EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
PER IL CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

FRANCESCA PRINARI

Contents

1. Introduzione

Un'equazione differenziale ordinaria di ordine k è una relazione del tipo

$$f(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(k)}(t)) = 0 \tag{1.1}$$

che lega una funzione $y : I \to \mathbb{R}$ (dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$) ad alcune delle sue derivate tramite la funzione f. Nella definizione (1.2), $f : B \to \mathbb{R}$, B è un aperto di $\mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R}}_{k+1\ volte}$.

- Si definisce **ordine** dell'equazione il grado massimo di ordine di derivazione con cui compare la funzione y. Nel caso di (1.2) l'ordine è k;
- l'equazione (1.2) si dice **ordinaria** perché la funzione incognita y è una funzione della sola variabile reale t;
- l'equazione (1.2) si dice in **forma normale** se si presenta nella forma
$$y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(k-1)}(t)).$$
dove $f : A \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \mathbb{R}}_{k\ volte}$.

Per semplicità, a volte ometteremo la dipendenza di y e delle sue derivate da t e scriveremo

$$y^{(k)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(k-1)}).$$

Nel caso particolare in cui $k = 1$ l'equazione sopra diventa

$$y'(t) = f(t, y(t)). \tag{1.2}$$

Risolvere l'equazione differenziale (1.2) significa **trovare una funzione y definita su un intervallo I non banale, a valori in $\mathbb{R}$** tale che

(1) $y : I \to \mathbb{R}$ sia derivabile;

(2) il grafico di y (dato da $graf\, y := \{(t, y(t)) : \ t \in I\}$) sia contenuto in A;
(3) per ogni $t \in I$ la tangente al grafico di y nel punto $(t, y(t))$ abbia coefficiente angolare $y'(t) = f(t, y(t))$.

In generale l'intervallo I si intende aperto. Eventualmente I può essere preso chiuso, pur di considerare la derivata destra y'_+ o sinistra y'_- al posto di y' sul bordo di I.

Definizione 1.1 (Problema di Cauchy per equazioni differenziali del primo ordine in forma normale). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, $(t_0, y_0) \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Diremo che una funzione derivabile $\bar{y} : I \to \mathbb{R}$ è soluzione del* **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

se I è un intervallo contenente t_0 e

$$\begin{cases} \bar{y}(t_0) = y_0 \\ \\ (t, \bar{y}(t)) \in A \quad \forall t \in I \\ \\ \bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)) \quad \forall\, t \in I. \end{cases}$$

Esempio 1.2 (di non esistenza). Osserviamo che senza continuità la soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine potrebbe non esistere. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(y) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove

$$f(y) := \begin{cases} 1 & \text{se } y \leq 0 \\ 0 & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

Tale problema non ammette soluzione. Infatti, se per assurdo esistesse una soluzione y definita su $(-a, a)$, allora y dovrebbe essere monotona non decrescente in quanto $y' \geq 0$. In particolare $y(t) \geq y(0) = 0$ su $(0, a)$.
Se $\exists\, t_0 > 0$ dove $y(t_0) = 0$, allora $y \equiv 0$ su $(0, t_0)$ e quindi $y' = 0$ su $(0, t_0)$. In particolare $0 = y'(t) = f(y(t)) = f(0) = 1$ su $(0, t_0)$. Assurdo.
Se invece $y(t) > 0$ per ogni $t \in (0, a)$ allora $y'(t) = f(y(t)) = 0$ su $(0, a)$ da cui $y = 0$ su $(0, a)$. Assurdo.

Sotto l'ipotesi che f sia continua si dimostra invece il seguente risultato di esistenza, noto come Teorema di Peano (senza dimostrazione):

Teorema 1.3 (Esistenza). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f \in C(A)$. Sia $(t_0, Y_0) \in A$ e siano $a, b > 0$ tali che posti $I := (t_0 - a, t_0 + a)$ e $J := (y_0 - b, y_0 + b)$ si abbia che $K = \bar{I} \times \bar{J} \subset A$. Allora posto $M := \max_K f(t, y)$, $\delta := \min\{a, \frac{b}{M}\}$ e $I_\delta(t_0) := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, esiste $y \in C^1(I_\delta(t_0))$ che risolve il problema*(1.3).

Allo scopo di parlare di unicità della soluzione, ricordiamo la seguente definizione.

Definizione 1.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diremo che*

- *f è lipschitziana rispetto a y, uniformemente rispetto a t, su A (e scriveremo $f \in Lip_y(A)$) se esiste $L \geq 0$ tale che*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L||y_1 - y_2|| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in A.$$

- *f è localmente lipschitziana rispetto a y, uniformemente rispetto a t, (e scriveremo $f \in Lip_{loc,y}(A)$) se $f \in Lip_y(R)$ per ogni rettangolo $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq A$.*

Osservazione 1.5. (1) Se $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile allora

$$g \text{ é lipschitziana su } (a,b) \iff g' \text{ è limitata su } (a,b).$$

Infatti se g è lipschitziana con costante $L \geq 0$ allora

$$|g'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left|g(t_0 + h) - g(t_0)\right|}{|h|} \leq L$$

per ogni $t_0 \in (a, b)$, ossia g' è limitata. Viceversa, sia $L = \sup_{t\in(a,b)} g'(y)| < \infty$. Allora fissati $t, s \in (a, b)$, per il Teorema di Lagrange, esiste ξ nell'intervallo di estremi t e s tale che

$$|g(t) - g(s)| = |g'(\xi)||t - s| \leq L|t - s|.$$

(2) con una dimostrazione analoga, si prova che se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto e $f \in C^1(A)$ (da cui segue che $\frac{\partial f}{\partial y}$ è limitata su tutti i rettangoli) allora $f \in Lip_{loc,y}(A)$.

Lemma 1.6 (**di Gronwall**)**.** *Sia $K \in \mathbb{R}$, sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $t_0 \in I$. Se*

$$u'(t) \leq Ku \quad \forall t \geq t_0$$

allora,

$$u(t) \leq u(t_0)e^{K(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

Analogamente, se

$$u'(t) \geq Ku \quad \forall t \leq t_0$$

allora

$$u(t) \leq u(t_0)e^{K(t-t_0)} \quad \forall t \leq t_0.$$

Dimostrazione. Derivando la funzione $U(t) = u(t)e^{-K(t-t_0)}$ otteniamo

$$U'(t) = -uKe^{-K(t-t_0)} + u'e^{-K(t-t_0)} = ue^{-K(t-t_0)}(u' - Ku). \tag{1.4}$$

Nel primo caso abbiamo che la funzione U è monotona decrescente su $t \geq t_0$ e quindi

$$u(t)e^{-K(t-t_0)} \leq u(t_0) \quad \forall t \geq t_0$$

ossia

$$u(t) \leq e^{K(t-t_0)}u(t_0) \quad \forall t \geq t_0.$$

Nel secondo caso U è monotona crescente su $t \leq t_0$ e quindi

$$u(t)e^{-K(t-t_0)} \leq u(t_0) \quad \forall t \leq t_0$$

ossia

$$u(t) \leq u(t_0)e^{-K(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0.$$

□

Teorema 1.7 (**Unicità nel caso Lipschitziano**)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ sia $f \in Lip_y(A)$. Allora due soluzioni di $y' = f(t, y)$ con lo stesso dato iniziale coincidono nell'intersezione I dei loro intervalli di definizione.*

Dimostrazione. Se $u(t)$ e $v(t)$ sono due soluzioni con $u(t_0) = v(t_0)$ allora poniamo $y(t) = (u(t) - v(t))^2$ e proviamo che $y(t) \le 0$ per ogni $t \in I$. Questo implicherà che $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in I$.

Vale che

$$y' = 2(u - v)(u' - v') = 2(u - v)(f(t, u) - f(t, v))$$

da cui

$$y' \le 2L(u - v)^2 = 2Ly \qquad \text{e } y' \ge -2L(u - v)^2 = -2Ly.$$

Applicando il lemma di Gronwall ad y prima con $K = 2L$ e $y(t_0) = 0$ segue che $y(t) \le 0$ per ogni $t \ge t_0$. Poi applicando il lemma di Gronwall ad y con $K = -2L$ e $y(t_0) = 0$ segue che $y(t) \le 0$ per ogni $t \le t_0$, $t \in I$. □

Il risultato precedente si può dimostrare anche sotto l'ipotesi che $f \in Lip_{loc,y}(A)$. Lo enunciamo senza dimostrarlo.

Corollario 1.8. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f \in Lip_{loc,y}(A)$. Siano y_1, y_2 soluzioni dell'equazione $y' = f(t, y)$. Se esiste $\bar{t}$ tale che $y_1(\bar{t}) = y_2(\bar{t})$, allora $y_2 = y_1$ sull'intersezione I dei loro intervalli di definizione.*

Esempio 1.9. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 3\sqrt[3]{y^2} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Ovviamente $y = 0$ è soluzione di questa equazione, ma non è l'unica. Infatti anche la funzione $y(t) = t^3$ è soluzione: infatti $y' = 3t^2 = 3\sqrt[3]{y^2}$ è soluzione del problema di Cauchy (1.5). Si noti che la funzione $h(y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ non è lipschitziana sugli intervalli che contengono lo 0 in quanto $|h'(t)| \to +\infty$ per $t \to 0$ (ossia h' è illimitata sugli intervalli del tipo $(0, a)$ e $(b, 0)$). In particolare la funzione $f(t, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ non è lipschitziana rispetto la variabile y nei rettangoli $R = I \times J$ con $0 \in J$.

