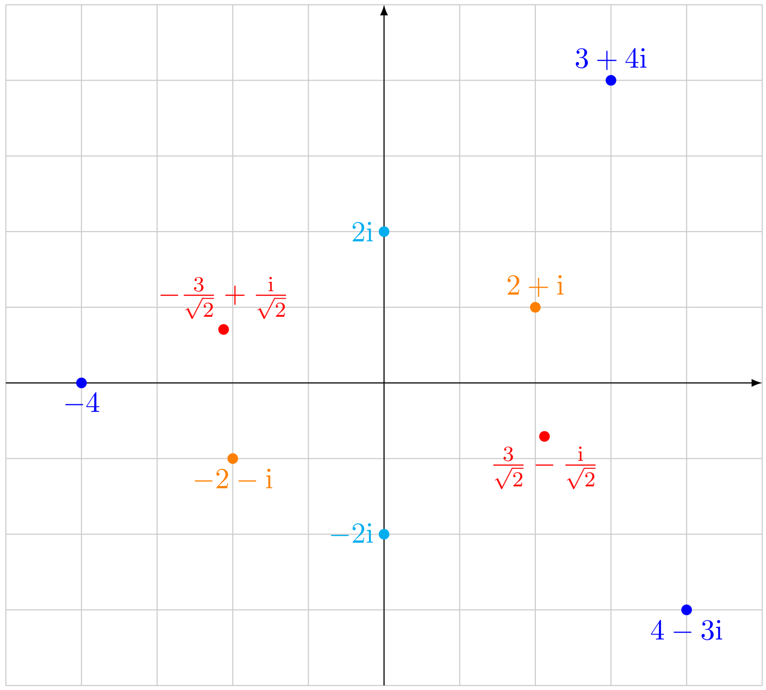
Esempio 3.6.

- Calcoliamo le radici quadrate dei numeri $3 + 4\mathrm{i}$ e $4 - 3\mathrm{i}$:

  $3 + 4\mathrm{i}$ appartiene al semipiano superiore, dunque
$$\pm\sqrt{3 + 4\mathrm{i}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} + 3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} - 3}{2}}\right) = \pm(2 + \mathrm{i});$$
  $4 - 3\mathrm{i}$ appartiene al semipiano inferiore, dunque
$$\pm\sqrt{4 - 3\mathrm{i}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{4^2 + 3^2} + 4}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} - 4}{2}}\right) = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

- calcoliamo le radici quadrate del numero -4. Si tratta di un numero reale negativo, dunque
$$\pm\sqrt{-4} = \pm\mathrm{i}\sqrt{4} = \pm 2\mathrm{i}.$$

Rappresentiamo i risultati trovati nel piano cartesiano:

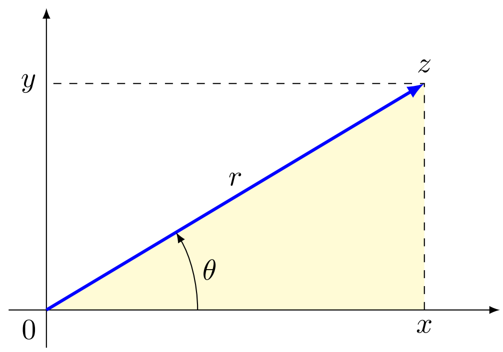


3.2. **Equazioni di secondo grado.** Anche per le equazioni di secondo grado in campo complesso possiamo procedere esattamente come nel campo reale. Consideriamo l'equazione
$$Az^2 + Bz + C = 0, \tag{15}$$
dove $A, B, C \in \mathbb{C}$ con $A \neq 0$. Vale la nota formula
$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$
dove del discriminante $B^2 - 4AC \in \mathbb{C}$ vanno calcolate le radici quadrate complesse.

Esercizio 3.7. *Risolviamo l'equazione di secondo grado*
$$z^2 - (3-2\mathrm{i})z - 6\mathrm{i} = 0. \tag{16}$$
Il discriminante in questo caso è dato da
$$(3-2\mathrm{i})^2 + 4(6\mathrm{i}) = 9 - 12\mathrm{i} - 4 + 24\mathrm{i} = 9 + 12\mathrm{i} - 4 = (3+2\mathrm{i})^2,$$
Le due soluzioni dell'equazione (16) *saranno allora date da*
$$z_\pm = \frac{(3-2\mathrm{i}) \pm (3+2\mathrm{i})}{2},$$
ovvero $z_+ = 3$ *e* $z_- = -2\mathrm{i}$. *In modo alternativo, le sue radici quadrate di* $5+12\mathrm{i}$ *possono essere calcolate come*
$$\pm\sqrt{5+12\mathrm{i}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right) = \pm(3+2\mathrm{i}).$$

4. **Forma trigonometrica dei numeri complessi**

Un numero complesso non nullo $z = x + \mathrm{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \neq (0, 0)$, visto come vettore applicato nell'origine del piano può essere individuato specificando le sue coordinate cartesiane (x, y), ma anche specificando il suo modulo, $r = |z|$ e la sua direzione, ovvero l'angolo θ che esso forma ad esempio con il semiasse positivo delle ascisse. Questi due parametri, modulo (o lunghezza) r e angolo θ, si dicono **coordinate polari**. Se $z = 0$ il vettore che lo rappresenta è il vettore nullo con modulo uguale a zero, $r = 0$ e qualunque valore dell'angolo θ fornisce la rappresentazione in coordinate polari.



Il legame tra coordinate polari (r, θ) e coordinate cartesiane (x, y) si ricava facilmente usando un po' di trigonometria elementare ed è dato dalle formule

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{17}$$

Il numero complesso $z = x + \mathrm{i}y$ si può scrivere quindi nella forma

$$z = r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big), \tag{18}$$

che viene detta **forma trigonometrica** del numero complesso z.

Se $z = 0$ allora la formula (18) è valida per qualsiasi valore di θ.

L'angolo θ viene detto *argomento* del numero z ed esprime il valore in radianti dell'angolo. Esso non è univocamente determinato. Ogni numero complesso non nullo possiede una infinità numerabile di argomenti. Una volta che conosciamo uno di questi argomenti θ, tutti gli altri sono della forma $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Dalle formule (17) si ricava che

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{19}$$

Per trovare θ osserviamo che

- se $x = 0$ allora un argomento possibile è $\theta = \frac{\pi}{2}$ se $y > 0$ e $\theta = -\frac{\pi}{2}$ se $y < 0$
- se $x \neq 0$ allora θ soddisfa la condizione $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

Esempio 4.1. (1) Il numero complesso z_1 che ha modulo 2 e argomento $\pi/6$ è

$$z_1 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\Big) = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

(2) Il numero complesso z_2 che ha modulo 4 e argomento $-\pi/4$ è

$$z_2 = 4\big(\cos(-\pi/4) + \mathrm{i}\sin(-\pi/4)\big) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

(3) Sia $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$. Il suo modulo è $|z_1| = \sqrt{4 + 12} = 4$. Il punto z_1 sta nel primo quadrante e dunque possiede un argomento in $]0, \pi/2[$ tale che $\cos\theta_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, quindi possiamo scegliere $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$. In forma trigonometrica abbiamo

$$z_1 = 4\Big(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big).$$

(4) Sia $z_2 = -1 - \mathrm{i}$. Il suo modulo è $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Il punto z_2 sta nel terzo quadrante sulla diagonale principale (quella di equazione $y = x$) e quindi possiamo scegliere come argomento $\theta_2 = -\frac{3}{4}\pi$. In forma trigonometrica abbiamo

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\Big(-\frac{3}{4}\pi\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(-\frac{3}{4}\pi\Big)\right).$$

(5) Sia $z_3 = 4 - \mathrm{i}$. Il suo modulo è $|z_3| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$. Il punto z_3 sta nel quarto quadrante e dunque possiede un argomento in $]-\pi/2, 0[$ tale che $\tan\theta_3 = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$, quindi possiamo scegliere $\theta_3 = \arctan(-1/4) = -\arctan(1/4)$. In forma trigonometrica abbiamo

$$z_3 = \sqrt{17}\Big(\cos\big(-\arctan(1/4)\big) + \mathrm{i}\sin\big(-\arctan(1/4)\big)\Big).$$

Selezioniamo ora tra tutti i possibili valori che l'argomento di un numero complesso può assumere un valore che possa essere considerato l'argomento "principale".

Definizione 4.2 (Argomento principale). *Dato un numero complesso z non nullo conveniamo di definire* argomento principale *di z quell'unico valore tra tutti i possibili argomenti di z che si trova nell'intervallo $]-\pi, \pi]$. Tale valore lo indichiamo con* $\mathrm{Arg}(z)$.

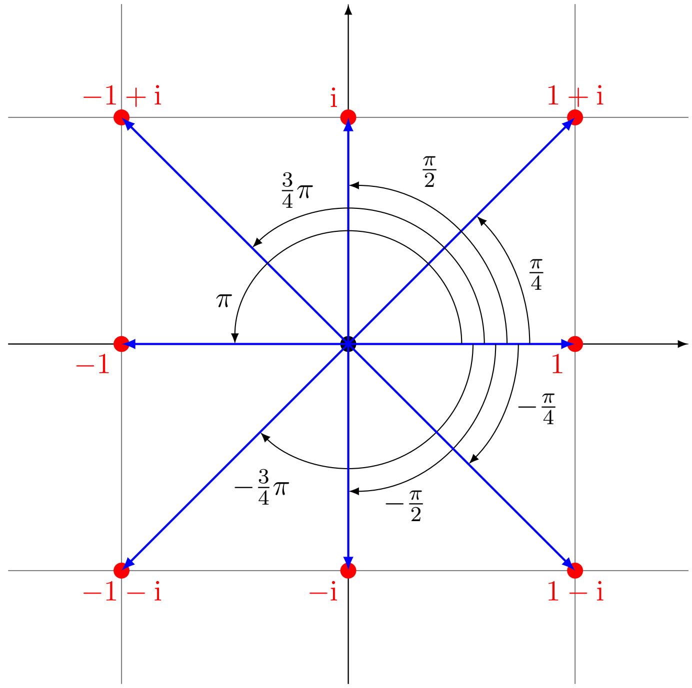
Un'altra possibile scelta ragionevole sarebbe potuta essere quella di scegliere l'intervallo $[0, 2\pi[$; la scelta dell'intervallo è una questione di convenzione.

