Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 06

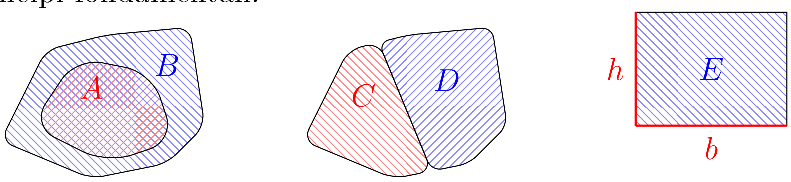
Somme di Darboux

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 8 marzo 2021)

1 Il problema della misura di aree

Il problema del calcolo dell'area di regioni del piano consiste nell'individuare un modo per assegnare ad un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ del piano un numero non negativo $\mathcal{A}(D) \geqslant 0$ che rappresenti la misura della sua estensione. È ragionevole richiedere che questa misura rispetti alcuni principi fondamentali:



- principio di *monotonia*: se un insieme A è contenuto in un altro insieme B allora l'area di A non potrà essere più grande dell'area di B:

$$A \subseteq B \implies \mathcal{A}(A) \leqslant \mathcal{A}(B).$$

- principio di *additività*: se due insiemi sono disgiunti (ovvero hanno intersezione vuota) allora l'area della loro unione sarà la somma delle due aree:

$$C \cap D = \varnothing \implies \mathcal{A}(C \cup D) = \mathcal{A}(C) + \mathcal{A}(D).$$

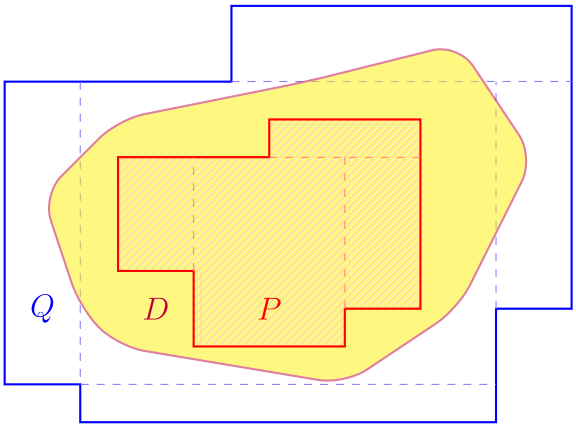
- principio di *uniformità*: se E è un qualsiasi rettangolo con base di lunghezza b e altezza di lunghezza h allora la sua area sarà $\mathcal{A}(E) = b \cdot h$:

$$\mathcal{A}(I \times J) = \mathcal{L}(I) \cdot \mathcal{L}(J),$$

dove I e J sono intervalli di $\mathbb{R}$ e con $\mathcal{L}(I)$ e $\mathcal{L}(J)$ indichiamo la loro lunghezza.

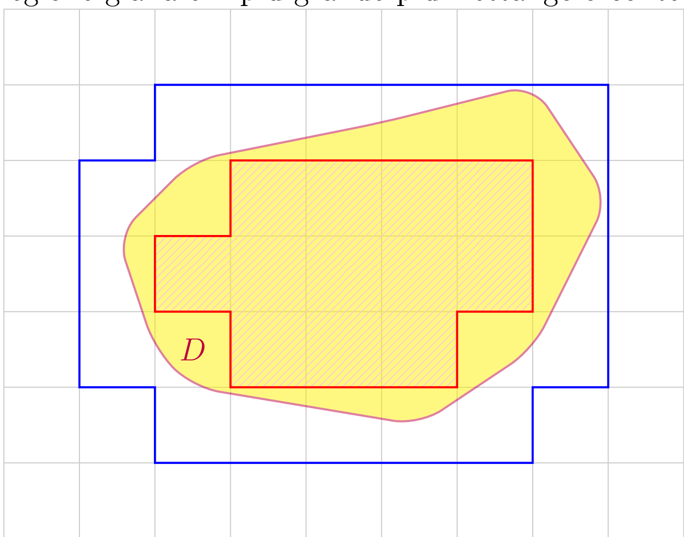
Chiamiamo *plurirettangolo* una regione del piano ottenuta come unione di un numero finito di rettangoli. Come conseguenza di questi principi avremo che:

- calcolare l'area di un plurirettangolo è sempre possibile, basta decomporlo come unione di un numero finito di rettangoli disgiunti e fare la somma delle aree dei singoli rettangoli;
- se una certa regione D contiene un plurirettangolo P ed è contenuta in un plurirettangolo Q, anche se non sappiamo calcolare l'area di D, possiamo calcolare l'area di P che ci fornisce una stima per difetto e l'area di Q che ci fornisce una stima per eccesso.



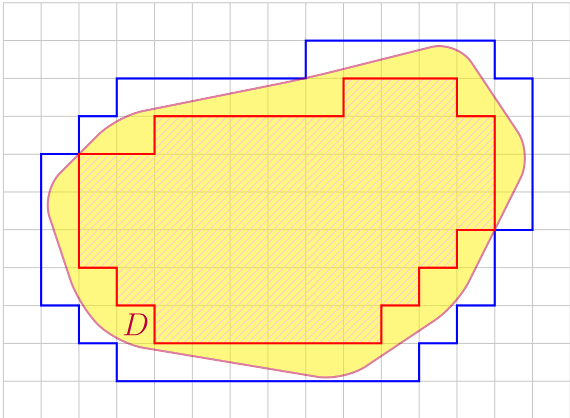
$$\mathcal{A}(P) \leqslant \mathcal{A}(D) \leqslant \mathcal{A}(Q)$$

Usando un foglio con una quadrettatura da 1 cm cerchiamo una stima dell'area della regione gialla. Utilizzando la quadrettatura costruiamo il più piccolo plurirettangolo che contenga la regione gialla e il più grande plurirettangolo contenuto nella regione gialla.



$$12 \leqslant \mathcal{A}(D) \leqslant 32$$

Il plurirettangolo rosso contenuto dentro alla regione gialla è formato da 12 quadrati di 1 cm di lato. Il plurirettangolo blu che contiene la regione gialla è formato da 32 quadrati di 1 cm di lato. Ne deduciamo che la regione gialla ha un'area compresa tra 12 e 32 cm^2. Possiamo migliorare le nostre stime per approssimare il valore dell'area gialla utilizzando una quadrettatura più fine. Ripetiamo l'operazione con una quadrettatura da 0.5 cm.



$$14.5 \leqslant \mathcal{A}(D) \leqslant 24$$

Il plurirettangolo rosso contenuto dentro alla regione gialla ora è formato da 58 quadrati di 0.5 cm di lato. Il plurirettangolo blu che contiene la regione gialla è formato da 96 quadrati di 0.5 cm di lato. Possiamo concludere che la regione gialla ha un'area compresa tra $58 \cdot 0.25 = 14.5$ cm^2 e $96 \cdot 0.25 = 24$ cm^2. Raffinando ulteriormente la quadrettatura prendendo quadratini con lato sempre più piccolo, la differenza tra la stima in eccesso e la stima in difetto si può ridurre ulteriormente. In questo modo possiamo produrre una successione decrescente di approssimazioni per eccesso e una successione crescente di approssimazioni per difetto; nel caso in cui le due successioni convergano ad un limite comune, il valore di tale limite indicherà il valore cercato per l'area della regione che si stiamo misurando.