2. **Equazioni differenziali lineari del primo ordine**

Sono equazioni della forma

$$y'(t) = a(t)y + b(t) \tag{2.1}$$

dove a, b sono assegnate funzioni continue definite su uno stesso intervallo I. Allora $A = I \times \mathbb{R}$ e la funzione $f(t, y) = a(t)y + b(t)$ è tale che $f \in Lip_{y,loc}(A)$.

Tale equazione è del primo ordine ed è **lineare** perché y e y' sono legate da una relazione di tipo lineare. Esattamente se chiamiamo T l'operatore $T(u) = u' - a(x)u$ vale che

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v).$$

Grazie alla linearità dell'operatore T, se $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ sono soluzioni dell'equazione **completa** (2.1) allora $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ è una soluzione dell'equazione **omogenea**

$$y' - a(t)y = 0 \tag{2.2}$$

e viceversa: se $\bar{y}$ è soluzione di (2.1) e y_0 è una soluzione dell'equazione omogenea allora $y + y_0$ è soluzione dell'equazione completa. In sintesi possiamo dire che se $\bar{y}$ è una soluzione particolare dell'equazione completa allora la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione completa coincide con l'insieme $Ker(T) + \bar{y}$.

(1) Studio dell'equazione omogenea: $\boxed{y' = a(t)y.}$

Sia A una primitiva di a (ossia $A' = a$) . Allora y risolve l'equazione omogenea (2.2) se e solo se

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-A(t)}) = y'(t)e^{-A(t)} - y(t)a(t)e^{-A(t)} = 0$$

da cui segue (essendo I un intervallo) che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$y(t)e^{-A(t)} = c.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione (2.2) sono

- tutte della forma $y(t) = ce^{A(t)}$;
- sono definite su tutto I;
- se $c_1 \neq c_2$ allora $y_{c_1}(t) \neq y_{c_2}(t)$ per ogni $t \in I$.

(2) Studio dell'equazione completa: al fine di risolvere (2.1) osserviamo che se moltiplichiamo per il **fattore integrante** $e^{-A(t)}$ otteniamo

$$y'(t)e^{-A(t)} - a(t)ye^{A(t)} = b(t)e^{-A(t)}$$

ossia

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-A(t)}) = b(t)e^{-A(t)}$$

da cui segue che una soluzione particolare dell'equazione completa è data da

$$\bar{y}(t)e^{-A(t)} = \int b(t)e^{-A(t)}dt$$

ossia

$$\bar{y}(t) = e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)}dt.$$

Al variare di c, le funzioni

$$y_c(t) = ce^{A(t)} + \bar{y} = ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)}dt$$

ossia le funzioni

$$y_c(t) = e^{A(t)}(c + \int b(t)e^{-A(t)}),$$

sono tutte e sole le soluzioni della equazione completa.
In sintesi, la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione completa si può scrivere in modo compatto come

$$\boxed{y_C(t) = e^{A(t)}(C(t) + c)}$$

dove

$$\boxed{A(t) = \textstyle\int a(t)dt,\ C(t) = \int b(t)e^{-A(t)}dt.}$$

Se consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

scegliendo

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$

si ottiene che $A(t_0) = 0$ e

$$y(t) = e^{A(t)}\Big(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds + y_0\Big).$$

soddisfa il problema di Cauchy sopra. Essendo la funzione $f(t, y) = a(t)y + b(t)$ tale che $f \in Lip_{y,loc}(A)$, per la Proposizione 1.7 vale che tale y è l'unica soluzione del problema di Cauchy. Inoltre si noti che essa è definita su tutto I.

2.1. Esempi.

Esempio 2.1. (1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (3 + \frac{1}{x})y = \dfrac{1}{x(e^{2x} - 6e^{x} + 25)} \\ \\ y(1) = \frac{1}{e^3} \end{cases}$$

e determinare il dominio della sua soluzione.

Osserviamo prima di tutto che l'equazione differenziale è definita per $x \neq 0$ e dal momento che il punto iniziale del problema di Cauchy è $x = 1$, ci restringiamo a studiare il problema di Cauchy per $x > 0$. Ora

$$A(x) = -\int (3 + \frac{1}{x})dx = -(3x + \log x)$$

e quindi

$$\begin{aligned} C(x) = \int e^{3(x+\log x)} \frac{1}{x(e^{2x} - 6e^{x} + 25)}dx &= \int e^{3x} \cdot e^{\log x} \frac{1}{x(e^{2x} - 6e^{x} + 25)}dx \\ = \int \frac{e^{3x} \cdot x}{x(e^{2x} - 6e^{x} + 25)}dx &= \int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 6e^{x} + 25}dx \end{aligned}$$

Tramite la sostituzione $e^x = t$ si ottiene $dx = \frac{dt}{t}$ e l'integrale diventa

$$\int \frac{t^3}{t^2 - 6t + 25}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{t^2 - 6t + 25}dt.$$

Dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene

$$\begin{aligned} \int 1 + \frac{6t - 25}{t^2 - 6t + 25}dt &= t + 3\int \frac{2t - 6}{t^2 - 6t + 25}dt - 7\int \frac{1}{t^2 - 6t + 25}dt \\ &= t + 3\log(t^2 - 6t + 25) - \frac{14}{8}\arctan\frac{2t - 6}{8} \\ &= e^x + 3\log(e^{2x} - 6e^x + 25) - \frac{14}{8}\arctan\frac{2e^x - 6}{8}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(c + e^x + 3\log(e^{2x} - 6e^x + 25) - \frac{14}{8}\arctan\frac{2e^x - 6}{8}\right) \cdot e^{-3(x+\log x)} \\ &= (c + e^x + 3\log(e^{2x} - 6e^x + 25) - \frac{14}{8}\arctan\frac{2e^x - 6}{8}) \cdot \frac{1}{e^{3x}x} \end{aligned}$$

Ponendo $y(1) = e^{-3}$ otteniamo

$$e^{-3} = y(1) = (c + e + 3\log(e^2 - 6e + 25) - \frac{14}{8}\arctan\frac{2e - 6}{8}) \cdot \frac{1}{e^3}$$

ossia $c = -e - 3\log(e^2 - 6e + 25) + \frac{14}{8}\arctan\frac{2e-6}{8} + 1$. Il dominio massimale dove essa è soluzione del problema di Cauchy è $x > 0$.

(2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{2y}{x^2-4x} = \sqrt{x-4} \\ y(5) = 0 \end{cases}$$

e determinare il dominio della sua soluzione.

Risoluzione. Dalla condizione iniziale $x \neq 0, 4$, si ha che cerchiamo l'esistenza di una soluzione per $x > 4$ (in modo che l'intervallo di esistenza della soluzione contenga il punto iniziale $x_0 = 5$). Ora

$$A(x) = -\int \frac{2}{x^2-4x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-4}dx = \frac{1}{2}\log|\frac{x}{x-4}|.$$

Poi

$$C(x) = \int \sqrt{x-4}e^{\log\left(\frac{x}{x-4}\right)^{-\frac{1}{2}}}dx = \int \sqrt{x-4}\sqrt{\frac{x-4}{x}}dx = \int \frac{x-4}{\sqrt{x}}dx$$

ossia

$$C(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{x}.$$

Quindi $y(x) = (C(x)+c)e^{A(x)} = (\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8\sqrt{x} + c)\sqrt{\frac{x}{x-4}}$ e imponendo la condizione iniziale si ha $0 = (\frac{10}{3}\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + c)\sqrt{\frac{5}{5-4}}$ ossia $c = \frac{14}{3}\sqrt{5}$. Quindi $y = (\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8\sqrt{x} + \frac{14}{3}\sqrt{5})\sqrt{\frac{x}{x-4}}$ il cui dominio come soluzione dell'equazione differenziale assegnata è $x > 4$.

(3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = -\frac{2z}{x} + \frac{2\log^2 x}{x} \\ \\ z(1) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione. Imponiamo $x > 0$ (dalla condizione di esistenza del log). Quindi

$$A(x) = -2\int \frac{1}{x}dx = -2\log x$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{2\log x}\frac{2\log^2 x}{x}dx = \int 2x\log^2 x dx = x^2\log^2 x - 2\int x\log x dx \\ &= x^2\log^2 x - x^2\log x + \int x dx = x^2\log^2 x - x^2\log x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Quindi

$$z(x) = \frac{1}{x^2}(x^2\log^2 x - x^2\log x + \frac{x^2}{2} + c) = \log^2 x - \log x + \frac{1}{2} + \frac{c}{x^2}$$

e imponendo la condizione iniziale si ottiene $0 = z(1) = \frac{1}{2} + c$ ossia $c = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 2.2. Risolvere i seguenti esercizi:

(1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$z' = \frac{z}{x-1} + \log(x-1) \qquad z(2) = -1$$

$(z = (\frac{1}{2}\log^2(x-1) - 1)(x-1).)$

(2) Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + \frac{x}{x+1}y = (x+1)^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

(3) Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} z' = (1 - \frac{2x}{x^2+1})z + e^{2x} \\ \\ z(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e determinare il dominio della sua soluzione.

2.2. **Equazione di Bernoulli.** È un'equazione differenziale della forma
$$u' = a(t)u + b(t)u^\alpha \tag{2.3}$$
dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e a, b sono funzioni continue su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Se $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ l'equazione diventa un'equazione lineare del primo ordine ed abbiamo esistenza ed unicità in piccolo ed in grande. Studiamo il caso $\alpha \neq 0, 1$.