Casi facili:

- Se $x > 0$ e $y = 0$, il suo argomento principale è $\mathrm{Arg}(z) = 0$.
- Se $x < 0$ e $y = 0$, il suo argomento principale è $\mathrm{Arg}(z) = \pi$.
- Se $x = 0$ e $y > 0$, il suo argomento principale è $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$.
- Se $x = 0$ e $y < 0$, il suo argomento principale è $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$.

Esempio 4.3 (Argomenti principali di alcuni numeri complessi)**.**

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Arg}(1) = 0, && \mathrm{Arg}(-1) = \pi, && \mathrm{Arg}(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}, && \mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2},\\
&\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}, && \mathrm{Arg}(-1+\mathrm{i}) = \frac{3}{4}\pi, && \mathrm{Arg}(-1-\mathrm{i}) = -\frac{3}{4}\pi, && \mathrm{Arg}(1-\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$



Calcolo di $\mathrm{Arg}(z)$**.** Osserviamo che tutte e sole le soluzioni dell'equazione $\tan\theta = \alpha$ con $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ sono della forma

$$\theta_k = \arctan\alpha + k\pi, \qquad \text{al variare di } k \in \mathbb{Z}.$$

Nei casi in cui $x, y \neq 0$, quando si cerca l'argomento principale, si deve prendere, tra tutti i possibili valori, il θ_k che che sta in $(-\pi, \pi)$ e che appartiene allo stesso quadrante dove sta z. Chiamiamo

$$\theta_0 = \arctan\frac{y}{x}.$$

Se $\frac{y}{x} \geq 0$ (ossia il numero complesso z si trova nel primo o terzo quadrante), allora $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ e quindi

- se z sta nel primo quadrante, allora $\mathrm{Arg}(z) = \theta_0$
- se z sta nel terzo quadrante, allora $\mathrm{Arg}(z) = -\pi + \theta_0$ (ossia prendiamo θ_{-1});

Se $\frac{y}{x} < 0$ (ossia il numero complesso z si trova nel secondo o quarto quadrante), allora $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

- se z sta nel quarto quadrante allora $\mathrm{Arg}(z) = \theta_0$;
- se z sta nel secondo quadrante, allora $\mathrm{Arg}(z) = \pi + \theta_0$ (ossia prendiamo θ_1).

Esempio 4.4.

- Il numero $z_1 = 3+4\mathrm{i}$ sta nel primo quadrante, ha argomento principale $\theta_1 \in]0, \pi/2[$; siccome $\tan\theta_1 = \frac{4}{3}$, abbiamo

$$\mathrm{Arg}(z_1) = \theta_1 = \arctan\frac{4}{3} = 0.927\ldots.$$

- Il numero $z_2 = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ sta nel secondo quadrante, il suo modulo è

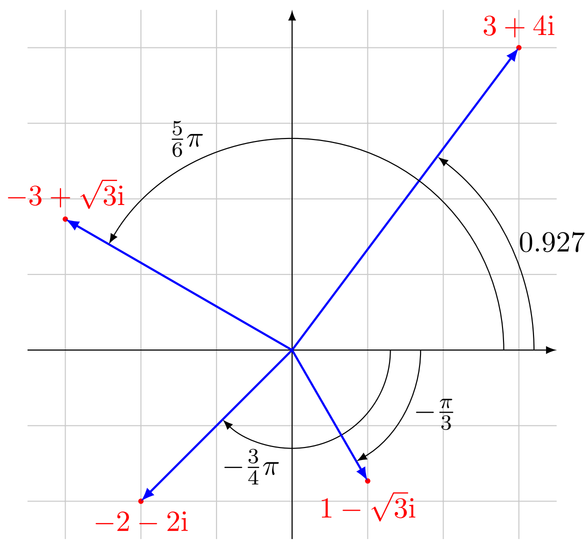
$$|z_2| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3};$$

  ha argomento principale $\theta_2 \in]\pi/2, \pi[$, dunque

$$\mathrm{Arg}\,(z_2) = \pi + \arctan\frac{y}{x} = \pi + \arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \pi - \arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

- Il numero $z_3 = -2 - 2\mathrm{i}$ sta nel terzo quadrante, il suo modulo è
$$|z_3| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2};$$
ha argomento principale $\theta_3 \in]-\pi, -\pi/2[$; abbiamo
$$\mathrm{Arg}(z_3) = -\pi + \arctan 1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi.$$
- Il numero $z_4 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ sta nel quarto quadrante, il suo modulo è
$$|z_4| = \sqrt{1+3} = 2,$$
ha argomento principale $\theta_4 \in]-\pi/2, 0[$; abbiamo
$$\mathrm{Arg}\,(z_4) = \arctan\bigl(-\sqrt{3}\bigr) = -\frac{\pi}{3}.$$

Rappresentiamo questi quattro numeri complessi nel piano cartesiano:



5. **Rappresentazione esponenziale di un numero complesso**

Consideriamo la formula (18) che esprime un numero complesso in forma trigonometrica:
$$z = r\bigl(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\bigr).$$

Osserviamo che in questa forma il numero complesso z viene scritto come prodotto di due fattori: il primo fattore è un numero non negativo, $r \geqslant 0$, che rappresenta il modulo di z; il secondo fattore è una quantità a valori complessi che dipende solo dal valore reale dell'argomento θ.

Definizione 5.1. *Per ogni valore $t \in \mathbb{R}$ definiamo l'esponenziale ad esponente immaginario it ponendo*
$$\mathrm{e}^{it} := \cos t + \mathrm{i}\sin t.$$

Ora la forma trigonometrica (18) si può riscrivere più brevemente come
$$z = re^{i\theta}.$$
Tale forma viene detta **forma esponenziale** del numero complesso z.

Dalla definizione segue che
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+2\pi)}.$$

Inoltre

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1.$$

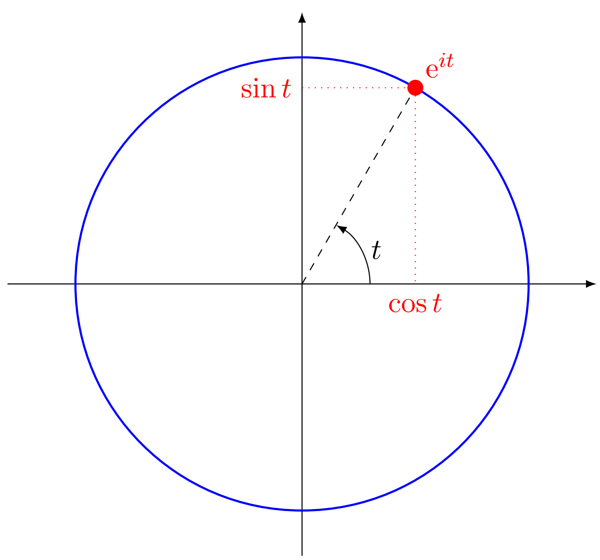
Esercizio 5.2. *Il numero complesso con modulo 2π e argomento $\pi/3$ è il numero:*

$$2\pi e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\pi\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2\pi\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \pi + i\pi\sqrt{3}.$$

Proposizione 5.3. *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ il numero complesso e^{it} ha modulo 1 e argomento t.*

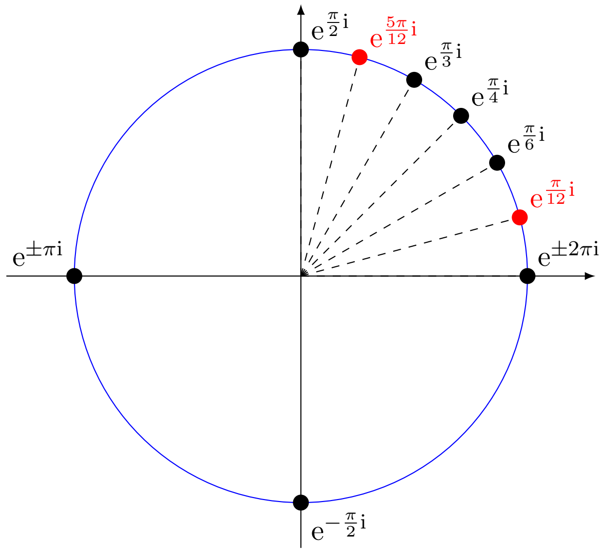
Dimostrazione. Abbiamo: $|e^{it}|^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$. Inoltre, $\theta = t$ soddisfa le relazioni (19) e dunque t è un argomento di e^{it}. □

Dunque al variare di t, il punto e^{it} si muove nel piano complesso, sulla circonferenza trigonometrica, (avente centro nell'origine e raggio 1).