L'idea di usare approssimazioni per eccesso e per difetto con aree di plurirettangoli sempre più fini sta alla base della costruzione del cosidetto integrale di Riemann (di cui parleremo in questa e nelle seguenti lezioni), o più in generale la cosidetta misura di Peano-Jordan per la misura di aree di regioni del piano (a cui accenneremo più avanti quando parleremo di integrali doppi).

2 Suddivisioni di intervalli

Definizione 2.1. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leqslant b$, chiameremo *suddivisione* dell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ogni sottoinsieme di $[a, b]$ composto da un numero finito i punti che contenga anche gli estremi a e b. Quando $a < b$, ogni suddivisione σ di $[a, b]$, ordinando i suoi punti in modo crescente, può essere scritta nella forma

$$\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b;$$

tale suddivisione permette di scomporre l'intervallo $[a, b]$ nell'unione di n intervalli essenzialmente disgiunti (ovvero senza che due di essi abbiano punti interni in comune):

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k, \qquad I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Chiameremo *ampiezza* (o *passo*) della suddivisione σ la massima lunghezza degli intervalli di tale scomposizione, e la indicheremo con $|\sigma|$,

$$|\sigma| := \max_{k=1,\ldots,n} \mathcal{L}(I_k) = \max_{k=1,\ldots,n} x_k - x_{k-1}.$$

Date due suddivisioni σ_1 e σ_2 dello stesso intervallo $[a, b]$, diremo che σ_2 è un *raffinamento* di σ_1 quando $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$, ovvero quando ogni punto di σ_1 è anche un punto di σ_2.

Osservazione 2.2. Ovviamente la somma totale delle lunghezze degli intervalli di una suddivisione coincide con la lunghezza dell'intervallo da cui si è partiti. Si tratta di una somma telescopica,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a = \mathcal{L}([a, b]).$$

Esercizio 2.3. Siano σ_1 e σ_2 due suddivisioni di uno stesso intervallo $[a, b]$.

- Spiega perché se σ_2 è un raffinamento di σ_1 allora l'ampiezza di σ_2 è minore o uguale all'ampiezza di σ_1.
- Spiega perché se l'ampiezza di σ_2 è minore o uguale all'ampiezza di σ_1 non significa necessariamente che σ_2 sia un raffinamento di σ_1.

Esempio 2.4. Gli insiemi

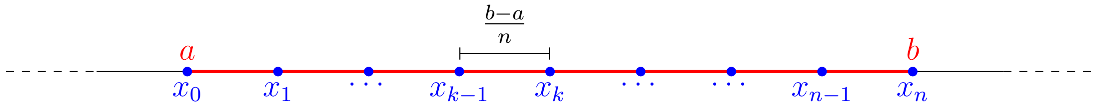
$$\sigma_1 := \{1, 4, 5\}, \qquad \sigma_2 := \{1, \mathrm{e}, \pi, 5\}, \qquad \sigma_3 := \{1, 2, \mathrm{e}, 3, \pi, 4, 5\},$$

sono tutti e tre suddivisioni dell'intervallo $[1, 5]$, σ_1 non è un raffinamento di σ_2 perché non contiene π, σ_2 non è un raffinamento di σ_1 perché non contiene 4, σ_3 è un raffinamento sia di σ_1 che di σ_2. Le ampiezze delle tre suddivisioni sono

$$\begin{aligned}
|\sigma_1| &= \max\{4 - 1, 5 - 4\} = 3, \\
|\sigma_2| &= \max\{\mathrm{e} - 1, \pi - \mathrm{e}, 5 - \pi\} = 5 - \pi, \\
|\sigma_3| &= \max\{2 - 1, \mathrm{e} - 2, 3 - \mathrm{e}, \pi - 3, 4 - \pi, 5 - 4\} = 1.
\end{aligned}$$

Esempio 2.5. Dato un intervallo $[a, b]$ con $a < b$ e $n \in \mathbb{N}$, possiamo sempre individuare una suddivisione σ, che chiameremo *suddivisione uniforme*, che scompone l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza. Essa è formata da $n + 1$ punti che formano una progressione aritmetica con primo termine a e ultimo termine b, il passo di tale progressione, che coincide con l'ampiezza della suddivisione, sarà $\frac{b-a}{n}$ e dunque σ sarà formata dai punti

$$x_k := a + k \cdot \frac{b - a}{n} = \frac{n - k}{n} \cdot a + \frac{k}{n} \cdot b, \quad \text{per } k = 0, 1, \ldots, n.$$



Ad esempio, la suddivisione uniforme di $[1, 5]$ in 5 intervalli avrà ampiezza $\frac{5-1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$ ed è data da

$$\sigma = \{1,\ 1.8,\ 2.6,\ 3.4,\ 4.2,\ 5\}\,.$$

Esercizio 2.6. Determina una suddivisione uniforme dell'intervallo $[1, 2]$ in 12 intervalli.

Esercizio 2.7. Determina una suddivisione dell'intervallo $[1, 2]$ in 12 intervalli in modo che i punti della suddivisione formino una progressione geometrica.

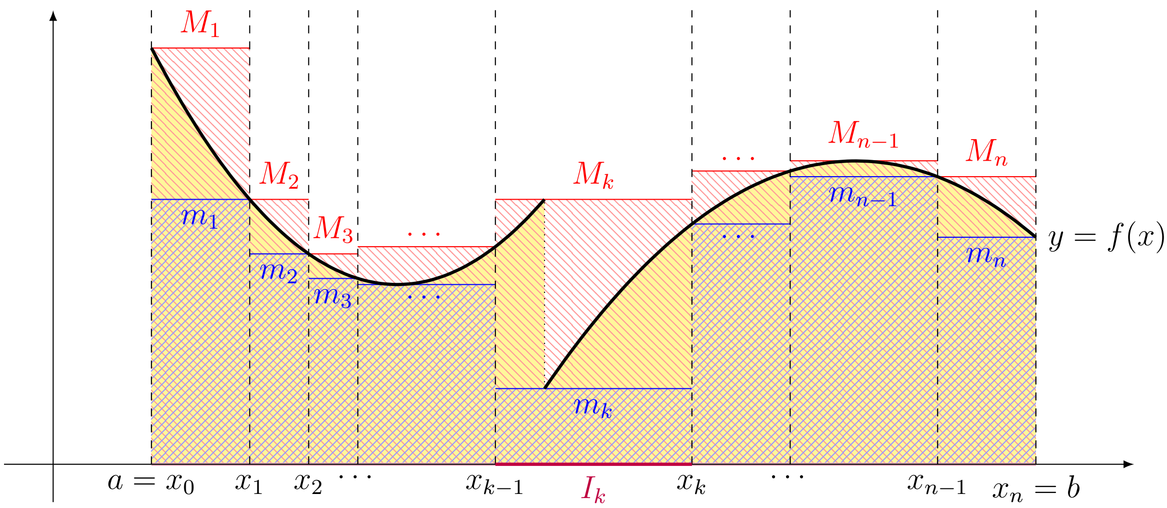
Esercizio 2.8. *[Da fare solo dopo aver studiato la lezione L04 sulle radici n-esime dei numeri complessi]* Verifica che l'insieme σ_n formato dalle parti reali delle radici n-esime (complesse) dell'unità è una suddivisione di $[-1, 1]$ se e solo se n è pari. Determina l'ampiezza di σ_n. Sotto quali condizioni su n_1 e n_2 si ha che σ_{n_1} è un raffinamento di σ_{n_2}?