Primo metodo di risoluzione. Supponiamo $u \neq 0$. Dividiamo per u^α. L'equazione (2.3) diventa
$$u^{-\alpha}u' = a(t)u^{1-\alpha} + b(t)$$
e ponendo $u^{1-\alpha} = y$ otteniamo $y' = (1-\alpha)u^{-\alpha}u'$. L'equazione diventa un'equazione lineare del primo ordine:
$$y' = (1-\alpha)a(t)y + b(t)(1-\alpha).$$
Dopo aver determinato y si trova u. Osserviamo che se $\alpha > 1$ è dispari, allora $\alpha - 1$ è pari e quindi la relazione
$$u^{1-\alpha} = y$$
($u^{\alpha-1} = \frac{1}{y}$) definisce due soluzioni $u = \pm(\frac{1}{y})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ definite dove $y > 0$. Si sceglierà quindi la soluzione in base al segno di u_0.

Secondo metodo di risoluzione. Risolvo prima l'equazione omogenea $u' = a(t)u$ che ha come soluzione $u(t) = ce^{A(t)}$ dove $A(t) = \int a(t)dt$ e poi cerco la soluzione u della forma $\bar{u}(t) = c(t)e^{A(t)}$ (come vedremo nel metodo di variazione della costante).

Esempio 2.3. Risolvere l'equazione
$$xy' + y = y^2 \log x.$$
Intanto imponiamo $x > 0$ per via del $\log x$ ed osserviamo che $y = 0$ é soluzione. Cerchiamo altre soluzioni $y \neq 0$. Dividendo quindi per x otteniamo
$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x}\log x.$$
Primo metodo di risoluzione. Dividendo per $y^2 (\neq 0)$ segue
$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}\log x.$$
Poniamo $z = \frac{1}{y}$ (da cui $z' = -\frac{y'}{y^2}$). Segue
$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x}\log x.$$

Quindi
$$A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| = \log x$$
(essendo $x > 0$) e
$$C(x) = \int -\frac{1}{x} \log x e^{-\log x} dx = -\int \frac{1}{x^2} \log x dx = \frac{1}{x} \log x - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \log x + \frac{1}{x}.$$
Quindi
$$z(x) = (c + \frac{1}{x} \log x + \frac{1}{x}) e^{\log x} = cx + 1 + \log x$$
da cui
$$y(x) = \frac{1}{cx + 1 + \log x}, \quad c \in \mathbb{R}$$
definita per $cx + 1 + \log x \neq 0$ (l'intervallo massimale di definizione per y dipendera' dal punto iniziale $y(x_0) = y_0$.

Secondo metodo di risoluzione. Risolvo l'equazione omogenea
$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$
Otteniamo
$$y_0(x) = ce^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{c}{x}.$$
Cerco quindi una soluzione dell'equazione di Bernoulli della forma $\bar{y}(x) = \frac{c(x)}{x}$. Quindi $\bar{y}'(x) = \frac{xc' - c}{x^2}$. Sostituendo nell'equazione di Bernoulli, otteniamo
$$x \frac{xc' - c}{x^2} + \frac{c}{x} = \frac{c^2}{x^2} \log x$$
da cui
$$c' = \frac{c^2}{x^2} \log x.$$
Quindi, **separando le variabili**, segue
$$\frac{c'}{c^2} = \frac{\log x}{x}^2.$$
Integrando da una parte e dall'altra rispetto a x otteniamo
$$-\frac{1}{c} = -\frac{1}{x} \log x - \frac{1}{x} + k$$
con $k \in \mathbb{R}$. Quindi $c(x) = \frac{x}{\log x + 1 + kx}$ e $\bar{y}(x) = \frac{1}{\log x + 1 + kx}$.

Terzo metodo di risoluzione. Osservo che
$$\frac{d}{dx} xy = y^2 \log x.$$
Pongo $z = xy$ da cui $y = \frac{z}{x}$ e quindi
$$z' = \frac{z^2}{x^2} \log x$$
ossia, **separando le variabili**,
$$\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} \log x$$

Quindi (procedendo come nel calcolo di c sopra) otteniamo $z(x) = \dfrac{x}{\log x + 1 + kx}$ e quindi

$$y = \frac{z}{x} = \frac{1}{\log x + 1 + kx}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.3. **Esercizi.**

(1) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy - xe^{2x^2}y^3, \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e calcolare il dominio della soluzione.

(2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{x}{x+1}y = (x+1)^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Dedurre la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' - \frac{x}{x+1}z = -(x+1)z^2 \\ \\ z(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e determinare il suo dominio.

(3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' - \frac{z}{2x} = (\log x)z^3 \\ \\ z(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

e determinare il dominio della sua soluzione.

($z = \frac{1}{\sqrt{x(\frac{1}{2} - \log x)}}$ il cui dominio è $0 < x < e^{1/2}$)

(4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' - \frac{z}{2x} = -\sqrt{x}z^3 \\ \\ z(1) = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

e determinare il dominio della sua soluzione.

($z = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{x}}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$)

(5) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' - \frac{z}{x} = -e^x z^3 \\ \\ z(1) = \frac{1}{\sqrt{2e+1}} \end{cases}$$

e determinare il dominio della sua soluzione.

(6) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' + \frac{z}{x} = -(\log x) z^2 \\ \\ z(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e determinare il dominio della sua soluzione.

(7) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' - \frac{x}{x+1} z = -(x+1)e^x z^2 \\ \\ z(0) = 4 \end{cases}$$

e determinare il dominio della sua soluzione.

3. **Equazioni a variabili separabili**

Siano I, J intervalli di $\mathbb{R}$, $(t_0, y_0) \in I \times J$ e siano $g : I \to \mathbb{R}$ e $h : J \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Osserviamo che

- se h è lipschitziana su J e g è limitata su I, allora $f \in C(I \times J) \cap Lip_y(I \times J) \cap C(I \times J)$. Quindi se I e J sono aperti, allora, grazie al Teorema 1.3 e 1.8, il problema (3.1) ha esattamente una sola soluzione in un intervallo del punto t_0.
- Se $h(y_0) = 0$ allora $y = y_0$ soddisfa l'equazione $y'(t) = g(t)h(y(t))$ su I e quindi è soluzione del problema (3.1) (ed è l'unica se $f \in Lip_y(I \times J)$).

Vogliamo ora trovare esplicitamente le soluzioni del problema (3.1) quando $h(y_0) \neq 0$. Se y soddisfa (3.1) su un intervallo contenente t_0, allora poichè $h \circ y(t_0) = h(y_0) \neq 0$, per il teorema della permanenza del segno esiste un intervallo aperto I contenente t_0 tale che $h \circ y \neq 0$ su I. Quindi per ogni $t \in I$ posso dividere l'equazione $y'(t) = g(t)h(y(t))$ per $h(y(t))$ e integrare tra t_0 e t. Otteniamo quindi

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds = \int_{t_0}^{t} g(s) ds$$

che diventa

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\xi}{h(\xi)} = \int_{t_0}^{t} g(s) ds$$

tramite il cambio di variabile $y(t) = \xi$ ossia

$$H(y(t)) = G(t)$$

dove

$$G(t) := \int_{t_0}^{t} g(s) ds, \quad H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{h(\xi)}$$

Allo scopo di trovare esplicitamente y, si cerca di verificare quando la funzione H é invertibile in modo da determinare y come

$$y(t) = H^{-1}(G(t)).$$

Osservazione 3.1. Per scrivere la soluzione generale dell'equazione $y' = g(t)h(y(t))$ si scrive $\dfrac{dy}{dt} = g(t)h(y(t))$, si separano variabili e differenziali ottenendo

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)dt,$$

si risolvono gli integrali indefiniti $\int \frac{dy}{h(y)}$ e $\int g(t)dt$ e si pone

$$\int \frac{dy}{h(y)}\Big|_{y=y(t)} = \int g(t)dt.$$

Esempio 3.2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Osserviamo che $f(t,y) = y - y^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$. In particolare f è lipschitiziana rispetto alla variabile y. Quindi, grazie ai teoremi di esistenza ed unicità, il problema di Cauchy ha una sola soluzione. Inoltre se $y_0 = 0$ o $y_0 = 1$ allora le soluzioni del problema di Cauchy sono rispettivamente le funzioni costanti $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 1$.
Supponiamo ora $y_0 = 2$. Allora, per unicità, la soluzione y del problema di Cauchy resta diversa da 0 e da 1 e possiamo dividere per $y - y^2$. Otteniamo

$$\frac{y'(t)}{y(t) - y^2(t)} = 1. \tag{3.3}$$

Integrando da una parte e dall'altra rispetto a s otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s) - y^2(s)} ds = \int_0^t ds = t.$$

Attraverso il cambio di variabile $y(s) = p$ si ha $y'(s)ds = dp$ e quindi ci riconduciamo a

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s) - y^2(s)} ds = \int_2^{y(t)} \frac{dp}{p(1-p)} = \int_2^{y(t)} \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} dp = \log|\frac{p}{p-1}|\Big|_2^{y(t)}$$

Quindi troviamo

$$\log|\frac{y(t)}{y(t)-1}| - \log 2 = t$$

ossia

$$|\frac{y(t)}{y(t)-1}| = e^t e^{\log 2} = 2e^t.$$

Togliendo il valore assoluto, troviamo

$$\frac{y(t)}{y(t)-1} = \pm 2e^t.$$

Essendo $y(0) = 2$ osserviamo che dobbiamo prendere

$$\frac{y(t)}{y(t)-1} = 2e^t.$$

Quindi

$$y(t) = \frac{2e^t}{2e^t - 1}$$

definita, come soluzione del problema (3.2), sull'intervallo più grande che contiene $t_0 = 0$, ossia su $(-\log 2, +\infty)$.