Altri valori, facilmente calcolabili, dell'esponenziale ad esponente immaginario:

$$\begin{array}{llll}
e^{0i} = 1, & e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i, & e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i, & e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \\
e^{i\frac{\pi}{2}} = i, & e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i, & e^{i\pi} = -1, & e^{-i\pi} = -1, \\
e^{2\pi i} = 1, & e^{k\pi i} = (-1)^k, & e^{2\pi k i} = 1, & (k \in \mathbb{Z}).
\end{array}$$



Proprietà dell'esponenziale

- Utilizzando le formule di addizione per coseno e seno otteniamo:

$$\begin{aligned}e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \\ &= (\cos x\cos y - \sin x \sin y) + \mathrm{i}(\cos x \sin y + \sin x \cos y) = \\ &= \cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) = e^{i(x+y)}.\end{aligned}$$

  Tale formula è analoga alla legge esponenziale per esponenziali reali,

$$e^{(x+y)} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Cosa succede se proviamo a derivare la funzione e^{it}? Per linearità,

$$(e^{it})' = (\cos t)' + \mathrm{i}(\sin t)' = -\sin t + \mathrm{i}\cos t = \mathrm{i}(\mathrm{i}\sin t + \cos t) = \mathrm{i}e^{it}. \tag{20}$$

  Questa proprietà è analoga alla proprietà delle funzioni esponenziali reali

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}.$$

- $e^{-\mathrm{i}t}$ è il coniugato di $e^{\mathrm{i}t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, in quanto

$$e^{-\mathrm{i}t} = \cos(-t) + \mathrm{i}\sin(-t) = \cos t - \mathrm{i}\sin t = \overline{\cos t + \mathrm{i}\sin t} = \overline{e^{\mathrm{i}t}};$$

- siccome $e^{\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}t} = e^{\mathrm{i}0} = 1$, abbiamo anche che il coniugato coincide con il reciproco

$$\overline{e^{\mathrm{i}t}} = \frac{1}{e^{\mathrm{i}t}}.$$

- Sommando e sottraendo tra loro le formule

$$\cos t + \mathrm{i}\sin t = e^{\mathrm{i}t},$$
$$\cos t - \mathrm{i}\sin t = e^{-\mathrm{i}t},$$

  ricaviamo le *formule di Eulero* che permettono di esprimere coseno e seno come combinazione lineare di esponenziali ad esponente immaginario:

$$\cos t = \frac{e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}.$$

Inoltre vale il seguente risultato:

Proposizione 5.4. *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r, s > 0$. Allora*

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \iff r = s \text{ ed esiste } k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \alpha = \beta + 2\pi k.$$

Dimostrazione. Poichè

$$\frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} = 1 \in \mathbb{R}$$

deduciamo che

$$1 = \|\frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}\| = \frac{r}{s}, \quad \sin(\alpha - \beta) = 0$$

da cui $r = s$ e $\alpha - \beta$ deve essere un multiplo intero dell'angolo giro 2π. □

Ci sono dunque forti analogie tra la funzione esponenziale ad esponente reale e^t e la funzione esponenziale ad esponente immaginario $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, ma esse presentano anche profonde differenze, si tratta di funzioni che si comportano in modo estremamente diverso:

- la funzione $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^t$ assume valori reali, è strettamente crescente e dunque iniettiva e invertibile, è infinitesima per $t \to -\infty$ e infinita per $t \to +\infty$;
- la funzione $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ assume valori complessi, è limitata in quanto i suoi valori stanno sulla circonferenza trigonometrica, è periodica con periodo 2π (essendo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+2\pi)}$); dunque non è iniettiva e quindi non è invertibile.

5.1. **Prodotti in forma polare.** Essendo la forma esponenziale un prodotto, calcolare prodotti o quozienti di numeri complessi scritti in forma esponenziale diventa molto semplice.

Consideriamo due numeri complessi $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e $w = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ Moltiplicando tra loro i due numeri otteniamo

$$zw = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = (rs)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)},$$

e dunque il prodotto ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti In particolare, se $s = 1$, allora il prodotto $z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ corrisponde alla rotazione di z in senso antiorario di un angolo pari a φ.

Dividendo tra loro i due numeri, nell'ipotesi che sia $w \neq 0$, otteniamo

$$\frac{z}{w} = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)},$$

Dato $n \in \mathbb{N}$, calcolando la potenza z^n in forma esponenziale otteniamo

$$z^n = \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{21}$$

e dunque la potenza z^n ha come modulo la potenza del modulo e come argomento n volte l'argomento di z.

6. **Radici n-esime di un numero complesso**

Definizione 6.1. *Dati $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{C}$ diciamo che un numero complesso z è una* radice n-esima *di w quando $z^n = w$.*

Le radici n-esime di w sono dunque le soluzioni z dell'equazione

$$z^n = w. \tag{22}$$

Se $w = 0$, per la legge dell'annullamento del prodotto l'unica soluzione di $z^n = 0$ è il solo numero $z = 0$.

Nel caso in cui $w \neq 0$, per determinare le soluzioni di (23) scrivendo w e z in forma esponenziale, ossia $w = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ e $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, con $r, s > 0$ e con $\mathrm{Arg}(w) = \varphi$ e con $\mathrm{Arg}(z) = \theta$ allora l'equazione (23) diventa

$$r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi};$$

si tratta di un'uguaglianza tra due numeri complessi in forma esponenziale. Usando la proposizione 5.4, imponendo l'uguaglianza tra i moduli e l'uguaglianza tra gli argomenti a meno di multipli interi di 2π, otteniamo

$$\begin{aligned} &r^n = s, \\ &n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ne segue che possiamo ricavare r prendendo la radice n-esima reale di s e calcolare θ dividendo per n l'equazione tra gli argomenti,

$$\begin{aligned} &r = \sqrt[n]{s} = \sqrt[n]{|w|}, \\ &\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che ogni soluzione di (23) è della forma

$$z = z_k := \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}, \quad \text{con } \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

Equivalentemente, posto $\theta_0 := \frac{\varphi}{n}$ e $z_0 := \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ abbiamo che

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_0 + \frac{2\pi k}{n})} = \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}} = z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

In particolare

$$z_1 = z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$$

ossia z_1 è il numero complesso ottenuto ruotando z_0 in senso antiorario con un angolo $\frac{2\pi}{n}$;

$$z_2 = z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\cdot 2\pi}{n}} = z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)} = z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$$

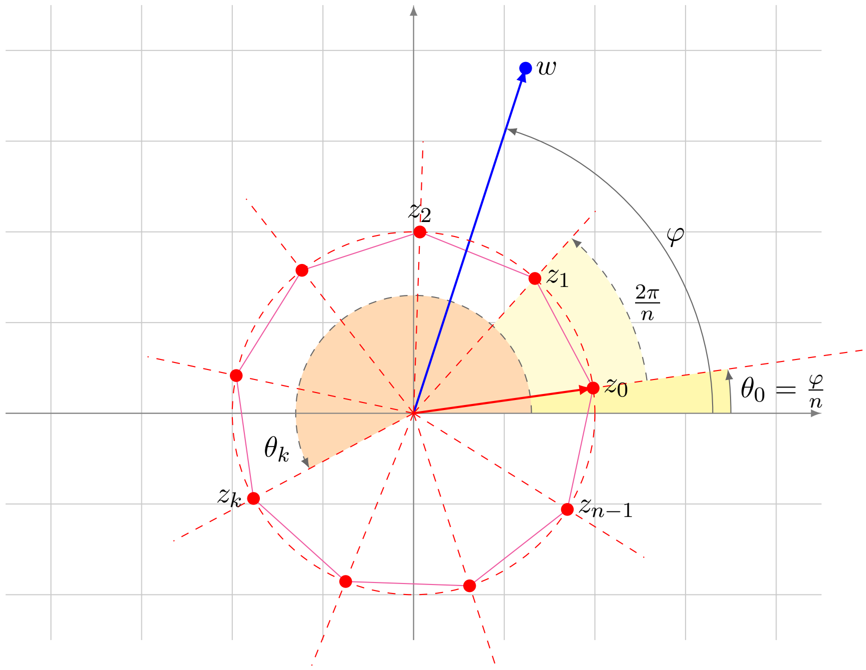
ossia z_2 è il numero complesso ottenuto ruotando z_1 in senso antiorario con un angolo $\frac{2\pi}{n}$; dopo n rotazioni di angolo $\frac{2\pi}{n}$, abbiamo percorso un angolo pari a 2π e torniamo a z_0. I numeri complessi che si ottengono per valori $k \geq n$ coincidono quindi con uno di quelli già ottenuti.

In sintesi, le radici distinte di w sono n, hanno tutte lo stesso modulo, hanno gli argomenti equamente distribuiti nell'arco di un angolo giro, si possono scrivere in modo compatto come

$$z_k := \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{Arg}(w)}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)} = z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}} \text{ con } k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

In particolare queste n radici n-esime nel piano complesso formano i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza con centro nell'origine. Per questo motivo una volta che si conosce una radice n-esima, tutte le altre possono essere ottenute facilmente in modo grafico costruendo il poligono regolare di n lati che ha centro nell'origine e un vertice nella radice nota.

Osservazione 6.2. Il concetto di radice reale e il concetto di radici complesse sono profondamente diversi. Quando esiste, il simbolo $\sqrt[n]{p}$ indica in $\mathbb{R}$ in modo unico una sola radice n-esima di p. La radice quadrata, nell'ambito dei numeri reali, è una funzione ed è definita sui reali ≥ 0. In campo complesso, le radici n-esime sono n disposte secondo la simmetria che abbiamo descritto formando i vertici di un poligono regolare. Dunque in $\mathbb{C}$ non ha molto senso parlare *della* radice n-esima di un numero, piuttosto ha senso parlare *delle* radici n-esime come di un insieme. In $\mathbb{C}$ si sconsiglia quindi l'uso del simbolo $\sqrt[n]{\cdot}$.