Date due suddivisioni di uno stesso intervallo, non è detto che una sia più fine dell'altra, ma è sempre possibile trovarne eventualmente un'altra che sia un raffinamento di entrambe.

Lemma 2.9. *Se σ_1 e σ_2 sono due suddivisioni di $[a, b]$, la loro unione $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$ è ancora una suddivisione di $[a, b]$ ed è un raffinamento sia di σ_1 e sia di σ_2.*

Dimostrazione. Basta osservare che sia σ_1 che σ_2 sono sottoinsiemi dell'unione $\sigma_1 \cup \sigma_2$. $\square$

3 Somme inferiori e superiori



Consideriamo ora una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita sull'intervallo limitato $[a,b]$ e richiediamo come unica ipotesi che f sia *limitata* (ovvero che assuma valori in un intervallo limitato di $\mathbb{R}$).

Definizione 3.1. Sia σ una suddivisione che scompone l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli,

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Possiamo considerare un plurirettangolo formato dagli n rettangoli che hanno come base gli intervalli I_k e come altezza il valore m_k più grande possibile che rimanga al di sotto dei valori che la funzione assume su I_k, ovvero il massimo tra i minoranti dei valori di f su I_k, ovvero l'estremo inferiore di f su I_k,

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x).$$

Misuriamo l'area di ciascuno di questi rettangoli in modo algebrico e non geometrico, ovvero considerando aree negative nel caso in cui l'altezza m_k sia negativa. Sommando algebricamente le aree di questi rettangoli otteniamo la *somma inferiore di Darboux* associata alla funzione f e alla suddivisione σ:

$$\underline{S}(f,\sigma) := \sum_{k=1}^{n} m_k \mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}).$$

Analogamente, possiamo costruire il plurirettangolo formato dagli n rettangoli che hanno come base gli intervalli I_k e come altezza il valore M_k più piccolo possibile che rimanga al di sopra dei valori che la funzione assume su I_k, ovvero il minimo tra i maggioranti dei valori di f su I_k, ovvero l'estremo superiore di f su I_k,

$$M_k := \sup_{x \in I_k} f(x).$$

Sommando algebricamente le aree di questi rettangoli otteniamo la *somma superiore di Darboux* associata alla funzione f e alla suddivisione σ:

$$\overline{S}(f,\sigma) := \sum_{k=1}^{n} M_k \mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Osservazione 3.2. L'ipotesi che f sia limitata ci garantisce che esistano finiti i valori m_k e M_k che definiscono le altezze dei rettangoli che formano i plurirettangoli inferiore e superiore. Inoltre, se poniamo

$$m := \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad M := \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

abbiamo che le altezze dei rettangoli costruiti per le somme inferiori e superiori sono contenute tutte nell'intervallo $[m, M]$,

$$m \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M, \quad \text{per } k = 1, 2, \ldots, n,$$

ed inoltre anche i valori delle somme inferiori e delle somme superiori sono limitati dalle aree dei rettangoli che hanno come base $[a,b]$ e come altezze m e M,

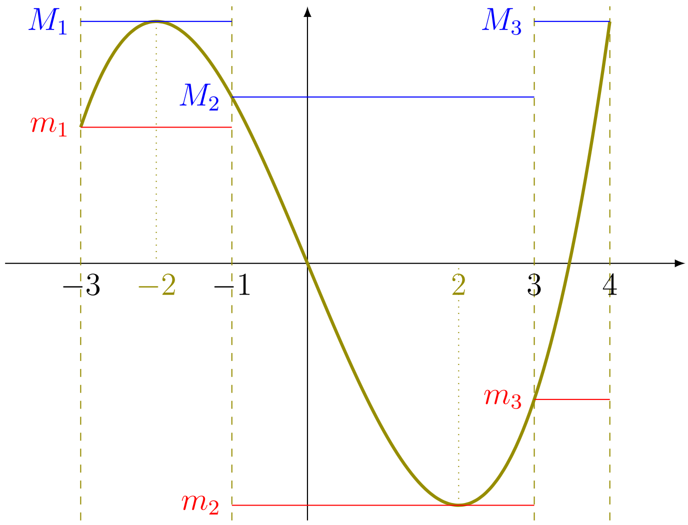
$$m(b-a) \leqslant \underline{S}(f,\sigma) \leqslant \overline{S}(f,\sigma) \leqslant M(b-a).$$

Osservazione 3.3. Quando la funzione f è non negativa, le somme inferiori e delle somme superiori coincidono con l'area geometrica dei plurirettangoli inferiore e superiore, e dunque forniscono una stima per difetto e una stima per eccesso per il possibile valore dell'area del *sottografico* di f, ovvero della regione

$$S(f) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a, b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}.$$

Vediamo qualche esempio di calcolo esplicito di somme inferiori e di somme superiori.

Esempio 3.4. Consideriamo la funzione $f(x) := x^3 - 12x$ definita sull'intervallo $[-3, 4]$ e la suddivisione $\sigma := \{-3, -1, 3, 4\}$. Calcoliamo le somme di Darboux $\underline{S}(f, \sigma)$ e $\overline{S}(f, \sigma)$.



La suddivisione divide l'intervallo $[-3, 4]$ nei tre intervalli

$$I_1 := [-3, -1], \quad I_2 := [-1, 3], \quad I_3 := [3, 4],$$

le cui lunghezze sono

$$\mathcal{L}(I_1) = (-1) - (-3) = 2, \quad \mathcal{L}(I_2) = 3 - (-1) = 4, \quad \mathcal{L}(I_3) = 4 - 3 = 1.$$

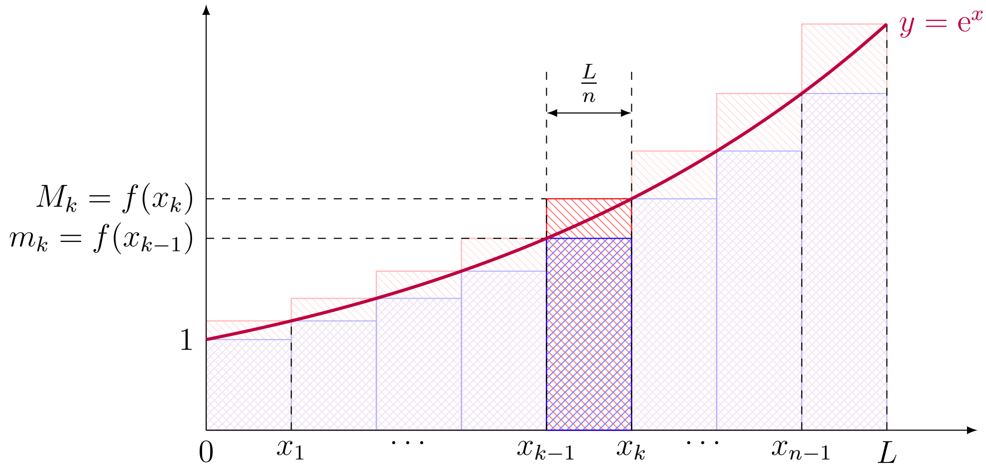
Studiando il segno della derivata $f'(x) = 3(x^2 - 4)$ troviamo che f è crescente su $[-3, -2]$ e $[2, 4]$ ed è decrescente su $[-2, 2]$. Osservando il grafico di f troviamo che

$$\begin{aligned}
m_1 &= \inf_{I_1} f = \min\{f(-3), f(-1)\} = 9, & M_1 &= \sup_{I_1} f = f(-2) = 16,\\
m_2 &= \inf_{I_2} f = f(2) = -16, & M_2 &= \sup_{I_2} f = \max\{f(-1), f(3)\} = 11,\\
m_3 &= \inf_{I_3} f = f(3) = -9, & M_3 &= \sup_{I_3} f = f(4) = 16.
\end{aligned}$$