Se dovessimo invece trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y' = y - y^2$ calcolando gli integrali indefiniti otteniamo

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - y^2(s)} ds = \int dt$$

da cui

$$\log |\frac{y(t)}{y(t) - 1}| = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$|\frac{y(t)}{y(t) - 1}| = e^{t+c} = Ce^t \quad C \in [0, +\infty)$$

ossia

$$\frac{y(t)}{y(t) - 1} = \pm Ce^t = Ke^t.$$

Quindi

$$y_K(t) = \frac{Ke^t}{Ke^t - 1} \quad K \in \mathbb{R}$$

è la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione assegnata: se $K \leq 0$ y_K è una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ mentre se $K > 0$ abbiamo una soluzione y_1 definita su $t > -\log K$ ed una soluzione y_2 definita su $t < -\log K$. A partire dalla soluzione generale, se uno vuole trovare la soluzione tale che $y(0) = y_0 = \frac{1}{3}$, imponendo $\frac{K}{K-1} = \frac{1}{3}$ segue $K = -\frac{1}{2}$. Quindi

$$y(t) = \frac{e^t}{2 + e^t}$$

è la soluzione del problema (3.2) quando $y_0 = \frac{1}{3}$. Si noti che le soluzioni trovate cambiano comportamento a seconda del punto iniziale.

- Esattamente se $0 < y_0 < 1$ allora la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed ha asintotica alle rette $y = 1$ per $t \to +\infty$ e alla retta $y = 0$ se $t \to -\infty$;
- se $y_0 > 1$ o $y_0 < 0$ allora la soluzione esiste nell'intervallo massimale contenente $t = 0$ e su cui non si annulla il denominatore della soluzione. Per esempio, per $y_0 = 2$, allora y è definita su $(\log \frac{1}{2}, +\infty)$ che contiene lo 0; per esercizio trovare la soluzione per $y_0 = -2$ e si veda che la soluzione y è definita su $(-\infty, \log \frac{3}{2})$.

Esempio 3.3.

$$\begin{cases} y'(t) = (1 + y^2) \sin t \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

In tal caso $g(t) = \sin t$ e $h(y) = 1 + y^2$ che è sempre > 0. Tali funzioni sono continue. Inoltre h è lipschitziana. Pertanto per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste una sola soluzione del problema di Cauchy. Dividendo per $1 + y^2$ e integrando otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{1 + y^2(s)} ds = \int_0^t \sin s ds = -\cos t + 1$$

che diventa

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = -\cos t + 1.$$

Segue che

$$\arctan y(t) = \arctan y_0 - \cos t + 1.$$

Allo scopo di invertire occorre imporre che

$$|\arctan y_0 - \cos t + 1| < \frac{\pi}{2}.$$

ossia
$$-\frac{\pi}{2} + \arctan y_0 + 1 < \cos t < \frac{\pi}{2} + 1 + \arctan y_0.$$
Se per esempio $y_0 = 1$ otteniamo
$$-\frac{\pi}{4} + 1 < \cos t < \frac{3}{4}\pi + 1$$
che è equivalente a richiedere che
$$\cos t > 1 - \frac{\pi}{4}.$$
Posto $\alpha = 1-\frac{\pi}{4}$, l'intervallo che scegliamo in modo che $t_0 = 0$ vi appartenga è $(-\arccos\alpha, \arccos\alpha)$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy con dato $y_0 = 1$ è
$$y(t) = \tan(1 + \frac{\pi}{4} - \cos t)$$
definita su $(-\arccos\alpha, \arccos\alpha)$.

Se la condizione iniziale fosse stata $y(2\pi) = 1$ allora la soluzione sarebbe stata
$$y(t) = \tan(1 + \frac{\pi}{4} - \cos t)$$
definita su $(2\pi - \arccos\alpha, 2\pi + \arccos\alpha)$.

3.1. **Equazioni riconducibili a quelle a variabili separabili.**

(1) se $f(t, y) = h(at + by)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, attraverso la sostituzione
$$at + by = z$$
si ottiene $z' = a + by' = a + bf(t, y) = a + bh(at + by) = a + bh(z)$. L'equazione diventa a variabili separabili Quindi si trova $z = z(t)$ e si torna indietro. Attenzione agli zeri della funzione $a + bh$.

Esempio 3.4. Si consideri il problema
$$\begin{cases} y' = \sin(t + y) - 1 \\ \\ y(0) = y_0 \in [0, \pi]. \end{cases} \tag{3.5}$$
In tal caso $f(t, y) = \sin(t + y) - 1$ e pertanto $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Quindi abbiamo esistenza ed unicità. Poniamo $t+y = z$ da cui segue $z' = 1+y' = 1+\sin z-1 = \sin z$ e $z(0) = y(0)+0 = y_0$. Otteniamo il problema
$$\begin{cases} z' = \sin z \\ \\ z(0) = y_0 \in [0, \pi]. \end{cases}$$
Come soluzioni costanti dell'equazione $z' = \sin z$ troviamo le rette $z = k\pi$, con $k \in \{0, 1\}$. Pertanto se $y_0 \in \{0, \pi\}$ allora l'unica soluzione del problema (3.5) è
$$y(t) = y_0 - t.$$
Tali soluzioni non possono toccare le altre soluzioni di (3.5) a meno di coincidere.

Consideriamo ora il caso $y_0 = \pi/3$. Allora $z(0) = \pi/3$. Possiamo quindi dividere per $\sin z(t)$ in un intorno di 0. Otteniamo $\dfrac{z'}{\sin z} = 1$ e integrando tra 0 e t otteniamo
$$\int_0^t \frac{z'(s)}{\sin z(s)} ds = \int_0^t ds = t.$$

Svolgiamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{z'(t)}{\sin z(t)} dt.$$

Con il cambio di variabile $z(t) = s$ ci riconduciamo all'integrale

$$\int \frac{ds}{\sin s} ds.$$

Ora vale che

$$\int \frac{ds}{\sin s} ds = \int \frac{\sin s ds}{1 - \cos^2 s} ds = -\int \frac{1}{1 - r^2} dr = \frac{1}{2}[\int \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+1} dr]$$

$$= \frac{1}{2} \log |\frac{r-1}{r+1}|_{\frac{\pi}{3}}^{r} = \frac{1}{2} \log |\frac{\cos s - 1}{\cos s + 1}| = \frac{1}{2} \log |\frac{\cos z(t) - 1}{\cos z(t) + 1}|.$$

Pertanto otteniamo che

$$\frac{1}{2} \log |\frac{\cos z(t) - 1}{\cos z(t) + 1}| - \frac{1}{2} \log |\frac{\cos(\frac{\pi}{3}) - 1}{\cos(\frac{\pi}{3}) + 1}| = t$$

da cui

$$\log |\frac{\cos z(t) - 1}{\cos z(t) + 1}| = -\log 3 + 2t$$

e quindi

$$\frac{1 - \cos z(t)}{\cos z(t) + 1} = |\frac{\cos z(t) - 1}{\cos z(t) + 1}| = \frac{1}{3} e^{2t}.$$

Pertanto

$$\cos z(t) = \frac{3 - e^{2t}}{3 + e^{2t}} (\in (-1, 1))$$

Otteniamo

$$z = \pm \arccos(\frac{3 - e^{2t}}{3 + e^{2t}}) + 2k\pi.$$

$$y(t) = \pm \arccos(\frac{3 - e^{2t}}{3 + e^{2t}}) - t + 2k\pi.$$

Dalla condizione iniziale segue che

$$y(t) = \arccos(\frac{3 - e^{2t}}{3 + e^{2t}}) - t.$$

(2) se $f(t, y) = h\left(\frac{y}{t}\right)$ (con $t \neq 0$) allora si procede alla sostituzione

$$z = \frac{y}{t}$$

da cui $y = zt$ ossia $h(z) = y' = z + z't$ da cui $z' = \frac{h(z)-z}{t}$. Abbiamo ottenuto un'equazione a variabili separabili. Vediamo un esempio.

Esempio 3.5. Si consideri

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t} - \dfrac{1}{\cos(\frac{y}{t})} \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Possiamo restringerci a $t > 0$. Posto $h(z) = z - \dfrac{1}{\cos z}$ e $z = \dfrac{y}{t}$ da cui $y = zt$ abbiamo che $h(z) = y' = z + z't$. Otteniamo quindi l'equazione

$$z' = -\frac{1}{t\cos z}.$$

Risolviamola separando le variabili:

$$(\cos z)z' = -\frac{1}{t}$$

da cui

$$\sin z = -\log|t| + c$$

ossia

$$\sin\frac{y}{t} = -\log t + c.$$

Essendo $y(1) = 0$ otteniamo $c = 0$. Per poter invertire la relazione $\sin\frac{y}{t} = -\log t$ deve valere $|\log t| \leq 1$ ossia $t \in [e^{-1}, e]$. Si ottiene

$$y(t) = t(\arcsin(-\log t) + 2k\pi)$$

e

$$y(t) = t(\pi - \arcsin(-\log t) + 2k\pi)$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Dovendo essere $y(1) = 0$ la soluzione sarà $y(t) = t(\arcsin(-\log t)$ definita su $t \in [e^{-1}, e]$. Si provi che la soluzione che soddisfa $y(e) = -\pi e/6$ è

$$y(t) = t\arcsin(-\log|t| + \frac{1}{2})$$

ed è definita su $[e^{-1/2}, e^{3/2}]$.