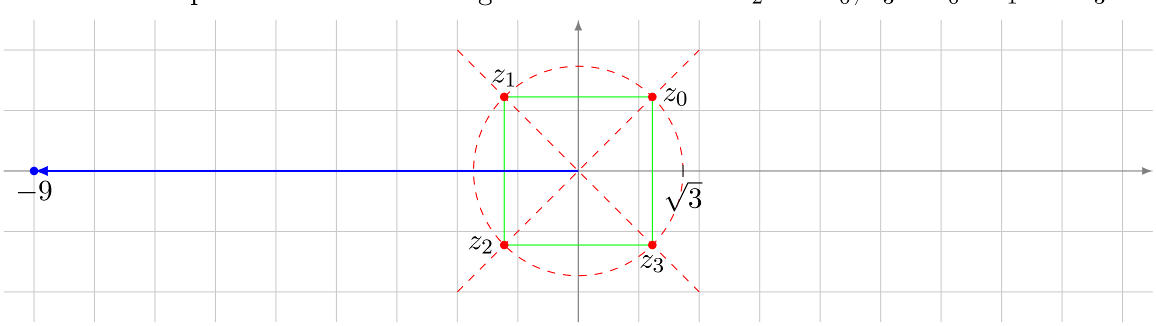
Esempio Calcoliamo le radici quarte del numero -9. Si tratta di un numero che ha modulo $|-9| = 9$ e argomento $\operatorname{Arg}(-9) = \pi$. Le sue radici quarte z_k, con $k = 0, 1, 2, 3$, avranno modulo $|z_k| = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. In modo compatto tutte e 4 radici le possiamo scrivere come

$$z_k = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{4}\right)}, \quad k \in 0, 1, 2, 3.$$

Se

$$z_0 = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

e tracciamo nel piano complesso la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$, il punto z_0 è individuato dall'intersezione di tale circonferenza con la bisettrice del primo quadrante ($\pi/4$ è metà dell'angolo retto). Tutte le altre le otteniamo costruendo il quadrato inscritto alla circonferenza con un vertice nel punto trovato. Dalla figura ritroviamo che $z_2 = -z_0$, $z_3 = \overline{z_0}$ e $z_1 = -z_3$.



Dunque le quattro radici quarte di -9 sono:

$$z_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad z_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad z_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Esercizio Calcoliamo le radici seste del numero $w = \frac{1}{8}\mathrm{i}$. Si tratta di un numero che ha modulo $\left|\frac{1}{8}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{8}$ e argomento $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{8}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{2}$. Le sue radici seste z_k, con $k = 0, 1, \ldots, 5$, avranno modulo

$|z_k| = \sqrt[6]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e si scriveranno in modo compatto come

$$z_k = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{6}\right)}, \quad k \in 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Chiamiamo $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$. Ricordando che $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ e $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ si ottiene che

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

e

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Equivalentemente, partendo da z_0 troviamo le altre 5 radici distinte costruendo l'esagono regolare con un vertice nel punto trovato e inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il punto z_0 è individuato dall'intersezione di tale circonferenza con la semiretta che forma un angolo di $\frac{\pi}{12}$ (ovvero 15 gradi) con il semiasse positivo delle ascisse. Per la simmetria dell'esagono le 6 radici distinte formano tre coppie di punti opposti separati da angoli di $\frac{\pi}{3}$ (ovvero 60 gradi).

Quindi si trova che

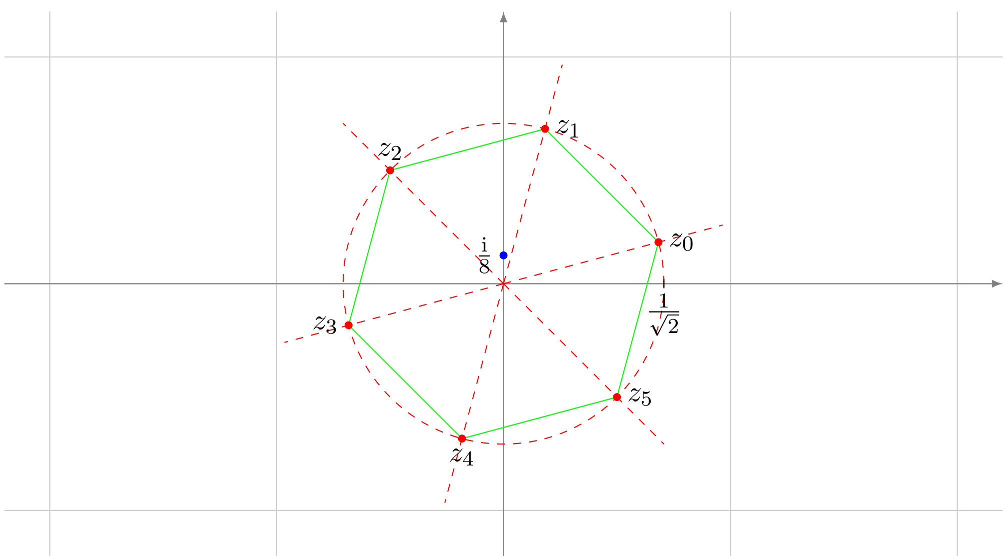
$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5}{12}\pi} = z_0 e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$

Per trovare z_2 ruotiamo z_1 di un angolo di $\frac{\pi}{3}$, ottenendo un argomento di $\frac{3}{4}\pi$ (bisettrice del secondo quadrante),

$$z_2 = z_1 e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Il punto z_3 è opposto a z_0; il punto z_4 è opposto a z_1; il punto z_5 è opposto a z_2.

Per trovare le altre soluzioni basta procedere alla rotazione di z_0 ogni volta di un angolo di $\frac{\pi}{3}$:



Dunque le sei radici seste di $\frac{1}{8}\mathrm{i}$ sono:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \qquad z_1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_3 = -\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{4},$$
$$z_4 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{4} \qquad z_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Osservazione 6.3. Quando $n = 2$, il procedimento appena descritto ci dice che le radici quadrate di un numero non nullo w sono due numeri con modulo pari a $\sqrt{|w|}$; una radice ha argomento uguale alla metà dell'argomento di w e e l'altra, essendo la rotazione della prima radice di un angolo pari a $\frac{2\pi}{2} = \pi$, è la sua l'opposta. Dal confronto con il metodo algebrico di calcolo delle radici quadrate ricordato all'inizio delle lezione, possiamo ricavare alcune identità utili. Ad esempio consideriamo il numero $w := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$. Una sua radice quadrata è $z := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}$. Se invece procediamo con il procedimento algebrico ricordato all'inizio delle lezione, si ottiene che la radice quadrata z di w che si trova nel primo quadrante è data da

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \end{aligned}$$

Segue che

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Radici n-esime di un numero complesso Ricapitolando: le radici n-esime di $w \in C$ sono le soluzioni z dell'equazione

$$z^n = w. \tag{23}$$

Se $w = 0$, l'unica soluzione di $z^n = 0$ è il solo numero $z = 0$.
Se $w \neq 0$, ogni soluzione di (23) è della forma

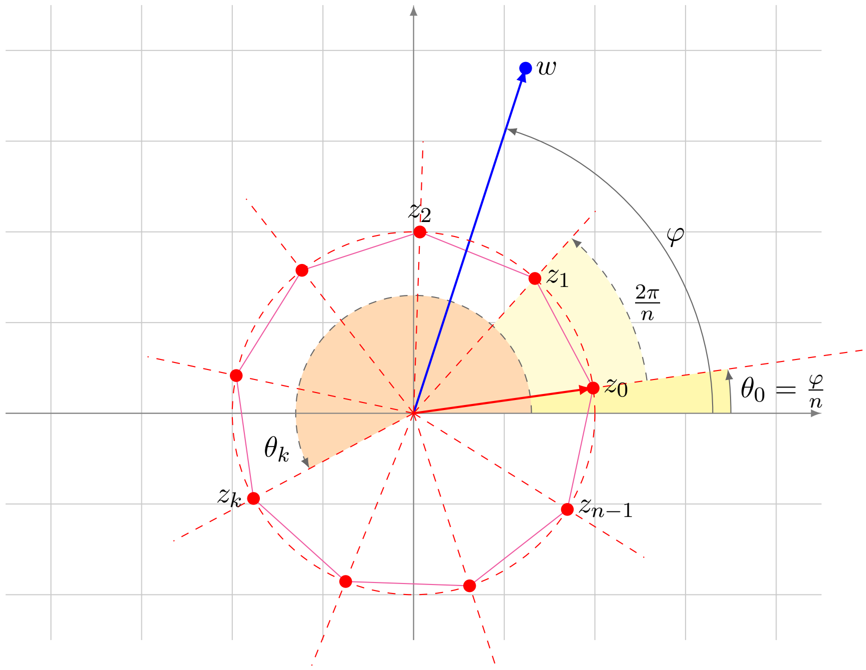
$$z = z_k := \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}, \quad \text{con } \theta_k = \frac{\mathrm{Arg}(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n} \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

Equivalentemente, posto $\theta_0 := \frac{\mathrm{Arg}(z)}{n}$ e $z_0 := \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ abbiamo che

$$z_k = z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

ossia z_k è il numero complesso ottenuto ruotando k volte z_0 in senso antiorario ogni volta con un angolo $\frac{2\pi}{n}$ (quindi con un angolo totale $\frac{2\pi k}{n}$).

In particolare queste n radici n-esime nel piano complesso formano i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza con centro nell'origine.
Per questo motivo una volta che si conosce una radice n-esima, tutte le altre possono essere ottenute facilmente in modo grafico costruendo il poligono regolare di n lati che ha centro nell'origine e un vertice nella radice nota.