Avremo quindi le seguenti somme di Darboux

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, \sigma) &= M_1\mathcal{L}(I_1) + M_2\mathcal{L}(I_2) + M_3\mathcal{L}(I_3) = 16 \cdot 2 + 11 \cdot 4 + 16 \cdot 1 = 92,\\
\underline{S}(f, \sigma) &= m_1\mathcal{L}(I_1) + m_2\mathcal{L}(I_2) + m_3\mathcal{L}(I_3) = 9 \cdot 2 - 16 \cdot 4 - 9 \cdot 1 = -55.
\end{aligned}$$

Esempio 3.5. Siano $L > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) := \mathrm{e}^x$ sull'intervallo $[0, L]$. Calcoliamo la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla suddivisione uniforme σ_n che decompone di $[0, L]$ in n intervalli di uguale lunghezza.



I punti della suddivisione σ_n formano una progressione aritmetica con passo L/n e sono dati da

$$x_k := k \cdot \frac{L}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Osserviamo che i valori della funzione $f(x_k)$ formano una progressione geometrica di ragione $\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}$,

$$f(x_k) = \mathrm{e}^{k\frac{L}{n}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}\right)^k.$$

Essendo la funzione strettamente crescente abbiamo

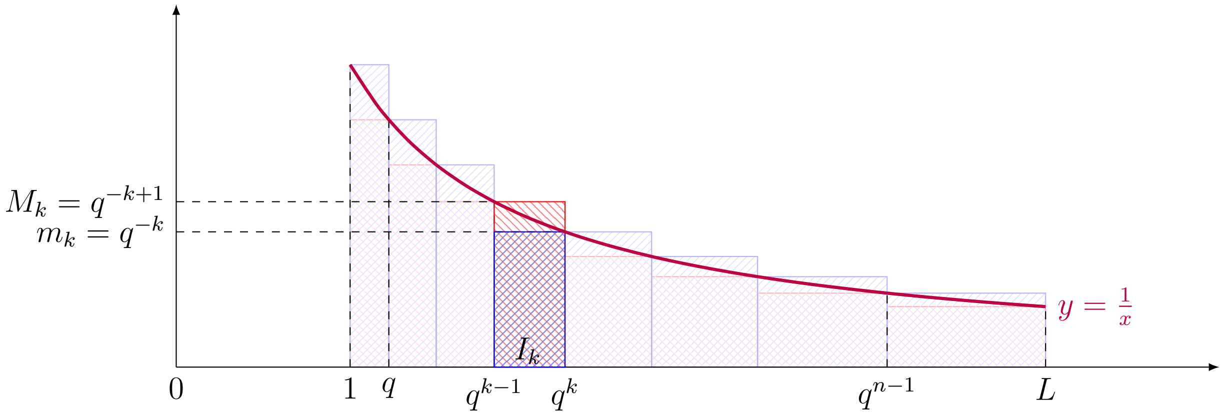
$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1}) = \left(\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}\right)^{k-1}, \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k) = \mathrm{e}^{k\frac{L}{n}}.$$

Utilizzando le formule per le somme di progressioni geometriche possiamo semplificare il calcolo della somma inferiore e della somma superiore:

$$\underline{S}(f, \sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \frac{L}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}\right)^{k-1} = \frac{L}{n} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^L}{1 - \mathrm{e}^{\frac{L}{n}}},$$

$$\overline{S}(f, \sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \frac{L}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}\right)^{k} = \frac{L}{n} \cdot \mathrm{e}^{\frac{L}{n}} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^L}{1 - \mathrm{e}^{\frac{L}{n}}}.$$

Esempio 3.6. Siano $L > 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione $f(x) := \frac{1}{x}$ sull'intervallo $[1, L]$. Calcoliamo la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla suddivisione σ_n che decompone di $[1, L]$ in n intervalli tramite punti che formano una progressione geometrica.



I punti della suddivisione σ_n formano una progressione geometrica di ragione

$$q := \sqrt[n]{\frac{L}{1}} = L^{\frac{1}{n}}$$

e sono dati da

$$x_k := L^{\frac{k}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Essendo la funzione strettamente decrescente abbiamo

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k) = L^{-\frac{k}{n}}, \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1}) = L^{-\frac{k-1}{n}}.$$

Con qualche semplificazione i calcoli della somma inferiore e della somma superiore diventano somme di n termini uguali:

$$\underline{S}(f, \sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} L^{-\frac{k}{n}} \left(L^{\frac{k}{n}} - L^{\frac{k-1}{n}} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - L^{-\frac{1}{n}} \right) = n \left(1 - L^{-\frac{1}{n}} \right),$$

$$\overline{S}(f, \sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} L^{-\frac{k-1}{n}} \left(L^{\frac{k}{n}} - L^{\frac{k-1}{n}} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(L^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = n \left(L^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

Esercizio 3.7. Considera la funzione $f(x) := \sin(x)$ definita sull'intervallo $I := [0, 2\pi]$ e la suddivisione $\sigma := \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi, 2\pi\right\}$. Calcola le somme di Darboux inferiori e superiori corrispondenti alla funzione f e alla suddivisione σ.

Esercizio 3.8. Sia $f(x) := x^2 - 2$ e, dato $\lambda \in]0, 2[$, sia $\sigma_\lambda := \{0, \lambda, 2\}$ la suddivisione che suddivide di $[0, 2]$ nei due intervalli $[0, \lambda]$ e $[\lambda, 2]$. Sia

$$E(\lambda) := \overline{S}(f, \sigma_\lambda) - \underline{S}(f, \sigma_\lambda)$$

la differenza tra la somma superiore e la somma inferiore di f relativa a σ_λ. Per quale valore di λ si ha che $E(\lambda)$ assume il valore minimo?

Esercizio 3.9. Calcola, cercando di semplificare il più possibile i risultati, le somme inferiori $\underline{S}(f, \sigma)$ e le somme superiori $\overline{S}(f, \sigma)$ nei seguenti casi:

1. $f(x) = x^2$, σ partizione uniforme di $[1, 2]$ in n intervalli di uguale lunghezza;
2. $f(x) = x^2$, $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partizione di $[1, 2]$ in n intervalli in modo che i punti di σ formino una progressione geometrica;
3. $f(x) = x^{-2}$, $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partizione di $[1, 2]$ in n intervalli in modo che i punti di σ formino una progressione geometrica;
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, σ partizione uniforme di $[1, 2]$ in n intervalli di uguale lunghezza;
5. $f(x) = \cos(x)$, σ partizione uniforme di $[0, \pi/2]$ in n intervalli di uguale lunghezza.

(I risultati ottenuti serviranno per calcolare alcuni integrali nell'esercizio 5.5.)