(3) se $f(t,y) = h\left(\dfrac{y-\bar{y}}{t-\bar{t}}\right)$ si procede alla sostituzione

$$z = \frac{y-\bar{y}}{t-\bar{t}}$$

da cui

$$y - \bar{y} = z(t - \bar{t})$$

ossia

$$h(z) = y' = z + z'(t - \bar{t})$$

e quindi

$$z' = \frac{h(z) - z}{t - \bar{t}}.$$

Si ottiene quindi un'equazione a variabili separabili;

(4) se $f(t,y) = h\left(\dfrac{at + by + c}{At + By + C}\right)$

- se $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ allora le rette $at+by+c = 0$ e $At+By+C = 0$ sono parallele e posto $K = \frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ vale che $at+by+c = k(At+By)+c$ e quindi $\to f(t,y) = h\left(\frac{k(At+By)+c}{(At+By)+C}\right) = g(At + By)$ e ritorniamo al caso (1);

- se le rette $at + by + c = 0$ e $At + By + C = 0$ non sono parallele occorre trovare la soluzione $(\bar{t}, \bar{y})$ del sistema
$$\begin{cases} at + by + c = 0 \\ \\ At + By + C = 0. \end{cases}$$
Quindi
$$\frac{at + by + c}{At + By + C} = \frac{a(t - \bar{t}) + b(y - \bar{y})}{A(t - \bar{t}) + B(y - \bar{y})}.$$
Se $t_0 \neq \bar{t}$ allora si può dividere per $t - \bar{t}$ e ottenere
$$\frac{at + by + c}{At + By + C} = \frac{a + b\frac{y - \bar{y}}{t - \bar{t}}}{A + B\frac{y - \bar{y}}{t - \bar{t}}}.$$
e ritorniamo al caso (3).

3.2. **Incollamento tra soluzioni.**

Proposizione 3.6. *Sia $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che u sia derivabile su $(a, b) - \{t_0\}$ e che esista il*
$$\lim_{t \to t_0} u'(t) = \lambda \in \mathbb{R}.$$
Allora u é derivabile in t_0 e $u'(t_0) = \lambda$.

Dimostrazione. Dalla continuità di u in t_0 segue che il
$$\lim_{t \to t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{(t - t_0)} = \frac{0}{0}.$$
Poichè il limite del rapporto delle derivate del numeratore e denominatore per $t \to t_0$ è
$$\lim_{t \to t_0} \frac{u'(t)}{1} = \lambda,$$
applicando il Teorema di De l'Hopital, abbiamo che $\lim_{t \to t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{(t - t_0)} = \lambda$. Quindi esiste
$$\lim_{t \to t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{(t - t_0)} = \lambda$$
ossia u é derivabile in t_0 e $u'(t_0) = \lambda$.

□

Si osservi che
$$u(t) = \begin{cases} t^2 \cos \frac{1}{t} \text{ se } t \neq 0 \\ 0 \text{ se } t = 0 \end{cases}$$
è continua, derivabile in 0 ma non esiste $\lim_{t \to 0} u'(t)$. Quindi la Proposizione 4.8 dimostra che l'esistenza di $\lim_{t \to t_0} u'(t) = \lambda$ è una condizione sufficiente alla derivabilità in t_0 ma in generale l'esistenza di tale limite non è necessaria ai fini della derivabilità.

Usando la proposizione precedente, dimostriamo un corollario che sarà utilizzato per costruire soluzioni dell'equazione
$$y'(t) = f(t, y(t)). \tag{3.7}$$
attaccando in modo continuo due soluzioni che coincidono in un punto.

Corollario 3.7 (di incollamento). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Siano $u : (a, t_0) \to \mathbb{R}$ e $v : (t_0, b) \to \mathbb{R}$ soluzioni di (3.7). Supponiamo che*

$$\lim_{t \to t_0^-} u(t) = \lim_{t \to t_0^+} v(t) = u_0$$

e supponiamo che il punto $(t_0, u_0) \in A$. Allora la funzione

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \in (a, t_0) \\ u_0 & \text{se } t = t_0 \\ v(t) & \text{se } t \in (t_0, b) \end{cases} \tag{3.8}$$

è soluzione di (3.7) su (a, b).

Dimostrazione. La funzione $\tilde{u}$ é continua su (a, b) e per ogni $t \neq t_0$ soddisfa (3.7). Resta da dimostrare che $\tilde{u}$ é derivabile in t_0 e che $\tilde{u}'(t_0) = f(t_0, \tilde{u}(t_0))$. Osserviamo che, grazie alla continuità di f,

$$\lim_{t \to t_0^-} u'(t) = \lim_{t \to t_0^-} f(t, u(t)) = f(t_0, u_0) = \lim_{t \to t_0^+} v'(t).$$

Dalla Proposizione 4.8 segue che $\tilde{u}$ é derivabile in t_0 con derivata $\tilde{u}'(t_0) = f(t_0, u_0)$. $\square$

Esempio 3.8. Per $t > 0$ si determinino le soluzioni dell'equazione $y' = \frac{2}{t}y + 4\sqrt{y}$ ed il loro dominio.

Definiamo

$$f(t, y) := \frac{2}{t}y + 4\sqrt{y}.$$

Dalle condizioni di esistenza di f deduciamo che il dominio di f è l'insieme $A := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0, y \geq 0\}$. Poichè $f(t, 0) = 0$ allora la funzione $y_0(t) \equiv 0$ (definita per $t > 0$) è una soluzione dell'equazione assegnata. Essa è un'equazione di Bernoulli. Supponiamo $y > 0$. Allora possiamo dividere per $\sqrt{y}$ e otteniamo $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = 2\dfrac{y}{t\sqrt{y}} + 4$ ossia

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2\frac{\sqrt{y}}{t} + 4.$$

Attraverso il cambio di variabile $z = \sqrt{y}$ (con il vincolo $z > 0$) si ottiene $z' = \dfrac{1}{2}\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$ e l'equazione diventa

$$z' = \frac{z}{t} + 2$$

da studiare per $t > 0$. Si ottiene come soluzione

$$z(t) = t(2 \log t + c).$$

Dalla condizione $z > 0$ si ottiene che $\log t > -\frac{c}{2}$ ossia $t > e^{-\frac{c}{2}}$. Quindi, al variare di $c \in \mathbb{R}$ si ottiene la famiglia di soluzioni

$$y_c(t) = z^2(t) = t^2(2 \log t + c)^2$$

definita per $t > e^{-\frac{c}{2}}$. Dal momento che $y_c(e^{-\frac{c}{2}}) = 0$ possiamo estendere y_c su tutto $(0, +\infty)$ incollandola con la soluzione nulla nel punto $t_0 = e^{-\frac{c}{2}}$. segue che le soluzioni

$$\tilde{y}_c(t) = \begin{cases} t^2(2 \log t + c)^2 & \text{se } t \geq e^{-\frac{c}{2}} \\ 0 \text{ se} & 0 < t \leq e^{-\frac{c}{2}} \end{cases}$$

sono soluzioni massimali (in quanto definite sul massimo intervallo "compatibile" con il dominio di g).

Cerchiamo se esiste una soluzione y non identicamente nulla del problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{t} y + 4\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Vale che

$$\tilde{y}_c(1) = 0 \Longleftrightarrow (2\log 1 + c)^2 = 0.$$

Si deduce $c = 0$ a cui corrisponde $e^{-\frac{c}{2}} = 1$. Quindi la funzione

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} 4t^2 \log^2 t \text{ se } \ t \geq 1 \\ 0 \text{ se } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

è una soluzione non identicamente nulla del problema di Cauchy.

Esercizio 3.9. (1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(**Soluzione.** $y(t) = \tan(t + \frac{\pi}{4})$ con $t \in] - \frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}[$.)

(2) Risolvere il seguente problema di Cauchy al variare di $y_0 \neq 0$ e trovare l'intervallo massimale dove è definita la soluzione trovata.

$$\begin{cases} y'(t) + ty = \frac{t}{y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(3) Trovare le soluzioni dell'equazione

$$y'(t) = (1 + y) \sin t$$

e stabilire il loro intervallo di definizione.

Esercizio 3.10. Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

(1) $y' = 2ty^2$

(2) $yy' = \frac{1+y^2}{t}$

(3) $\frac{y'}{\sqrt{y^2-2}} = \frac{e^t}{2y}$

Esercizio 3.11. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

(1)

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 y^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y}{t(t-2)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} \frac{y'(t)}{\sqrt{y}} = \frac{-2t}{1-t^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.12. Determinare se il seguente problema di Cauchy ammette altre soluzioni diverse da quella costante $z = 0$:

$$\begin{cases} z' - \frac{2}{t} z = 4t^2 \sqrt{z} \\ z(1) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.13. Determinare se il seguente problema di Cauchy ammette altre soluzioni diverse da quella costante $y = 0$:

$$\begin{cases} y' = 2(1-t)y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.14. Dimostrare che il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (t+1)\sqrt{1-y} \\ \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

ammette una soluzione non identicamente costante e definita su tutto $\mathbb{R}$.

4. **Equazioni differenziali lineari di ordine 2.**

Osservazione 4.1. Nella Sezione 2 abbiamo considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $a, b \in C(I)$, I intervallo e $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R} =: A$. Osserviamo, grazie alle ipotesi di continuità su a e b, la funzione $f(t, y) = a(t)y + b(t)$ è tale che $f \in Lip_{y,loc}(A) \cap C(A)$ e quindi, per il Teorema 1.3 e la Proposizione 1.7, esiste ed è unica la soluzione y del problema di Cauchy sopra. Inoltre si noti che abbiamo trovata esplicitamente tale y ed essa risulta essere definita su tutto I.