Osservazione 6.4. Quando $n = 2$, il procedimento appena descritto ci dice che le radici quadrate di un numero non nullo w sono due numeri con modulo pari a $\sqrt{|w|}$; una radice ha argomento uguale alla metà dell'argomento di w e e l'altra, essendo la rotazione della prima radice di un angolo pari a $\frac{2\pi}{2} = \pi$, è la sua l'opposta. Quindi le due soluzioni distinte di $z^2 = w = |w|e^{\theta i}$ si possono scrivere come

$$z_1 = \sqrt{|w|}e^{\frac{\theta}{2}i}, z_2 = \sqrt{|w|}e^{(\frac{\theta}{2}+\pi)i}$$

o equivalentemente come

$$z = \pm\sqrt{|w|}e^{\frac{\theta}{2}i}$$

Si risolva l'equazione

$$z^4 - 4z^2 + 16 = 0.$$

Essendo $\Delta = -48$ ottengo che le radici quadrate di -48 sono $\pm 4\sqrt{3}i$ e quindi

$$z^2 = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = 4\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = 4e^{\pm\frac{\pi}{3}i}.$$

Quindi da $z^2 = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$ si ottengono le soluzioni

$$z_{1,2} = \pm 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2(\sqrt{3} + i)$$

mentre da $z^2 = 4e^{-\frac{\pi}{3}i}$ si ottengono le soluzioni

$$z_{3,4} = \pm 2e^{-\frac{\pi}{6}i} = \pm 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + \sin(-\frac{\pi}{6})i) = \pm(\sqrt{3} - i)$$

7. Esponenziale ad esponente complesso

Definizione 7.1. *Dato un numero complesso $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, definiamo l'esponenziale e^z come il numero complesso dato da*

$$e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big). \tag{24}$$

Dalla definizione segue che

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}, \qquad y = \mathrm{Im}(z) \text{ è un argomento di } e^z$$

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x\cos(y), \qquad \mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x\sin(y).$$

In particolare

$$e^z = 1 \iff \mathrm{e}^x\big(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\big) = 1 \iff \mathrm{e}^x\sin y = 0 \text{ e } \mathrm{e}^x\cos(y) = 1$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } y = 2k\pi \text{ e } x = 0 \iff z = 2k\pi\mathrm{i}.$$

ossia

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi\mathrm{i}. \tag{25}$$

Vediamo alcuni esempi:

$$\mathrm{e}^{-1+2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}} = \frac{\cos(2)}{\mathrm{e}} + \mathrm{i}\,\frac{\sin(2)}{\mathrm{e}},$$

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}.$$

7.1. **Proprietà dell'esponenziale complesso.**

Proposizione 7.2.
- *$\forall z, w \in \mathbb{C}$ vale che* $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$,
- *$\forall z, w \in \mathbb{C}$ vale che*

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w \iff \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \textit{ tale che } z - w = 2k\pi\mathrm{i}$$

- *per ogni $z \in \mathbb{C}$,* $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.

Dimostrazione.

- Basta scrivere in forma cartesiana $z = a + \mathrm{i}b$ e $w = c + \mathrm{i}d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Usando la definizione di esponenziale ad esponente complesso, la proprietà degli esponenziali ad esponenti reali o ad esponenti immaginari, abbiamo che

$$\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{c+\mathrm{i}d} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\mathrm{e}^c\mathrm{e}^{\mathrm{i}d} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^c\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}d} = \mathrm{e}^{a+c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+d)} = \mathrm{e}^{(a+c)+\mathrm{i}(b+d)} = \mathrm{e}^{z+w}.$$

- è sufficiente osservare che

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w \iff \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-w} = \mathrm{e}^w\mathrm{e}^{-w} = \mathrm{e}^{w-w} = \mathrm{e}^0 = 1 \iff \mathrm{e}^{z-w} = 1$$

  e applicare la (25)
- Si tratta di una semplice verifica: sia $z = x + \mathrm{i}y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, allora

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \overline{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}} = \overline{\mathrm{e}^x}\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x-\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\overline{z}}.$$

□

Esempio Trovare le soluzioni dell'equazione $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = i\mathrm{e}^z$. Vale che

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = i\mathrm{e}^z \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}+z} \iff \mathrm{i}z - \frac{\pi}{2}\mathrm{i} - z = 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi

$$(\mathrm{i} - 1)z = (2k + \frac{1}{2})\pi\mathrm{i}$$

da cui

$$z = \frac{(2k + \frac{1}{2})\pi\mathrm{i}}{\mathrm{i} - 1} = \frac{(2k + \frac{1}{2})(\mathrm{i} + 1)\pi\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2 - 1} = (k + \frac{1}{4})(1 - \mathrm{i})\pi$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

8. **Logaritmo in campo complesso**

Dato $w \in \mathbb{C}$, ci chiediamo se sia possibile trovare $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$\mathrm{e}^z = w. \tag{26}$$

Scriviamo w in forma esponenziale, $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $r = |w|$ e $\theta = \mathrm{Arg}(w)$ e cerchiamo invece z in forma cartesiana, $z = x + \mathrm{i}y$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Applicando la definizione di esponenziale ad esponente complesso, l'equazione (26) diventa

$$\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

Grazie ad una Proposizione vista nell'ambito degli esponenziali ad esponente immaginario, segue che

$$\mathrm{e}^x = r, \qquad \text{ed esiste } k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } y - \theta = 2k\pi.$$

Se $r > 0$, ovvero se $w \neq 0$, otteniamo che

$$x = \log(r) = \log|w|\,.$$

Dalla seconda condizione invece ricaviamo che

$$y = \theta + 2\pi k = \mathrm{Arg}(w) + 2\pi k,$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Chiameremo *logaritmi* (in campo complesso) del numero $w \neq 0$ i numeri complessi

$$z = \log|w| + \mathrm{i}(\mathrm{Arg}(w) + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo comunque darci un criterio per selezionare, tra tutti i possibili valori che il logaritmo di un numero complesso può assumere, un valore che possa essere considerato il logaritmo principale.

Definizione 8.1. Dato un numero complesso $w \neq 0$ conveniamo di definire *logaritmo principale* di w quell'unico valore tra tutti i possibili logaritmi di w la cui parte immaginaria coincide con l'argomento principale di w. Tale valore lo indichiamo con $\mathrm{Log}(w)$ ed è dato da

$$\mathrm{Log}(w) = \log|w| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(w).$$

Esercizio 8.2. Sia $w = 1 + \mathrm{i}$: poichè w ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento principale $\frac{\pi}{4}$; i suoi logaritmi sono i numeri della forma

$$z = \log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i}k = \frac{1}{2}\log 2 + \mathrm{i}\Big(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\Big), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Il suo logaritmo principale è $\mathrm{Log}(1 + \mathrm{i}) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}$.

Il numero $w = -\mathrm{e}$ ha modulo e e argomento principale π; quindi i suoi logaritmi sono i numeri

$$z = \log\mathrm{e} + \pi\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i}k = 1 + \mathrm{i}\pi(1 + 2k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Il suo logaritmo principale è $\mathrm{Log}(-\mathrm{e}) = 1 + \pi\mathrm{i}$.

Il numero $w = \mathrm{e}^{\frac{1}{2} - 5\mathrm{i}}$ ha modulo $\sqrt{\mathrm{e}}$ e argomento (non principale!) -5; i suoi logaritmi sono i numeri

$$z = \log\sqrt{\mathrm{e}} - 5\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i}k = \frac{1}{2} + \mathrm{i}(-5 + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Il suo logaritmo principale è $\mathrm{Log}\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{2} - 5\mathrm{i}}\big) = \frac{1}{2} + (-5 + 2\pi)\mathrm{i}$.

8.1. **Funzioni trigonometriche estese al campo complesso.** Nella seconda lezione abbiamo ricavato le identità di Eulero che esprimono le funzioni coseno e seno in termini di esponenziali ad esponente immaginario:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Queste formule ci suggeriscono il modo per estendere le funzioni trigonometriche a tutto il campo reale, utilizzando l'esponenziale complesso. Definiamo dunque

$$\cos(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Semplicemente usando la definizione, si prova che molte proprietà algebriche di queste funzioni che valevano in campo reale continuano a valere anche in campo complesso: per esempio,

Proposizione 8.3. *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ abbiamo:*

$$\begin{aligned} (\cos z)^2 + (\sin z)^2 &= 1, \\ \cos(z+w) &= (\cos z)(\cos w) - (\sin z)(\sin w), \\ \sin(z+w) &= (\sin z)(\cos w) + (\cos z)(\sin w), \end{aligned}$$

Le equazioni trigonometriche ora possono essere trattate come equazioni esponenziali.

Esercizio 8.4. *Determiniamo tutte le soluzioni in campo complesso dell'equazione*

$$\sin(z) = 2.$$

Utilizzando la definizione di coseno l'equazione diventa

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 4\mathrm{i}.$$

Se poniamo ora $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = w$, e dunque $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \frac{1}{w}$, otteniamo

$$w - \frac{1}{w} = 4\mathrm{i}.$$

da cui

$$w^2 - 4\mathrm{i}w - 1 = 0.$$

Trovate le due soluzioni w_+ e w_-, si tratta poi di risolvere le due equazioni

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = (2 \pm \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

Passando ai logaritmi troviamo

$$\mathrm{i}z_{k,\pm} = \log(2 \pm \sqrt{3}) + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathrm{i}k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

da cui

$$z_{k,\pm} = \log(2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i} - \frac{\pi}{2} - 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

9. Polinomi

Definizione 9.1. Sia K è un campo numerico (ad esempio $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$). Un *polinomio P a coefficienti in K nella variabile X* è una espressione della forma

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} c_k X^k = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_d X^d, \tag{27}$$

dove $c_0, c_1, \ldots, c_d \in K$ e $d \in \mathbb{N}_0$.