Esercizio 3.10. Sia $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sqrt{x}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$\sigma_n = \{x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,k}, \dots, x_{n,n}\}$$

la suddivisione di $[0, 1]$ formata dai punti $x_{n,k} := \left(\frac{k}{n}\right)^2$, con $k = 0, 1, \dots, n$. (σ_n suddivide $[0, 1]$ in n intervalli.)

- Calcola la somma superiore di Darboux $S(n) := \overline{S}(f, \sigma_n)$.
- Calcola il limite $\lim_{n\to+\infty} S(n)$.

Può essere utile ricordare le formule per la somma dei primi n numeri naturali e per la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1).$$

Raffinando le suddivisioni le somme inferiori possono solo crescere e le somme superiori possono solo decrescere.

Lemma 3.11. *Siano σ_1 e σ_2 due suddivisioni di $[a, b]$. Se σ_2 è un raffinamento di σ_1 allora*

$$\underline{S}(f, \sigma_1) \leqslant \underline{S}(f, \sigma_2) \leqslant \overline{S}(f, \sigma_2) \leqslant \overline{S}(f, \sigma_1).$$

Dimostrazione. Basta verificare cosa succede alle somme inferiori e superiori quando si aggiunge un punto alla suddivisione. Consideriamo un intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ e suddividiamolo in un due intervalli spezzandolo nel punto $x_\star \in I_k$,

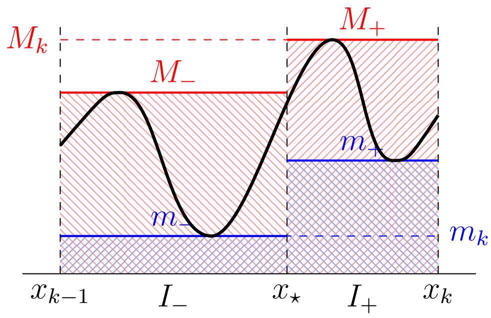
$$I_k = I_- \cup I_+, \qquad I_- := [x_{k-1}, x_\star], \quad I_+ := [x_\star, x_k].$$

Poniamo

$$\begin{aligned} m_k &:= \inf_{x\in I_k} f(x), \qquad & m_- &:= \inf_{x\in I_-} f(x), \qquad & m_+ &:= \inf_{x\in I_+} f(x), \\ M_k &:= \sup_{x\in I_k} f(x), \qquad & M_- &:= \sup_{x\in I_-} f(x), \qquad & M_+ &:= \sup_{x\in I_+} f(x). \end{aligned}$$

Dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$, se $A \subseteq B$ allora $\inf A \geqslant \inf B$ e $\sup A \leqslant \sup B$; essendo $I_-, I_+ \subseteq I_k$ abbiamo che

$$m_- \geqslant m_k, \quad m_+ \geqslant m_k, \quad M_- \leqslant M_k, \quad M_+ \leqslant M_k.$$



Otteniamo che la somma delle aree (in senso algebrico) dei rettangoli inferiori costruiti su I_- e I_+ non è inferiore a quella del rettangolo inferiore costruito su I_k, e la somma delle aree (in senso algebrico) dei rettangoli superiori costruiti su I_- e I_+ non è superiore a quella del rettangolo superiore costruito su I_k,

$$\begin{aligned} m_-\mathcal{L}(I_-) + m_+\mathcal{L}(I_+) &\geqslant m_k\mathcal{L}(I_-) + m_k\mathcal{L}(I_+) \geqslant m_k\mathcal{L}(I_k), \\ M_-\mathcal{L}(I_-) + M_+\mathcal{L}(I_+) &\leqslant M_k\mathcal{L}(I_-) + M_k\mathcal{L}(I_+) \leqslant M_k\mathcal{L}(I_k). \end{aligned}$$

Dunque la somma inferiore costruita su una partizione σ sarà minore o uguale alla somma inferiore costruita sulla partizione più fine $\sigma \cup \{x_\star\}$, e la somma superiore costruita su una partizione σ sarà maggiore o uguale alla somma superiore costruita sulla partizione più fine $\sigma \cup \{x_\star\}$. □

Siccome date due qualsiasi suddivisioni è sempre possibile trovarne un'altra che sia un raffinamento di entrambe, dal lemma segue che qualsiasi somma inferiore non supera mai qualsiasi altra somma superiore.

Proposizione 3.12. *Siano σ_1 e σ_2 due suddivisioni di $[a, b]$. Allora si ha sempre che*

$$\underline{S}(f, \sigma_1) \leqslant \overline{S}(f, \sigma_2).$$

Dimostrazione. Basta considerare la suddivisione $\widetilde{\sigma} := \sigma_1 \cup \sigma_2$ che è un raffinamento sia di σ_1 che di σ_2 (lemma 2.9). Dal lemma 3.11 segue che

$$\underline{S}(f, \sigma_1) \leqslant \underline{S}(f, \widetilde{\sigma}) \leqslant \overline{S}(f, \widetilde{\sigma}) \leqslant \overline{S}(f, \sigma_2).$$

□

4 Definizione dell'integrale di Riemann

Ogni somma inferiore è minorante di tutte le somme superiori, dunque l'insieme delle somme superiori è inferiormente limitato. Indichiamo con $\overline{\Sigma}$ l'estremo inferiore delle somme superiori $\overline{S}(f, \sigma)$ al variare di σ tra tutte le possibili suddivisione di $[a, b]$,

$$\overline{\Sigma} := \inf_\sigma \overline{S}(f, \sigma).$$

Tale valore è il massimo dei minoranti delle somme superiori, dunque avremo che

$$\underline{S}(f,\sigma) \leqslant \overline{\Sigma},$$

per ogni suddivisione σ. Quindi l'insieme delle somme inferiori è superiormente limitato e la quantità $\overline{\Sigma}$ è maggiorante di tutte le somme inferiori. Indichiamo con $\underline{\Sigma}$ l'estremo superiore delle somme inferiori $\underline{S}(f,\sigma)$ al variare della suddivisione σ,

$$\underline{\Sigma} := \sup_{\sigma} \underline{S}(f,\sigma).$$

Tale valore è il minimo dei maggioranti delle somme inferiori, dunque avremo che

$$\underline{\Sigma} \leqslant \overline{\Sigma}.$$

Definizione 4.1. Quando f è una funzione limitata definita su un intervallo limitato i valori $\underline{\Sigma}$ e $\overline{\Sigma}$ esistono sempre e sono finiti e si dicono, rispettivamente, *integrale inferiore* e *integrale superiore* di f su $[a,b]$. Li indichiamo con i simboli

$$\underline{\int_a^b} f := \underline{\Sigma} = \sup_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a,b]}} \underline{S}(f,\sigma), \qquad \overline{\int_a^b} f := \overline{\Sigma} = \inf_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a,b]}} \overline{S}(f,\sigma).$$

Osservazione 4.2. Quando f è una funzione nonnegativa, proseguendo le considerazioni fatte nell'osservazione 3.3, abbiamo che l'integrale inferiore $\underline{\int_a^b} f$ rappresenta la migliore approssimazione per difetto per l'area del sottografico di f che deriva dalle stime per difetto date dalle somme inferiori, mentre l'integrale superiore $\overline{\int_a^b} f$ rappresenta la migliore approssimazione per eccesso per l'area del sottografico di f che deriva dalle stime per eccesso date dalle somme superiori.