Sotto l'ipotesi che $a_{i,j}, f_i \in C(I)$ per ogni $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, tale risultato di esistenza "globale" ed unicità vale anche per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y + B(t) \\ \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

dove $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\le i,j\le 2} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(I)$, $B(t) = (f_i)_{1\le i\le 2} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(I)$ e $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^2$, $Y_0 = (y_1^0), y_2^0)$. In tal caso, l'incognita è il vettore colonna $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))^{tr}$ (dove tr sta per trasposto). Per esteso il sistema sopra si scrive come

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(t) \\ \\ y_2'(t) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(t) \\ \\ y_1(t_0) = y_1^0 \\ \\ y_2(t_0) = y_2^0 \end{cases}$$

Introduciamo ora le equazioni differenziali lineari di ordine 2. Sono equazioni della forma

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = f(t). \tag{4.1}$$

dove le funzioni a_1, a_2 sono assegnate funzioni definite su uno stesso intervallo I e sono dette **coefficienti** dell'equazione mentre la funzione f è detta **termine noto**. Tale equazione si dice **lineare** perché la funzione y, la sua derivate prima e seconda sono legate tra loro da una relazione di tipo lineare. Esattamente se T è l'operatore

$$T(u) = u'' + a_1(t)u' + a_2(t)u$$

vale che T soddisfa la relazione

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$$

per ogni coppia di funzioni $u, v \in C^2(I)$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Grazie alla linearità dell'operatore T,

- se $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ sono soluzioni dell'equazione **completa** (4.1) allora $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ è una soluzione dell'equazione **omogenea**
$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0 \tag{4.2}$$
- se $\bar{y}$ è soluzione dell'equazione completa (4.1) e y_0 è una soluzione dell'equazione omogenea (4.2) allora $y + y_0$ è soluzione dell'equazione completa (4.1).

In sintesi possiamo dire che

- $E_0 := \{y \in C^2(I) : y \text{ soddisfa (4.2) } \}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (rispetto l'operazione di somma e prodotto per uno scalare)

- se $\bar{y}$ è una soluzione particolare dell'equazione completa allora la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione completa coincide con
$$E_0 + \bar{y}.$$

Introducendo le variabili ausiliarie $y_1 = y$ e $y_2 = y'(= y_1')$, otteniamo che
$$y_2' = y''$$
e l'equazione viene trasformata nel sistema
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -a_1(t)y_1(t) - a_2(t)y_2(t) + f(t) \end{cases}$$
con incognita $Y = (y_1, y_2)$. In modo compatto possiamo scrivere tale sistema come
$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{4.3}$$
con
$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$
Se y è soluzione di (4.1), allora il vettore colonna $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema
$$Y' = A(t)Y + B(t).$$
Viceversa se trovo Y soluzione del sistema $Y' = A(t)Y + B(t)$, allora segue facilmente che la prima componente y_1 di Y risulta soluzione dell'equazione differenziale (4.1).

Osserviamo che fissare la condizione iniziale $Y(t_0) = (y_1(t_0), y_2(t_0))^{tr}$ per il sistema (4.3) è equivalente a fissare i due valori $y(t_0)$ e $y'(t_0)$ della soluzione y dell'equazione (4.1). Quindi y risolve il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = f(t) \\ y(t_0) = c_1 \\ y'(t_0) = c_2 \end{cases} \tag{4.4}$$
se e solo se $Y = (y_1, y_2)^{tr} = (y, y')^{tr}$ risolve il problema di Cauchy
$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ y_1(t_0) = c_1 \\ y_2(t_0) = c_2 \end{cases}$$
Dal momento che, grazie all' Osservazione 4.1, quest'ultimo problema ha una sola soluzione, troviamo che il problema (4.4) ha una sola soluzione definita su tutto I. Quindi

Corollario 4.2. *Sotto le ipotesi che $a_1, a_2, f \in C(I)$, per ogni $t_0 \in I$ e $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ esiste una ed una sola soluzione $y \in C^2(I)$ del problema di Cauchy* (4.4).

Siamo in grado ora di provare il seguente risultato:

Teorema 4.3. *Lo spazio vettoriale E_0* (4.2) *ha dimensione* 2.

Dimostrazione. Fissato $t_0 \in I$ sia $I_{t_0} : E_0 \to \mathbb{R}^2$ definito come $I_{t_0}(y) = (y(t_0), y'(t_0))$. Si prova facilmente che I_{t_0} è un'applicazione lineare. Proviamo che I_{t_0} è iniettivo: se $I_{t_0}(y) = 0$ allora y è la soluzione del problema di Cauchy con dato $(0, 0)$. Per unicità della soluzione vale che $y = 0$. Inoltre, grazie al Corollario 4.2, vale che I_{t_0} è suriettivo. Pertanto E_0 ha dimensione 2. □

Per dimostrare che due soluzioni $u, v \in E_0$ sono linearmente indipendenti, si introduce il seguente strumento.

Definizione 4.4. *Se u, v sono soluzioni dell'equazione (4.2) definite su I, si definisce* **matrice wronskiana** *la matrice quadrata*

$$W(t) := \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix}$$

mentre si definisce **wronskiano** *la funzione $\mathcal{W} : I \to \mathbb{R}$ definita come $\mathcal{W}(t) := \det W(t)$.*

Vale che

Proposizione 4.5. *Siano $u, v : I \to \mathbb{R}$ soluzioni dell'equazione (4.2). Sono equivalenti i seguenti fatti:*

(1) le funzioni u, v sono linearmente indipendenti;
(2) la funzione $\mathcal{W}(t_0) \neq 0$ per ogni $t_0 \in I$;
(3) esiste $t_0 \in I$ tale che $\mathcal{W}(t_0) \neq 0$.

Dimostrazione. Per ogni $t_0 \in I$ sappiamo che $I_{t_0} : E_0 \to \mathbb{R}^2$ definito come $I_{t_0}(y) = (y(t_0), y'(t_0))$ è un isomorfismo. Pertanto
"(1) $\implies$ (2)" se le funzioni u, v sono linearmente indipendenti, allora per ogni $t_0 \in I$, i vettori $I_{t_0}(u), I_{t_0}(v)$ sono linearmente indipendenti e quindi la matrice $\mathcal{W}(t_0)$ ha determinante non nullo;
"(2) $\implies$ (3)" banale;
"(3) $\implies$ (1)" essendo I_{t_0} un isomorfismo ed essendo i vettori $I_{t_0}(u), I_{t_0}(v)$ linearmente indipendenti, segue che le funzioni $\{u, v\}$ sono linearmente indipendenti.

□

4.1. **Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine.** Consideriamo l'equazione

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{4.5}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$. Dal Teorema 4.2 sappiamo che le soluzioni sono definite su tutto $I = \mathbb{R}$ e grazie al Teorema 4.3 sappiamo che $dim E_0 = 2$. Definiamo **polinomio caratteristico** associato all'equazione (4.5) il polinomio

$$P(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b.$$

Proposizione 4.6. *Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora la funzione $u(t) = e^{\lambda t}$ (a valori eventualmente complessi) è soluzione di (4.5) se e solo se $P(\lambda) = 0$.*

Dimostrazione. Segue per sostituzione diretta di u dentro l'equazione (4.5). □

Discutiamo quindi l'equazione $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

- **Caso $\Delta > 0$:** In tal caso P ha due radici λ_1, λ_2 reali e distinte e grazie alla Proposizione 4.6 troviamo le due seguenti soluzioni di (4.5)

  $$u(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad v(t) = e^{\lambda_2 t}$$

  con matrice wronskiana

  $$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

  che ha determinante non nullo. Per la Proposizione 4.5 u, v sono funzioni linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione due. Pertanto $E_0 = span\{u, v\}$. Equivalentemente possiamo dire che la soluzione generale dell'equazione (4.5) è data da

  $$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

  Le soluzioni sono illimitate su $\mathbb{R}$.

Esempio 4.7. Si consideri l'equazione

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Allora il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ che ha radici $\lambda = -2, \lambda = -3$. Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni sono illimitate su $\mathbb{R}$.