Formalmente, un polinomio non è altro che una combinazione lineare di un numero finito di monomi della forma X^k con k intero non negativo.

Definizione 9.2. Se $c_d \neq 0$ (ossia il coefficiente del monomio di grado massimo è non nullo) allora esso viene detto *coefficiente direttore* del polinomio. In tal caso $d \in \mathbb{N}_0$ si dice *grado* del polinomio P e lo indichiamo con $\deg(P)$.

L'espressione (27) indica un polinomio di grado minore o uguale a d.
I polinomi di grado 0 sono i polinomi del tipo $P(X) = c_0$ con $c_0 \neq 0$. Se tutti i coefficienti siano nulli indicheremo il polinomio con 0 (polinomio nullo); il grado del polinomio nullo non è definito.
Indicheremo $\mathcal{P}_K(X)$ l'insieme di tutti i polinomi nella variabile X a coefficienti in K. Ovviamente un polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ può essere riguardato anche come un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$, ossia $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(X) \subseteq \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(X)$.

Esempio 9.3.
- $3 + 2X - 3X^2 + 5X^3$ *è un polinomio di grado* 3 *in* $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(X)$ *con il coefficiente direttore* 5*;*
- $2 + 0X - \mathrm{i}X^2 + 0X^3$ *coincide con il polinomio di secondo grado* $2 - \mathrm{i}X^2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(X)$*, il cui coefficiente direttore è* $-\mathrm{i}$.

Tra polinomi possiamo fare le operazioni di somma e prodotto secondo le regole usuali insegnate a scuola.

Osservazione 9.4. *Anche per il prodotto tra polinomi a coefficienti reali o complessi continua a valere la legge dell'annullamento del prodotto: AB è il polinomio nullo se e solo se A è il polinomio nullo oppure B è il polinomio nullo.*

9.1. Divisione tra polinomi.

Teorema 9.5. *Siano $P, D \in \mathcal{P}_K[x]$, con $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Se D è non nullo allora esiste, ed è unica, una coppia di polinomi Q (detto* quoziente*, ed R (*resto*) in $\mathcal{P}_K[x]$ tali che*
- $P = QD + R$ *(equivalentemente* $\frac{P}{Q} = D + \frac{R}{Q}$*);*
- $R = 0$ *oppure* $\deg(R) < \deg(D)$.

Il polinomio P si dice *dividendo*, mentre D si dice *divisore*. Quando il resto $R = 0$ si ottiene la fattorizzazione

$$P = QD$$

e si dice che P è *divisibile* per D, ovvero che D è un divisore di P.
Un polinomio si dice *irriducibile* quando non è possibile fattorizzarlo come prodotto di due polinomi con grado positivo.

Esempio 9.6. *Consideriamo come dividendo*

$$P(X) := 3 - 2X^2 + X^4 - 4X^5$$

e come divisore

$$D(X) := -5 + X - 5X^3.$$

Calcoliamo la divisione con resto tra il polinomio P di grado 5 e il polinomio D di grado 3. Cominciamo impostando una divisione in colonna, scrivendo i vari monomi P e D in ordine decrescente ciascuno nel proprio posto, facendo attenzione a lasciare il posto per eventuali monomi nulli.

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \cline{7-10}
 & & & & & & +\frac{4}{5}X^2 & & &
\end{array}$$

Calcoliamo il rapporto tra il monomio direttore di P (evidenziato in verde) e il monomio direttore di D (evidenziato in giallo), esso ci darà il primo termine del quoziente (evidenziato in rosso). Moltiplichiamo tale rapporto per il divisore D, riportiamo quello che si ottiene sotto al dividendo ed eseguiamo la sottrazione tra le due righe.

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \cline{7-10}
-4X^5 & +0X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & -4X^2 & & & +\frac{4}{5}X^2 & & & \\ \cline{1-4}
== & +1X^4 & -\frac{4}{5}X^3 & +2X^2 & +0X & +3 & & & &
\end{array}$$

Otteniamo nell'ultima riga un nuovo polinomio $\widetilde{P}$ (evidenziato in blu) con un grado 4 che è ancora maggiore del grado di D; iteriamo dunque il procedimendo.

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \cline{7-10}
-4X^5 & +0X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & -4X^2 & & & +\frac{4}{5}X^2 & -\frac{1}{5}X & & \\ \hdashline
== & +1X^4 & -\frac{4}{5}X^3 & +2X^2 & +0X & +3 & & & &
\end{array}$$

Dopo aver aggiunto al quoziente il rapporto tra i monomi direttori di $\widetilde{P}$ e di D, riportiamo sotto $\widetilde{P}$ il prodotto di tale rapporto per D ed eseguiamo la sottrazione tra le due righe.

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\ \cline{7-10}
-4X^5 & +0X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & -4X^2 & & & +\frac{4}{5}X^2 & -\frac{1}{5}X & & \\ \hdashline
 & +1X^4 & -\frac{4}{5}X^3 & +2X^2 & +0X & +3 & & & & \\
 & +1X^4 & +0X^3 & -\frac{1}{5}X^2 & +1X & & & & & \\ \cline{2-5}
 & == & -\frac{4}{5}X^3 & +\frac{11}{5}X^2 & -1X & +3 & & & &
\end{array}$$

Quello che rimane nell'ultima riga è un nuovo polinomio (evidenziato in blu) con un grado 3 che è uguale al grado di D; continuiamo dunque ad iterare il procedimendo fino a quando non rimane un polinomio con un grado strettamente minore del divisore D.

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
-4X^5 & +1X^4 & +0X^3 & -2X^2 & +0X & +3 & -5X^3 & +0X^2 & +1X & -5 \\
\cline{7-10}
-4X^5 & +0X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & -4X^2 & & & +\frac{4}{5}X^2 & -\frac{1}{5}X & +\frac{4}{25} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & \\
& +1X^4 & -\frac{4}{5}X^3 & +2X^2 & +0X & +3 & & & & \\
& +1X^4 & +0X^3 & -\frac{1}{5}X^2 & +1X & & & & & \\
& \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
& & -\frac{4}{5}X^3 & +\frac{11}{5}X^2 & -1X & +3 & & & & \\
& & -\frac{4}{5}X^3 & +0X^2 & +\frac{4}{25}X & -\frac{4}{5} & & & & \\
\cline{3-6}
& & == & +\frac{11}{5}X^2 & -\frac{29}{25}X & +\frac{19}{5} & & & &
\end{array}
$$

Avendo ottenuto un resto con grado 2 (strettamente minore del grado 3 del divisore) ci possiamo fermare. Otteniamo un quoziente

$$Q(X) = \frac{4}{25} - \frac{1}{5}X + \frac{4}{25}X^2$$

e un resto

$$R(X) = \frac{19}{5} - \frac{29}{25}X + \frac{11}{5}X^2.$$

Esempio 9.7. Dividendo $6X^4 - X + 4$ per $2X^2 - X + 1$ si ottiene come quoziente $D(X) = 3X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{3}{4}$ e come resto $R(X) = -\frac{13}{4}X + \frac{19}{4}$ e quindi

$$\frac{6X^4 - X + 4}{2X^2 - X + 1} = 3X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{3}{4} - \frac{13X - 19}{4(2X^2 - X + 1)}$$

9.2. **Zeri e fattorizzazione di polinomi in campo complesso.**

Definizione 9.8. *Sia $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}[X]$ un polinomio non nullo. Un numero complesso $z_\star \in \mathbb{C}$ si dice che è uno* zero, *o una* radice, *di P quando $P(z_\star) = 0$.*

Ad esempio, se $P(X) = X^6 + (2 - \mathrm{i})X - 2\mathrm{i}$ abbiamo che $z_\star = \mathrm{i}$ è uno zero di P in quanto

$$P(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^6 + (2 - \mathrm{i})\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = -1 + 2\mathrm{i} + 1 - 2\mathrm{i} = 0,$$

mentre $z_\star = -2$ non è uno zero di P in quanto

$$P(-2) = (-2)^6 + (2 - \mathrm{i})(-2) - 2\mathrm{i} = 64 - 4 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = 60 \neq 0.$$

Proposizione 9.9. *Sia $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}[X]$ un polinomio non nullo e $z_\star \in \mathbb{C}$. Allora*

$$P(z_\star) = 0 \iff P \text{ è divisibile per il polinomio } (X - z_\star).$$

Dimostrazione. Sia $Q(X)$ il quoziente della divisione di $P(X)$ per $X - z_\star$. Siccome $X - z_\star$ è un polinomio di primo grado, allora $\deg(R) = 0$ oppure $R = 0$; ciò significa che ad esso corrisponde una funzione $R(z) = r$ costante, dove r è un numero complesso. Abbiamo quindi che

$$P(X) = Q(X)(X - z_\star) + r.$$

da cui

$$P(z_\star) = Q(z_\star)(z_\star - z_\star) + r = Q(z_\star) \cdot 0 + r = r.$$

Ne segue che $z_\star$ è uno zero di P se e solo se il resto r è nullo, ovvero se e solo se P è divisibile per $X - z_\star$. □

Definizione 9.10. *Sia $z_\star \in \mathbb{C}$ uno zero del polinomio non nullo $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}[X]$. Si definisce* molteplicità *di $z_\star$ come zero di P il massimo intero m per il quale si ha che $P(X)$ sia divisibile per $(X - z_\star)^m$. Quando la molteplicità è uguale a 1 si dice che lo zero è* semplice.