Abbiamo sempre che $\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f$; può succedere in alcuni casi che i due valori siano effettivamente uno strettamente più piccolo dell'altro.

Esempio 4.3 (Funzione di Dirichlet)**.** Consideriamo la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ che vale 1 nei punti razionali e 0 nei punti irrazionali dell'intervallo $[0,1]$,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Siccome ogni intervallo non degenere di $\mathbb{R}$ contiene sempre sia punti razionali che punti irrazionali abbiamo che su ogni intervallo non degenere contenuto in $[0,1]$ la funzione f assume sempre sia il valore 0 che il valore 1. Dunque, per qualsiasi suddivisione σ che scompone $[0,1]$ negli intervalli $(I_k)_{k=1,\ldots,n}$, avremo che le altezze dei rettangoli per le somme inferiori e superiori saranno

$$m_k = \inf_{I_k} f = \min\{0,1\} = 0, \qquad M_k = \sup_{I_k} f = \max\{0,1\} = 1.$$

Otteniamo così che

$$\underline{S}(f,\sigma) = \sum_k 0\mathcal{L}(I_k) = 0\mathcal{L}([0,1]) = 0, \qquad \overline{S}(f,\sigma) = \sum_k 1\mathcal{L}(I_k) = 1\mathcal{L}(0,1) = 1,$$

da cui segue che

$$\underline{\int_0^1} f = 0 < \overline{\int_0^1} f = 1.$$

Definizione 4.4. Data una funzione f limitata e definita sull'intervallo limitato $[a,b]$ diremo che la funzione f è *integrabile secondo Riemann* sull'intervallo $[a,b]$, quando i valori dell'integrale inferiore e dell'integrale superiore di f su $[a,b]$ coincidono e questo valore comune definisce quello che chiameremo *integrale di Riemann* della funzione f su $[a,b]$, e che indicheremo con $\int_a^b f$, oppure, per metter meglio in evidenza quale variabile consideriamo per la funzione integranda, con $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dunque,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f = \sup_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a,b]}} \underline{S}(f,\sigma) = \overline{\int_a^b} f = \inf_{\substack{\sigma \\ \text{suddivisione} \\ \text{di } [a,b]}} \overline{S}(f,\sigma),$$

quando queste quantità coincidono.

Osservazione 4.5. Proseguendo le considerazioni fatte nell'osservazione 4.2, abbiamo che quando f è non negativa ed è integrabile, l'integrale di Riemann $\int_a^b f$ ci fornisce la misura esatta dell'area del sottografico di f.

Esempio 4.6. Le funzioni costanti su intervalli limitati sono sempre integrabili. Dato $c \in \mathbb{R}$, sia $f(x) = c$ per ogni $x \in [a,b]$. Siccome la funzione assume sempre e solo il valore c, qualsiasi sia la partizione σ che scompone $[a,b]$ negli intervalli $(I_k)_{k=1,\dots,n}$, avremo sempre che

$$m_k = \inf_{I_k} f = M_k = \sup_{I_k} f = c,$$

da cui segue che

$$\underline{S}(f,\sigma) = \overline{S}(f,\sigma) = \sum_k c \cdot \mathcal{L}(I_k) = c\mathcal{L}([a,b]) = c(b-a).$$

Dunque,

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a).$$

Quando $c > 0$ il sottografico di f coincide con un rettangolo e sappiamo bene, senza bisogno di integrali, che la sua area si ottiene dal prodotto della lunghezza di base, $b-a$, per l'altezza c.

La funzione di Dirichlet descritta nell'esempio 4.3 non è una funzione integrabile, in quanto l'integrale inferiore e l'integrale superiore, pur essendo entrambi finiti non coincidono.

Osservazione 4.7. L'integrabilità secondo Riemann richiede come ipotesi necessaria che la funzione integranda sia una funzione limitata e che l'intervallo di integrazione sia limitato. Se queste ipotesi non sono verificate allora succede che qualche rettangolo utilizzato nel calcolo per le somme inferiori o superiori abbia area infinita e dunque non diventa possibile poter definire in modo finito i valori dell'integrale.

Esempio 4.8. Consideriamo la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Data una qualsiasi partizione σ formata dai punti $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < 1$, sul primo intervallo abbiamo che

$$M_1 := \sup_{x \in [0, x_1]} f(x) = +\infty,$$

da cui segue che $\overline{S}(f,\sigma) = +\infty$. La funzione $1/x$ non è integrabile secondo Riemann su $]0,1]$.

Esempio 4.9. Consideriamo la funzione $f\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Se suddividiamo l'intervallo $[1,+\infty[$ in un numero finito di intervalli, almeno uno di questi dovrà comunque avere lunghezza infinita e quindi, siccome è positiva ne segue che anche in questo caso le somme superiori risulterebbero con valore $+\infty$. La funzione $1/x$ non è integrabile secondo Riemann su $[1,+\infty[$.

5 Criteri di integrabilità

Per come abbiamo definito l'integrale di Riemann una funzione è integrabile quando il valore che riusciamo ad approssimare per difetto con le somme inferiori va a coincidere con il valore che riusciamo ad approssimare per eccesso con le somme superiori. Dunque abbiamo integrabilità quando è possibile avere una somma inferiore e una somma superiore arbitrariamente vicine.

Teorema 5.1. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata definita sull'intervallo limitato $[a,b]$. Le seguenti proposizioni sono tra loro equivalenti:*

(A) la funzione f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$;

(B) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione σ di $[a,b]$ per la quale si ha

$$\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) < \varepsilon;$$

(C) esiste una successione $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suddivisioni di $[a,b]$ per la quale si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,\sigma_n) - \underline{S}(f,\sigma_n) = 0.$$

Dimostrazione. Vediamo l'implicazione (A) $\implies$ (B). Supponiamo che f sia integrabile e sia $I := \int_a^b f$. Sia $\varepsilon > 0$. Siccome I coincide con l'integrale superiore di f, ovvero con il massimo dei minoranti delle somme superiori, avremo che $I + \frac{\varepsilon}{2}$ non è un minorante delle somme superiori, dunque esisterà una suddivisione σ_1 di $[a, b]$ tale che

$$\overline{S}(f, \sigma_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siccome I coincide anche con l'integrale inferiore di f, ovvero con il minimo dei maggioranti delle somme inferiori, avremo che $I - \frac{\varepsilon}{2}$ non è un maggiorante delle somme inferiori, dunque esisterà una suddivisione σ_2 di $[a, b]$ tale che

$$\underline{S}(f, \sigma_2) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo ora la suddivisione $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$; siccome σ è un raffinamento sia di σ_1 che di σ_2 abbiamo

$$\overline{S}(f, \sigma) \leqslant \overline{S}(f, \sigma_1), \qquad \underline{S}(f, \sigma) \geqslant \underline{S}(f, \sigma_2).$$

Mettendo insieme tutte queste disuguaglianze otteniamo

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) \leqslant \overline{S}(f, \sigma_1) - \underline{S}(f, \sigma_2) < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Vediamo l'implicazione (B) $\implies$ (C). Per ogni $n \in \mathbb{N}$, scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ l'ipotesi (B) ci dice che esiste una suddivisione σ_n tale che

$$0 \leqslant \overline{S}(f, \sigma_n) - \underline{S}(f, \sigma_n) < \frac{1}{n}.$$

Quando $n \to +\infty$ abbiamo che $\frac{1}{n} \to 0$ e per il confronto a sandwich ne segue la tesi (C).