- **Caso $\Delta = 0$:** In tal caso P ha due radici reali e coincidenti, ossia $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Essendo $\Delta = 0$ abbiamo che $4b = a^2$ da cui $\lambda^2 + a\lambda + \frac{a^2}{4} = 0$ ossia $\lambda = -\frac{a}{2}$. Quindi l'equazione si riscrive come $y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0$. Grazie alla Proposizione 4.6 si ha che una soluzione è data da $u(t) = e^{\lambda t}$. Un'altra soluzione è data da $v(t) = te^{\lambda t}$: infatti

$$v'(t) = e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(1 + \lambda t)$$

e

$$v''(t) = \lambda e^{\lambda t}(1 + \lambda t) + \lambda e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}(2 + \lambda t)$$

da cui

$$\begin{aligned} v'' - 2\lambda v' + \lambda^2 v &= \lambda e^{\lambda t}(2 + \lambda t) - 2\lambda e^{\lambda t}(1 + \lambda t) + \lambda^2 t e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t}(2\lambda + \lambda^2 t - 2\lambda(1 + \lambda t) + \lambda^2 t) = 0. \end{aligned}$$

Infine la matrice wronskiana associata a u, v è

$$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

che ha determinante non nullo. Pertanto u, v sono linearmente indipendenti e $E_0 = \mathit{span}\{u, v\}$. Equivalentemente possiamo dire che la soluzione generale dell'equazione (4.5) è data da

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esempio 4.8. Si consideri l'equazione

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Allora il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ che ha un unica radice $\lambda = 2$ con molteplicità 2. Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Caso $\Delta < 0$:** in tal caso P ha due radici $\lambda, \bar{\lambda}$ complesse e coniugate, ossia della forma $\lambda = \alpha + \beta i$ e $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$. Grazie alla Proposizione 4.6, sia $z(t) = e^{\lambda t}$ che $\bar{z}(t) = e^{\bar{\lambda} t}$ sono soluzioni complesse di (4.5). Dalla linearità dell'operatore T (soddisfatta anche quando si usano funzioni a valori in $\mathbb{C}$)

$$u(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t}) = \frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}) = e^{\alpha t}\cos\beta t$$

e

$$v(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t}) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}) = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

sono soluzioni reali di (4.5). Inoltre la matrice wronskiana è

$$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{Re}\lambda & \mathrm{Im}\lambda \end{pmatrix}$$

che ha determinante non nullo. Per la Proposizione 4.5 u, v sono funzioni linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione due. Pertanto $E_0 = span\{u, v\}$. Equivalentemente possiamo dire che la soluzione generale dell'equazione (4.5) è data da

$$y(t) = e^{\alpha t}\Big(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\Big), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha = 0$ le soluzione sono periodiche di periodo $T = \frac{2\pi}{\beta}$ e quindi limitate; se $\alpha < 0$, per $t \to +\infty$ vale che $y(t) \to 0$.

Esempio 4.9. Si consideri l'equazione dell'oscillatore armonico

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ che ha zeri $\pm\omega i$. Segue che E_0 è generato da $\mathrm{Re}(e^{i\omega t})$ e $\mathrm{Im}(e^{i\omega t})$ ossia da $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea $y'' + \omega^2 y = 0$ è

$$y_0(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Per esempio se l'equazione fosse $y'' + 4y = 0$ otterremmo che $\lambda^2 = -4$ le cui due radici sono $\pm 2i$. Quindi

$$\cos(2t), \sin(2t)$$

sono una base di E_0 e l'integrale generale dell'equazione risulta

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Le soluzioni sono periodiche.

Esempio 4.10. Si consideri l'equazione

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Allora $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ se e solo se $\lambda = -3 \pm 2i$. Segue che E_0 è generato da $\mathrm{Re}(e^{(-3+2i)t})$ e $\mathrm{Im}(e^{(-3+2i)t})$ ossia

$$E_0 = span\{e^{-3t} \cos 2t, e^{-3t} \sin 2t\}.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y_0(t) = e^{-3t}\Big(c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)\Big), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 4.11. Nel caso $\Delta < 0$ la soluzione generale $y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$, dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, si trova scritta anche come

$$y(t) = Re^{\alpha t} \sin(\beta t + \Phi), \quad R \geq 0, \Phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

attraverso la corrispondenza

$$\begin{cases} R \sin \Phi = c_1 \\ R \cos \Phi = c_2 \end{cases}$$

e l'uso della formula di addizione del sin. In particolare

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \Phi = \begin{cases} \arctan(\dfrac{c_1}{c_2}) \text{ se } c_2 \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ se } c_1 > 0, c_2 = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ se } c_1 < 0, c_2 = 0 \end{cases}$$

4.2. **Equazione lineare completa del secondo ordine.** In questa sezione introduciamo il metodo di variazioni delle costanti al fine di trovare una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = f(t) \tag{4.6}$$

dove $a_1, a_2, f : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue definite sull'intervallo I. Osserviamo che stiamo considerando il caso generale in cui i coefficienti dell'equazione non sono costanti.
Siano $u, v \in C^2(I)$ soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (4.2). Quindi l'integrale generale dell'equazione (4.2) si esprime come

$$y_0(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Introduciamo ora la funzione

$$\bar{y}(t) := \gamma_1(t)u(t) + \gamma_2(t)v(t)$$

in cui al posto delle costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ abbiamo inserito le funzioni $\gamma_1, \gamma 2$. Dimostriamo che esistono $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(I)$ tali che $\bar{y}$ è una soluzione dell'equazione completa (4.6). Osserviamo che, grazie alla Proposizione 4.5, per ogni $t \in I$ il sistema lineare

$$\begin{cases} \gamma_1'(t)u(t) + \gamma_2'(t)v(t) = 0 \\ \\ \gamma_1'(t)u'(t) + \gamma_2'(t)v'(t) = f(t) \end{cases} \tag{4.7}$$

ha un'unica soluzione in quanto la matrice associata al sistema è la matrice wronskiana

$$W(t) := \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix}$$

che ha $\mathcal{W}(t) \neq 0$. Quindi per ogni $t \in I$ esiste un'unica coppia $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ che risolve il sistema (4.7). Per il Teorema di Cramer, tali funzioni γ_i' sono di classe $C^0(I)$. Quindi le loro primitive $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(I)$.

Scegliamo, nella definizione di $\bar{y}$, le funzioni γ_1 e γ_2 che sono soluzioni del sistema (4.7) e proviamo che $\bar{y}$ soddisfa l'equazione (4.6). Derivando $\bar{y}$ e usando la prima equazione del sistema (4.7), si ottiene

$$\bar{y}'(t) = \gamma_1'(t)u(t) + \gamma_2'(t)v(t) + \gamma_1(t)u'(t) + \gamma_2(t)v'(t) = \gamma_1(t)u'(t) + \gamma_2(t)v'(t) \in C^1(I). \tag{4.8}$$

Quindi $\bar{y} \in C^2(I)$. Inoltre, derivando $\bar{y}'$ e usando la seconda equazione del sistema (4.7), si ottiene che

$$\bar{y}''(t) = \gamma_1'(t)u'(t) + \gamma_2'(t)v'(t) + \gamma_1(t)u''(t) + \gamma_2(t)v''(t) = f(t) + \gamma_1(t)u''(t) + \gamma_2(t)v''(t).$$

Sostituendo in (4.6) e usando il fatto che u, v sono soluzioni dell'equazione (4.2)

$$\begin{aligned} &\bar{y}''(t) + a_1(t)\bar{y}'(t) + a_2(t)\bar{y}(t)) \\ &= f(t) + \gamma_1(t)u''(t) + \gamma_2(t)v''(t) + a_1(t)(\gamma_1(t)u'(t) + \gamma_2(t)v'(t)) + a_2(t)(\gamma_1(t)u(t) + \gamma_2(t)v(t)) \\ \\ &= f(t) + \gamma_1(t)\Big(u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t)\Big) + \gamma_2(t)\Big(v''(t) + a_1(t)v'(t) + a_2(t)v(t))\Big) = f(t). \end{aligned}$$

Esempio 4.12. Vediamo un esempio di equazione lineare completa di ordine 2 in cui applicare il metodo di variazione delle costanti.

$$y'' + y = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \quad (t \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi).$$

Imponendo uguale a zero il polinomio caratteristico associato, otteniamo

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

che ha soluzioni $\lambda = \pm i$ con molteplicità 1. Quindi
$$E_0 = span\{\sin t, \cos t\} = span\{\sin t, \cos t\}$$
e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$
Cerchiamo una soluzione $\bar{y}$ del tipo
$$\bar{y}(t) = \gamma_1(t) \sin t + \gamma_2(t) \cos t$$
con le condizioni date da (4.7)
$$\begin{cases} (\sin t)\gamma_1'(t) + (\cos t)\gamma_2'(t) = 0 \\ \\ (\cos t)\gamma_1'(t) - (\sin t)\gamma_2'(t) = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \end{cases}.$$
da cui
$$\begin{cases} \gamma_2'(t) = -\dfrac{\sin t}{\cos t}\gamma_1'(t) \\ \\ (\cos t)\gamma_1'(t) + (\sin t)\dfrac{\sin t}{\cos t}\gamma_1'(t) = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \end{cases}.$$
ossia
$$\begin{cases} \gamma_2'(t) = -\dfrac{\sin t}{\cos t}\gamma_1'(t) \\ \gamma_1'(t) = \dfrac{\sin t}{\cos t} \Longrightarrow \gamma_1(t) = \displaystyle\int \dfrac{\sin t}{\cos t} dt = -\log|\cos t| \end{cases}.$$
$$\begin{cases} \gamma_1(t) = -\log|\cos t| \\ \\ \gamma_2'(t) = -\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = -1 + \dfrac{1}{\cos^2 t} \Longrightarrow \gamma_2(t) = \displaystyle\int -1 + \dfrac{1}{\cos^2 t} dt = -t + \tan t \end{cases}.$$
Quindi
$$\bar{y}(t) = (\tan t - t)\sin t - (\log|\cos t|)\sin t.$$
L'equazione completa ha come soluzione generale
$$y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + (\tan t - t)\cos t - (\log|\cos t|)\sin t$$
al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Vediamo alcuni casi particolari (**Metodo di Verosomiglianza**):

- Se $\boxed{f(t) = e^{\alpha t}P(t)}$ dove P è un polinomio, si cerca una soluzione
$$\bar{y}(t) = t^h e^{\alpha t} Q(t)$$
con P polinomio dello stesso grado di P e h la molteplicità algebrica di α se α è uno zero del polinomio caratteristico associato (quindi $h \in \{0, 1, 2\}$);