9.3. **Teorema fondamentale dell'algebra.** Mentre in campo reale non tutti i polinomi possiedono degli zeri, si pensi ad esempio a x^2+1, in campo complesso abbiamo che ogni polinomio di grado positivo possiede sempre abbastanza zeri per poterlo fattorizzare fino ai minimi termini.

Teorema 9.11 (**Teorema fondamentale dell'algebra).** *Ogni polinomio $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}[X]$ di grado positivo, ossia tale che* $\deg(P) > 0$*, possiede almeno uno zero.*

Applicando ripetutamente il Teorema 9.11 insieme alla Proposizione 9.9 si dimostra la possibilità in $\mathbb{C}$ di una completa fattorizzazione dei polinomi

Teorema 9.12. *Sia $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio di grado $k \geq 1$ e coefficiente direttorio $c_k \neq 0$. Allora esistono d zeri distinti $z_1, z_2, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ del polinomio P con molteplicità, rispettivamente, $m_1, m_2, \dots, m_d$, per i quali*

$$k = \sum_{h=1}^{d} m_k = m_1 + m_2 + \dots + m_d,$$

e vale la fattorizzazione

$$P(X) = c_d \prod_{h=1}^{d} (X - z_h)^{m_h} = c_d (X - z_1)^{m_1} (X - z_2)^{m_2} \dots (X - z_d)^{m_d}. \tag{28}$$

Esempio 9.13. Fattorizziamo il polinomio $P(X) := X^3 - \mathrm{i}X^2 + X - \mathrm{i}$. Possiamo operare un raccoglimento parziale raccogliendo prima un fattore X^2 dai primi due addendi,

$$P(X) = X^2(X - \mathrm{i}) + (X - \mathrm{i}) = (X^2 + 1)(X - \mathrm{i}).$$

Siccome in campo complesso $-1 = \mathrm{i}^2$, possiamo vedere il polinomio $X^2 + 1$ come una differenza di quadrati

$$X^2 + 1 = X^2 - (-1) = X^2 - \mathrm{i}^2 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i}).$$

Otteniamo la fattorizzazione

$$P(X) = (X - \mathrm{i})^2 (X + \mathrm{i}).$$

Lo zero i ha molteplicità 2, mentre lo zero $-\mathrm{i}$ ha molteplicità 1.

9.4. **Fattorizzazione di polinomi in campo reale.** Ogni polinomio a coefficienti reali può essere riguardato come un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$. Dunque è anch'esso fattorizzabile come prodotto di polinomi di primo grado della forma $(X - z_\star)$ dove $z_\star$ è uno zero di P in $\mathbb{C}$. Quando P ha coefficienti reali gli zeri non reali di P formano sempre delle coppie di numeri coniugati.

Lemma 9.14. *Sia $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}[X]$ un polinomio a coefficienti reali di grado positivo. Se $z_\star \in \mathbb{C}$ è uno zero di P allora anche il suo coniugato $\overline{z_\star}$ è uno zero di P.*

Dimostrazione. Sia $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ con $d \in \mathbb{N}$ e $a_k \in \mathbb{R}$. Allora

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{d} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, \overline{z}^k, = \sum_{k=0}^{d} a_k \overline{z}^k = P(\overline{z}).$$

Ne segue che se $P(z_\star) = 0$ allora $P(\overline{z_\star}) = \overline{0} = 0$. □

Proposizione 9.15. *Sia $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}[X]$ un polinomio a coefficienti reali di grado positivo. Se $z_\star \in \mathbb{C}$, con* $\mathrm{Im} z \neq 0$*, è uno zero di P allora $P(X)$ è divisibile per il polinomio a coefficienti reali*

$$X^2 - 2\mathrm{Re}(z_\star) X + |z_\star|^2 \,. \tag{29}$$

Dimostrazione. Per il lemma 9.14 sia $z_\star$ che $\overline{z_\star}$ sono degli zeri di P. Dunque nella decomposizione in fattori di primo grado di P compaiono i fattori $X - z_\star$ e $X - \overline{z_\star}$. Ciò significa che possiamo scrivere P nella forma

$$P(X) = (X - z_\star)(X - \overline{z_\star})Q(X),$$

dove il il polinomio $Q(X)$ contiene i fattori relativi ad eventuali altri zeri di P. Per concludere basta osservare che

$$(X - z_\star)(X - \overline{z_\star}) = X^2 - (z_\star + \overline{z_\star})X + z_\star\overline{z_\star} = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_\star)X + |z_\star|^2 .$$

$\square$

Come corollario della proposizione precedente e del Teorema 9.12 otteniamo che

Teorema 9.16. *Sia $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}[X]$ di grado $d \geq 1$ e coefficiente direttorio $c_d \neq 0$. Supponiamo che P abbia ℓ zeri reali distinti e n coppie di zeri complessi coniugati distinti. Indichiamo con r_j, per $j = 1, 2, \ldots, \ell$, gli zeri reali ciascuno con la sua molteplicità μ_j, e con $(z_k, \overline{z_k})$ le coppie di zeri complessi con $\mathrm{Im} z_k \neq 0$, per $k = 1, 2, \ldots, n$, ciascuno di molteplicità m_k. Allora*

$$d = \deg(P) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j + 2\sum_{k=1}^{n} m_k,$$

e in $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}[X]$ vale la fattorizzazione

$$P(X) = c_d \prod_{j=1}^{\ell} (X - r_j)^{\mu_j} \cdot \prod_{k=1}^{n} (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_k)X + |z_k|^2)^{m_k}, \tag{30}$$

dove il numero reale c_d indica il coefficiente direttore di P.

Esempio 9.17.

$$X^4 + 1 = 0$$

se e solo se

$$X \in \{e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}, -e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}, e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}, -e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\}$$

con le radici tutte di modulo 1 e tali che

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}) \textit{ sono complesse e coniugate}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) \textit{ sono complesse e coniugate.}$$

Quindi

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= (X - e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})(X + e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})(X + e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})(X - e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}) \\ &= (X^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1)(X^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

10. Esercizi

10.1. Modulo, argomento, rappresentazione cartesiana ed esponenziale.

Esercizio 10.1. *Calcola modulo e argomento principale dei seguenti numeri complessi:* $z = \pm\pi i$, $z = \pm i$, $z = \pm(i+1)$, $z = 1 \pm \mathrm{i}$, $z = \pm\pi$, $z = \pm 4$, $z = \pm 3i$ *e rappresentali in forma esponenziale.*

Esercizio 10.2. *Calcola modulo e argomento dei seguenti numeri e riscrivili in forma esponenziale:* $z_1 = -\mathrm{e}^2$, $z_2 = \mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$, $z_3 = -\pi\mathrm{i}$, $z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Esercizio 10.3. *Calcola modulo e argomento principale dei seguenti numeri complessi:*

$$z_1 = \pi, \qquad z_2 = -\frac{\pi}{2}\mathrm{i}, \qquad z_3 = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}, \qquad z_4 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i},$$

$$z_5 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, \qquad z_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_7 = \frac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_8 = \frac{\pi}{8} - \mathrm{i}\frac{\pi}{8}\sqrt{3}, \qquad .$$

Esercizio 10.4. *Scrivi prima in forma esponenziale e poi in forma cartesiana i numeri complessi che hanno modulo* r *e argomento* θ *nei seguenti casi e rappresentali nel piano complesso:*

$$r = 2,\ \theta = \frac{\pi}{6}, \qquad r = \sqrt{3},\ \theta = -\frac{2}{3}\pi, \qquad r = 1,\ \theta = 1,$$

$$r = \mathrm{e},\ \theta = -\pi, \qquad r = \frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad r = \pi,\ \theta = \mathrm{e}.$$

Esercizio 10.5. *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *le equazioni* $|z|^2 - 6z + 1 = 0$ *e* $|z|^2 - 6z + i = 0$

10.2. Potenze.

Esercizio 10.6. *Dopo aver rappresentato in forma esponenziale i seguenti numeri* $z = 2 - 2\mathrm{i}$ *e* $w = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, *calcolare* zw, z/w, z^6, w^3.

Esercizio 10.7. *Dopo aver rappresentato in forma esponenziale i seguenti numeri* $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ *e* $w = \sqrt{6} - \sqrt{2}\mathrm{i}$. *calcola le loro potenze* z^2, z^3, w^3, w^5 *e i prodotti* $z^3 w^5$, $\frac{z^2}{w^3}$.

Esercizio 10.8. *Determina per quali* $z \in \mathbb{C}$ *sono soddisfatte ciascuna delle seguenti equazioni:*

$$\mathrm{Re}(z^2) = \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2,$$
$$\mathrm{Im}(z^2) = \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2,$$
$$\overline{z^2} = \overline{z}^2,$$
$$\left|z^2\right| = |z|^2,$$
$$\mathrm{Arg}(z^2) = \big(\mathrm{Arg}(z)\big)^2.$$

Esercizio 10.9. *Determinare il minimo* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $w^n = 1$ *dove* $w = -(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i})$

10.3. Radici.

Esercizio 10.10. *Si calcolino in campo complesso*

- *le radici quadrate di* 4, $4\mathrm{i}$, $-4\mathrm{i}$, -4;
- *le radici quadrate di* $2(1+\mathrm{i})$, $2(1-\mathrm{i})$, $-2(1+\mathrm{i})$, $2(1-\mathrm{i})$;
- *le radici cubiche di* 8, $8\mathrm{i}$, $-8\mathrm{i}$, -8;
- *le radici quarte di* 16, $16\mathrm{i}$, $-16\mathrm{i}$, -16;

Esercizio 10.11. *Calcola le seguenti radici n-esime dei seguenti numeri complessi:*

- *radici quadrate di* $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$;
- *radici cubiche di* $-8\mathrm{i}$;

- *radici quarte di* $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;
- *radici quarte di* $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$;
- *radici quinte di* $2+5\mathrm{i}$;
- *radici seste di* 64;
- *radici ottave di* $-\frac{1}{16}$.