Vediamo l'implicazione (C) $\implies$ (A). Dalla definizione di integrale inferiore e superiore abbiamo che

$$\underline{S}(f, \sigma_n) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{S}(f, \sigma_n),$$

e dunque

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{S}(f, \sigma_n) - \underline{S}(f, \sigma_n).$$

Per l'ipotesi (C) la quantità a destra tende a zero per $n \to +\infty$, per il confronto a sandwich ne segue che la quantità al centro è nulla, dunque $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ che significa che f è integrabile. $\square$

Nella situazione del punto (C) del teorema 5.1 possiamo dire anche qualche cosa di più.

Proposizione 5.2. *Sia f integrabile su $[a,b]$. Se $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di suddivisioni di $[a,b]$ per la quale si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,\sigma_n) - \underline{S}(f,\sigma_n) = 0,$$

allora abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f,\sigma_n) = \int_a^b f.$$

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo $\overline{S}_n := \overline{S}(f,\sigma_n)$ e $\underline{S}_n := \underline{S}(f,\sigma_n)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &\leqslant \overline{S}_n && \text{(integrale $\leqslant$ somme superiori)}\\
&= \left(\overline{S}_n - \underline{S}_n\right) + \underline{S}_n && \text{(aggiungo e tolgo $\underline{S}_n$)}\\
&\leqslant \left(\overline{S}_n - \underline{S}_n\right) + \int_a^b f, && \text{(somme inferiori $\leqslant$ integrale)}
\end{aligned}$$

Passando al limite per $n\to+\infty$ e utilizzando il confronto a sandwich otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \int_a^b f,$$

e poi ricaviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n - \left(\overline{S}_n - \underline{S}_n\right) = \int_a^b f - 0 = \int_a^b f.$$

□

Possiamo dare un'esempio di applicazione di quest'ultima proposizione riprendendo in mano alcune somme di Darboux che abbiamo calcolato nei precedenti paragrafi.

Esempio 5.3. Siano $L>0$ e $n\in\mathbb{N}$. Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) := \mathrm{e}^x$ sull'intervallo $[0,L]$. Abbiamo calcolato nella scorsa lezione la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla suddivisione uniforme σ_n che decompone di $[0,L]$ in n intervalli di uguale lunghezza. Abbiamo ottenuto

$$\underline{S}_n := \underline{S}(f,\sigma_n) = \frac{L}{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^L-1}{\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}-1}, \qquad \overline{S}_n := \overline{S}(f,\sigma_n) = \mathrm{e}^{\frac{L}{n}}\cdot\frac{L}{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^L-1}{\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}-1} = \mathrm{e}^{\frac{L}{n}}\underline{S}(f,\sigma_n).$$

Se calcoliamo la differenza otteniamo

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \left(\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}-1\right)\underline{S}_n.$$

Il fattore $\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}-1$ è infinitesimo per $n\to+\infty$. La successione delle somme inferiori converge ad un limite finito,

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{L}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{L}{n}}-1}(\mathrm{e}^L-1) = \lim_{x\to0}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}(\mathrm{e}^L-1) = \mathrm{e}^L-1.$$

Ne segue che $\lim_{n\to+\infty}\overline{S}_n - \underline{S}_n = 0$ e quindi per la proposizione 5.2 abbiamo

$$\int_0^L e^x \,dx = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_n = e^L - 1.$$

Esempio 5.4. Siano $L > 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione $f(x) := \frac{1}{x}$ sull'intervallo $[1, L]$. Abbiamo calcolato nella scorsa lezione la somma inferiore e la somma superiore di f relativa alla suddivisione σ_n che decompone di $[1, L]$ in n intervalli tramite punti che formano una progressione geometrica. Abbiamo ottenuto

$$\overline{S}_n := \overline{S}(f, \sigma_n) = n\left(L^{\frac{1}{n}} - 1\right), \qquad \underline{S}_n := \underline{S}(f, \sigma_n) = n\left(1 - L^{-\frac{1}{n}}\right) = L^{-\frac{1}{n}}\overline{S}_n.$$

Se calcoliamo la differenza otteniamo

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = (1 - L^{-\frac{1}{n}})\overline{S}_n.$$

Il fattore $1 - L^{-\frac{1}{n}}$ è infinitesimo per $n \to +\infty$. La successione delle somme superiori converge ad un limite finito,

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{L^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{L^x - 1}{x} = \log(L).$$

Ne segue che $\lim_{n\to+\infty}\overline{S}_n - \underline{S}_n = 0$ e quindi per la proposizione 5.2 abbiamo

$$\int_1^L \frac{1}{x} \,dx = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \log(L).$$

In questi ultimi due esempi siamo riusciti a calcolare il valore di integrali di Riemann tramite limiti di somme di Darboux. Ciò è stato possibile perché abbiamo considerato funzioni abbastanza semplici e scegliendo opportunamente le suddivisioni siamo riusciti a semplificare le sommatorie che definiscono le somme di Darboux. Si tratta di un procedimento piuttosto elaborato che richiede diversi calcoli ed è faticoso implementarlo per casi più generali. Vedremo più avanti, quando parleremo del teorema fondamentale del calcolo, che il calcolo degli integrali di Riemann si può semplificare notevolmente utilizzando la teoria del calcolo differenziale che abbiamo studiato nel corso del primo semestre. Per il momento è comunque istruttivo provare ad esercitarsi a calcolare alcuni integrali non troppo complicati basandoci sulla approssimazione con somme di Darboux.

Esercizio 5.5. Utilizzando i risultati ottenuti nell'esercizio 3.9, calcola i seguenti integrali di Riemann come limite di successioni di somme di Darboux:

$$\int_1^2 x^2 \,dx, \quad \int_1^2 x^{-2} \,dx, \quad \int_1^2 e^{-x} \,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos(x) \,dx.$$

Quando una funzione è integrabile per ottenere buone approssimazioni dell'integrale di Riemann è sufficiente prendere suddivisioni con ampiezza sufficientemente piccola.

Proposizione 5.6. *Sia f integrabile su $[a,b]$. Allora le somme inferiori $\underline{S}(f,\sigma)$ e le somme superiori $\overline{S}(f,\sigma)$ tendono al valore dell'integrale $\int_a^b f$ quando l'ampiezza della suddivisione σ di $[a,b]$ tende a zero,*

$$\lim_{|\sigma|\to 0^+} \underline{S}(f,\sigma) = \lim_{|\sigma|\to 0^+} \overline{S}(f,\sigma) = \int_a^b f,$$

dove il significato di questi limiti è equivalente a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni suddivisione σ di $[a,b]$ con ampiezza $|\sigma| < \delta$ si ha che

$$\int_a^b f - \underline{S}(f,\sigma) < \varepsilon, \qquad \overline{S}(f,\sigma) - \int_a^b f < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Siccome le quantità non negative $\int_a^b f - \underline{S}(f,\sigma)$ e $\overline{S}(f,\sigma) - \int_a^b f$ sono entrambe minori o uguali di $\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma)$ è sufficiente dimostrare che

$$\lim_{|\sigma|\to 0^+} \overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) = 0.$$