Esempio 4.13. Si consideri l'equazione
$$y'' - 6y' + 8y = (t^2 - 1)e^{3t}.$$
Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ che ha zeri $\lambda = 2, 4$ ciascuno di molteplicità 1. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il termine noto è del tipo $e^{\alpha t}P(t)$ con $\alpha = 3$ che non è soluzione del polinomio caratteristico e P polinomio di grado 2. Cerchiamo quindi una soluzione del tipo

$$\bar{y}(t) = e^{3t}(At^2 + Bt + C).$$

Derivando due volte otteniamo $y' = e^{3t}(2At + B + 3At^2 + 3Bt + 3C)$ e

$$y'' = e^{3t}(2A + 6At + 3B + 6At + 3B + 9At^2 + 9Bt + 9C).$$

Quindi sostituendo nell'equazione differenziale completa otteniamo

$$e^{3t}\Big(2A + 12At + 6B + 9At^2 + 9Bt + 9C - 6(2At + B + 3At^2 + 3Bt + 3C) + 8(At^2 + Bt + C)\Big) =$$

$$= (t^2 - 1)e^{3t}.$$

Semplificando e^{3t} otteniamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ deve valere

$$-At^2 - 5Bt + 2A - C = t^2 - 1$$

da cui $A = -1, B = 0$ e $C = -1$. Quindi la soluzione dell'equazione completa è

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{4t} - e^{3t}(t^2 + 1) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nel caso dell'equazione

$$y'' - 6y' + 8y = (t^2 - 1)e^{2t}$$

il termine noto è del tipo $e^{\alpha t}P(t)$ con $\alpha = 2$ soluzione del polinomio caratteristico e P polinomio di grado 2: quindi si deve cercare

$$\bar{y}(t) = te^{2t}(At^2 + Bt + C)$$

(per esercizio).

Esempio 4.14. Si consideri l'equazione

$$y'' - 6y' + 9y = te^{3t}.$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ che ha un unica radice $\lambda = 3$ con molteplicità 2. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il termine noto è del tipo $e^{\alpha t}P(t)$ con $\alpha = 3$ che è soluzione del polinomio caratteristico con molteplicità 2 e P polinomio di grado 1. Cerchiamo quindi una soluzione del tipo

$$\bar{y}(t) = (At + B)t^2e^{3t} = e^{3t}(At^3 + Bt^2).$$

Derivando due volte otteniamo $\bar{y}' = e^{3t}(3At^2 + 2Bt + 3At^3 + 3Bt^2)$ e

$$\bar{y}'' = e^{3t}(6At + 2B + 9At^2 + 6Bt + 9At^2 + 6Bt + 9At^3 + 9Bt^2).$$

Quindi sostituendo nell'equazione differenziale completa otteniamo

$$e^{3t}(9At^3 + 9Bt^2 + 18At^2 + 6At + 12Bt + 2B) - 6e^{3t}(3At^2 + 2Bt + 3At^3 + 3Bt^2)$$

$$+9e^{3t}(At^3 + Bt^2) = te^{3t}.$$

Semplificando e^{3t} otteniamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ deve valere

$$6At + 2B = t$$

da cui $B = 0$ e $A = \frac{1}{6}$. Quindi la soluzione dell'equazione completa è

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = e^{3t}(c_1 + c_2t + \frac{1}{6}t^3) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esempio 4.15. Risolviamo l'equazione
$$y'' - 4y' + 5y = 5t^2$$
Il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ si annulla per $\lambda = 2 \pm i$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$y_0(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$
Il termine noto è del tipo $e^{\alpha t}P(t)$ con $\alpha = 0$ che non è soluzione del polinomio caratteristico e P polinomio di grado 2. Cerchiamo quindi una soluzione
$$\bar{y}(t) = At^2 + Bt + C.$$
Derivando due volte otteniamo $y' = 2At + B$ e $y'' = 2A$. Quindi sostituendo nell'equazione differenziale completa otteniamo
$$2A - 8At - 4B + 5(At^2 + Bt + C) = 5t^2$$
da cui
$$\begin{cases} 2A - 4B + 5C = 0 \\ -8A + 5B = 0 \\ 5A = 5 \end{cases}$$
Quindi
$$\bar{y}_1(t) = t^2 + \frac{8}{5}t + \frac{22}{25}.$$
La soluzione generale dell'equazione differenziale completa è
$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}_1(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + t^2 + \frac{8}{5}t + \frac{22}{25}$$
al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se avessimo il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 5t^2 \\ y(0) = \frac{22}{25} \\ y'(0) = \frac{7}{5} \end{cases}$$
sostituendo nella soluzione generale $t = 0$ troviamo
$$y(0) = y_0(0) + \bar{y}_1(0) = c_1 + \frac{22}{25}$$
da cui $c_1 = 0$.

Poi essendo $y'(t) = 2e^{2t}(c_2 \sin t) + e^{2t}(c_2 \cos t) + 2t + \frac{8}{5}$ segue che $\frac{7}{5} = y'(0) = c_2 + \frac{8}{5}$ ossia $c_2 = -\frac{1}{5}$ e la soluzione del problema di Cauchy è
$$y(t) = -\frac{1}{5}e^{2t} \sin t + t^2 + \frac{8}{5}t + \frac{22}{25}.$$

- Se $\boxed{f(t) = e^{\alpha t}(P_1(t) \cos \beta t + P_2(t) \sin \beta t)}$ dove P_1 e P_2 sono polinomi di grado δ_1, δ_2 rispettivamente, si cerca una soluzione
$$\bar{y}(t) = e^{\alpha t} t^h (Q_1(t) \cos \beta t + Q_2(t) \sin \beta t)$$
con Q_1, Q_2 polinomi di grado $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ e h la molteplicità di $\alpha + i\beta$ se $\alpha + i\beta$ è uno zero del polinomio caratteristico associato (quindi $h \in \{0, 1\}$).

Esempio 4.16. Risolviamo l'equazione

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2t}\cos t$$

Nell'esempio 4.15 abbiamo visto che la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(t) = e^{2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) = c_1u(t) + c_2v(t).$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione $y'' - 4y' + 5y = e^{2t}\cos t$. Il termine noto è del tipo $e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t)$ con $P_2 = 0$, $P_1(t) = 1$ di grado 0 e $\alpha + \beta\mathrm{i} = 2 + \mathrm{i}$ uno zero del polinomio caratteristico. Quindi $\delta = 0$ e cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(t) = te^{2t}(A\cos t + B\sin t).$$

Al fine di semplificare i calcoli, osserviamo che $\bar{y}(t) = Atu(t) + Btv(t)$

Quindi

$$\begin{aligned}\bar{y}'(t) &= Atu'(t) + Btv'(t) + Au(t) + Bv(t)\\ &= Ate^{2t}(2\cos t - \sin t) + Bte^{2t}(2\sin t + \cos t) + Ae^{2t}\cos t + Be^{2t}\sin t\\ &= u(t)(2At + Bt + A) + v(t)(-At + 2Bt + B).\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\bar{y}''(t) &= u'(t)(2At + Bt + A) + u(t)(2A + B) + v'(t)(-At + 2Bt + B) + v(t)(-A + 2B)\\ &= u(t)(4A + 2B + 3At + 4Bt) + v(t)(-4At + 3Bt + 4B - 2A)\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione troviamo

$$u(t)\Big(4A{+}2B{+}3At{+}4Bt{-}4(2At{+}Bt{+}A){+}5At\Big){+}v(t)\Big({-}4At{+}3Bt{+}4B{-}2A{-}4({-}At{+}2Bt{+}B){+}5Bt\Big) = e^{2t}\cos t.$$

Resta

$$2B\cos t - 2A\sin t = \cos t$$

da cui segue $A = 0$ e $B = \frac{1}{2}$ da cui

$$\bar{y}_2(t) = \frac{1}{2}te^{2t}\sin t.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale completa è

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}_2(t) = e^{2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) + \frac{1}{2}te^{2t}\sin t.$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dalla linearità dell'operatore $T : C^2(I) \to C^0(I)$ definito da

$$Tu := u'' + a_1u' + a_2u$$

segue il seguente principio:

Proposizione 4.17 (Principio della sovrapposizione degli effetti). *Se $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ risolve l'equazione differenziale lineare completa $Tu = f$ e $v : (a, b) \to \mathbb{R}$ risolve l'equazione differenziale lineare completa $Tv = g$ allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la combinazione $w(t) := \lambda u(t) + \mu v(t)$ risolve l'equazione differenziale lineare completa*

$$Tw = \lambda f(t) + \mu g(t).$$

Esempio 4.18. Grazie alle soluzioni particolari calcolate negli Esempi 4.15 e 4.16 l'equazione

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2t}\cos t + 5t^2$$

ha come soluzione particolare

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t) = t^2 + \frac{8}{5}t + \frac{22}{25} + \frac{1}{2}te^{2t}\sin t.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale completa è

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = e^{2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) + t^2 + \frac{8}{5}t + \frac{22}{25} + \frac{1}{2}te^{2t}\sin t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 4.19. Se avessimo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

usando la soluzione generale calcolata nell' Esempio 4.12 troveremmo $c_2 = y(0) = 1$ e usando la (4.8) troviamo che

$$\bar{y}' = c_1\cos t - c_2\sin t + \bar{y}'(t) = c_1\cos t - c_2\sin t + \gamma_1(t)\cos t - \gamma_2(t)\sin t = (c_1 - \log|\cos t|)\cos t - (c_2 - t + \tan t)\sin t$$

da cui $-1 = y'(0) = c_1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = -\sin t + \cos t + (\tan t - t)\sin t - (\log|\cos t|)\sin t$$

definita sull'insieme $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Email address, Francesca Prinari: `francesca.prinari@unife.it`