Esercizio 10.12. *Si calcolino esplicitamente le radici dell'unità (ossia le radici di* 1*) per* $n = 2,3,4,6$ *e si verificare che*

- *se* $n=2$*, le due radici quadrate dell'unità sono:* 1 *e* -1.
- *Se* $n=3$*, le tre radici cubiche dell'unità sono:* $1, -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- *se* $n=4$*, le quattro radici quarte dell'unità sono:* $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$.
- *se* $n=6$*, l le sei radici seste dell'unità sono:* $1, \frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esercizio 10.13. *Determina tutte le radici terze del numero complesso* $z = (i+\mathrm{i})^6 - 8\sqrt{3}$

Esercizio 10.14. *Determina tutte le radici terze dei numeri complessi* $\frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6}{(1-\mathrm{i})^3}$ *e* $\frac{(1+\mathrm{i})^{30}}{(1-\mathrm{i})^{20}}$.

Esercizio 10.15. *Calcolare le radici quarte del numero* $w = (2-3\mathrm{i})^8$.

Esercizio 10.16. *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *le equazioni*

$$z^2 + \mathrm{i}z + i\sqrt{3}4 = 0$$
$$z^4 + 6z^2 - 5 = 0$$

Esercizio 10.17. *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *le equazioni*

$$z^2 + \mathrm{i}|z| + \sqrt{2} = 0$$
$$z^4 = (-4 + 4\sqrt{3}|z|)$$
$$\overline{z}^4 - 4z^2 = 0$$

(suggerimento: si scriva z *in notazione esponenziale).*

Esercizio 10.18. *Sia* $w := \sqrt{3}+\mathrm{i}$*. Determina parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento di ogni numero complesso* z *che risolve l'equazione*

$$z^3 + \mathrm{e}^{\pi/w} = 0.$$

Esercizio 10.19. *Determina tutte le soluzioni nel piano complesso delle seguenti equazioni:*

$$z^3 + \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{12} = 0;$$
$$z^4 = 2(1+3\mathrm{i})z^2 + 10 - \mathrm{i}(6-2\sqrt{3});$$
$$z^5 + \mathrm{i}z^2 = 0;$$
$$z^6 + 4\mathrm{i}z^3 - 4 = 0;$$
$$z^6 + 7\mathrm{i}z^3 + 8 = 0;$$
$$z^6 + (8-8\mathrm{i})z^3 - 64\mathrm{i} = 0;$$
$$z^8 + (1-\mathrm{i})z^4 - \mathrm{i} = 0.$$

Esercizio 10.20. *Determina per quali valori del parametro* $c \in \mathbb{R}$ *l'insieme delle soluzioni nel piano complesso dell'equazione*

$$\left(z^4+4\right)\left(z^3+c^3\mathrm{i}\right) = 0$$

possiede 4 *punti distinti che hanno la stessa parte immaginaria* (ovvero che stanno sulla stessa retta orizzontale nel piano complesso).

10.4. **Esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche in campo complesso.**

Esercizio 10.21. *Calcola modulo, argomento, parte reale e parte immaginaria dei seguenti esponenziali e poi rappresenta la loro posizione nel piano complesso:*

$$\mathrm{e}^{2-3\mathrm{i}}, \qquad \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \qquad \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \qquad \mathrm{e}^{\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}.$$

Esercizio 10.22. *Calcola tutti i possibili logaritmi dei seguenti numeri, e tra essi determina quale è quello principale:*

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}, \qquad 8\mathrm{i}, \qquad -\mathrm{e}^{3-4\mathrm{i}}, \qquad \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}.$$

Esercizio 10.23. *Determina tutte le soluzioni nel piano complesso per ciascuna delle seguenti equazioni:*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z+\overline{z}} = 1; \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\overline{z}}; \qquad \mathrm{e}^{3z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z};$$

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{1/z}; \qquad \mathrm{e}^{\pi/z} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\pi/5}; \qquad \mathrm{e}^{\pi/z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi z}};$$

$$\mathrm{e}^{-z^2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2}; \qquad \mathrm{e}^{(z^4)} + \mathrm{i} = 0; \qquad 2\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{z^2} = 0;$$

$$\mathrm{e}^{2z} + 3\mathrm{e}^{z} + 2 = 0; \qquad \mathrm{e}^{z} + 2\mathrm{e}^{-z} + 3 = 0; \qquad \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{z})} = \mathrm{i}.$$

Esercizio 10.24. *Tra tutte le infinite soluzioni dell'equazione*

$$\mathrm{e}^{z-\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z-\pi},$$

determina e rappresenta graficamente nel piano complesso quelle con modulo minore di 3π.

Esercizio 10.25. *Determina* quante *soluzioni dell'equazione*

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{2\pi}$$

sono contenute nel disco di raggio 2π centrato nell'origine del piano complesso.

Esercizio 10.26. *Considera l'equazione in campo complesso*

$$\mathrm{e}^{(z^2)} = \mathrm{i}.$$

In quali quadranti del piano complesso si trovano le sue soluzioni?

Esercizio 10.27. *Determina tutte le soluzioni nel piano complesso per ciascuna delle seguenti equazioni:*

$$\cos z = 2; \qquad \sin z = \mathrm{i};$$

$$\cos z = \sin z; \qquad |\cos z| = |\sin z|;$$

$$\cos(z) + \sin(z) = 1 + \mathrm{i}; \qquad \cos(z)\sin(z) = \sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$\sin(1/z) = 2; \qquad \sin(z^2) = 2.$$

10.5. **Polinomi.**

Esercizio 10.28. *Calcola quoziente e resto per le seguenti coppie di dividendi e divisori:*

(1) $P(X) = X^5 + 32, \quad D(X) = X + 2$;
(2) $P(X) = -4X^3 + 10X^2 - 10X + 3, \quad D(X) = 2X^2 - 4X + 3$;
(3) $P(X) = X^3 - 4\mathrm{i}X^2 - 5X + 2\mathrm{i}, \quad D(X) = X - \mathrm{i}$;
(4) $P(X) = X^6 - (1+\mathrm{i})X^3 + (2-3\mathrm{i}), \quad D(X) = \mathrm{i}X^2 - 2 + 3\mathrm{i}$;
(5) $P(X) = X^5 + \mathrm{i}, \quad D(X) = X + \mathrm{i}$;
(6) $P(X) = X^8 + 2X^3, \quad D(X) = X^4 + \mathrm{i}X$.

Esercizio 10.29. *Dato il polinomio* $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3 = 0$ *dimostrare che* $z = \mathrm{i}$ *è uno zero di* P*. Calcolare gli altri zeri di* P *e fattorizza* P *in* $\mathbb{C}$ *e in* $\mathbb{R}$*.*

Esercizio 10.30. *Calcolare le soluzioni complesse di* $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8\mathrm{i}$.

Esercizio 10.31. *Fattorizza i seguenti polinomi:*
(1) $X^4 - X^3 + X^2 - X$;
(2) $X^4 + \mathrm{i}X^3 - X^2 - \mathrm{i}X$;
(3) $X^6 + 8$;
(4) $X^6 + 8\mathrm{i}$;
(5) $X^6 + 2\mathrm{i}X^3 - 1$.

Esercizio 10.32. *Fattorizza il polinomio*

$$X^3 + (1 + 2\mathrm{i})X^2 + \big(-2 + (2 - \sqrt{3})\mathrm{i}\big)X - 2 - \sqrt{3}\mathrm{i}$$

dopo aver verificato che ha uno zero in -1.

Esercizio 10.33. *Determina un polinomio di grado* 5 *che abbia* $z = 2 - \mathrm{i}$ *come zero di molteplicità* 3 *e* $z = -1 + \mathrm{i}$ *come zero di molteplicità* 2.

Esercizio 10.34. *Determina la fattorizzazione in fattori irriducibili reali dei seguenti polinomi:*
- $X^8 - 16$;
- $X^8 + 16$;
- $X^4 + X^2 + 1$;
- $X^4 - 4X^3 + X - 4$.

Esercizio 10.35. *Determina tutte le radici del polinomio*

$$P(z) := 8 + \mathrm{i}z^6$$

in campo complesso ($z \in \mathbb{C}$) *e quindi fattorizza* P *come prodotto di polinomi di primo grado (a coefficienti complessi).*

Esercizio 10.36. *Considera il polinomio*

$$P(z) := (z^3 - 1)^2 + 1.$$

- *Trova tutte le soluzioni dell'equazione* $P(z) = 0$ *in campo complesso.*
- *Fattorizza* $P(z)$ *come prodotto di polinomi di primo grado a coefficienti complessi.*
- *Raggruppando a due a due i fattori corrispondenti a coppie di radici complesse coniugate, scrivi* $P(z)$ *come prodotto di tre polinomi di secondo grado a coefficienti reali.*

Esercizio 10.37. *Fattorizza in fattori irriducibili reali il polinomio*

$$X^4 + X^3 + 5X^2 + 4X + 4$$

dopo aver verificato che $z = 2\mathrm{i}$ *è un suo zero.*

Esercizio 10.38. *Disegna nel piano complesso i seguenti quattro numeri:*

$$z_1 := \pi + 2\mathrm{i}, \qquad z_2 := \frac{1}{\pi + 2\mathrm{i}}, \qquad z_3 := 2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}, \qquad z_4 := \pi\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}.$$

Costruisci poi un polinomio a coefficienti ***reali*** *che abbia tra le sue radici questi quattro numeri.*