Se f è una funzione costante allora le somme superiori coincidono con le somme inferiori e il risultato sarebbe immediato. Poniamo $m := \inf_{[a,b]} f$ e $M := \sup_{[a,b]} f$; se f non è una funzione costante allora $M > m$. Sia $\varepsilon > 0$. Per il punto (B) del teorema 5.1 sappiamo che esiste una suddivisione σ_ε tale che

$$\overline{S}(f,\sigma_\varepsilon) - \underline{S}(f,\sigma_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia n_ε il numero di intervalli in cui viene decomposto l'intervallo $[a,b]$ dai punti di σ_ε; indichiamo con $p_0, p_1, \ldots, p_{n_\varepsilon}$ tali punti e con $J_1, \ldots, J_{n_\varepsilon}$ gli intervalli,

$$a = p_0 < p_1 < \cdots < p_{n_\varepsilon} = b, \qquad J_k := [p_{k-1}, p_k], \quad k = 1, \ldots, n_\varepsilon.$$

Poniamo

$$\widetilde{m}_k := \inf_{J_k} f, \qquad \widetilde{M}_k := \sup_{J_k} f, \qquad k = 1, 2, \ldots, n_\varepsilon.$$

Scegliamo un $\delta > 0$ in funzione di ε ponendo

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon(M-m)}; \tag{1}$$

il motivo di questa scelta sarà chiarito più avanti. Sia ora σ una qualsiasi suddivisione di $[a,b]$ con ampiezza $|\sigma| < \delta$. Sia n il numero di intervalli in cui viene decomposto l'intervallo $[a,b]$ dai punti di σ; indichiamo con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tali punti e con $I_1, \ldots, I_n$ gli intervalli,

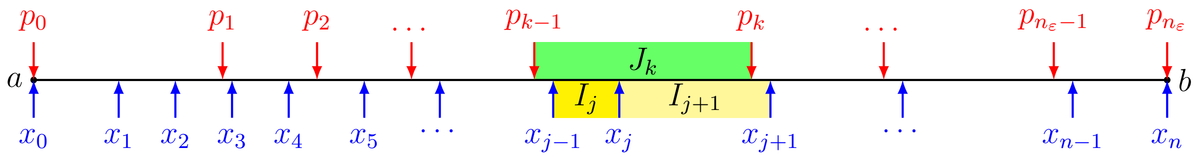
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad I_j := [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \ldots, n.$$

Poniamo inoltre

$$m_j := \inf_{I_j} f, \qquad M_j := \sup_{I_j} f, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Alcuni degli intervalli I_j di σ possono essere contenuti interamente in uno degli intervalli J_k di σ_ε, sono quelli che non contengono alcun punto di σ_ε tra i propri punti interni; gli altri intervalli I_j di σ, quelli che hanno tra i propri punti interni almeno un punto di σ_ε, si sovrappongono su più di uno degli intervalli J_k di σ_ε; suddividiamo gli indici j compresi tra 1 e n in due gruppi per distinguere tra queste due eventualità,

$$
\begin{aligned}
&A := \bigl\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \exists k \in \{1, 2, \ldots, n_\varepsilon\} \text{ tale che } I_j \subseteq J_k\bigr\},\\
&B := \bigl\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \exists k \in \{1, \ldots, n_\varepsilon - 1\} \text{ tale che } p_k \text{ è interno a } I_j\bigr\}.
\end{aligned}
$$



$j \in A, \quad j+1 \in B$

Calcoliamo la differenza tra somma superiore e somma inferiore separando i contributi relativi agli intervalli corrispondenti agli indici in A da quelli relativi agli intervalli corrispondenti agli indici in B

$$
\begin{aligned}
&\overline{S}(f,\sigma) - \underline{S}(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) = S_A + S_B,\\
&S_A := \sum_{j\in A} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}),\\
&S_B := \sum_{j\in B} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}).
\end{aligned}
$$

Ad ogni $j \in A$ corrisponde un indice $k =: k(j)$ per il quale si ha $I_j \subseteq J_k$, e in tal caso avremo che $m_j \geqslant \widetilde{m}_k$ e $M_j \leqslant \widetilde{M}_k$ e dunque

$$M_j - m_j \leqslant \widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k.$$

Inoltre la somma delle lunghezze di tutti gli intervalli I_j contenuti nello stesso intervallo J_k non supera la lunghezza di J_k. Raggruppando tutti gli indici $j \in A$ a cui corrisponde lo stesso indice k e poi sommando rispetto a k otteniamo,

$$
\begin{aligned}
S_A = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \sum_{\substack{j=1,\ldots,n\\ k(j)=k}} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \Bigl(\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k\Bigr) \sum_{\substack{j=1,\ldots,n\\ k(j)=k}} (x_j - x_{j-1}) \leqslant\\
\leqslant \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \Bigl(\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k\Bigr)(p_k - p_{k-1}) = \overline{S}(f,\sigma_\varepsilon) - \underline{S}(f,\sigma_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)
\end{aligned}
$$

Il numero di indici contenuti nell'insieme B è al massimo $n_\varepsilon - 1$ in quanto ad ogni punto p_k di σ_ε può corrispondere al più un solo indice j tale che p_k sia interno a I_j, ed i punti estremi p_0 e p_{n_ε} non possono essere interni. Per ogni $j = 1, \ldots, n$, e dunque anche per ogni $j \in B$, abbiamo che

$$M_j - m_j \leqslant M - m, \qquad x_j - x_{j-1} \leqslant |\sigma| < \delta.$$

Con queste stime e per la definizione (1) di δ (ed è qui che si capisce il motivo di tale scelta) otteniamo

$$S_B \leqslant (n_\varepsilon - 1)(M - m)\delta = \frac{(n_\varepsilon - 1)(M - n)\varepsilon}{2n_\varepsilon(M - n)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Mettendo insieme le disuguaglianze (2) ed (3) arriviamo a concludere che

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) = S_A + S_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

per ogni suddivisione σ con ampiezza $|\sigma| < \delta$. □

Come conseguenza di questa proposizione abbiamo ad esempio che per funzioni integrabili le somme di Darboux calcolate con suddivisioni uniformi convergono sempre all'integrale al tendere all'infinito del numero di punti della suddivisione.

Corollario 5.7. *Sia f integrabile su $[a, b]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia σ_n la suddivisione uniforme di $[a, b]$, ovvero la suddivisione che scompone $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza. Allora abbiamo*

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{S}(f, \sigma_n) = \lim_{n \to +\infty} \overline{S}(f, \sigma_n) = \int_a^b f.$$

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione 5.6 dopo aver osservato che

$$\lim_{n \to +\infty} |\sigma_n| = \lim_{n \to +\infty} \frac{b - a}{n} = 0.$$

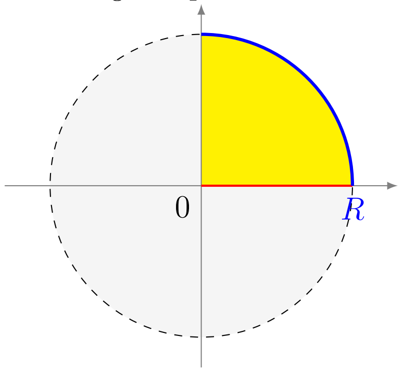
□

Si tenga presente comunque che le suddivisioni uniformi per essendo semplici da determinare, non è detto che siano sempre la scelta più conveniente o che renda più agevole il calcolo delle somme di Darboux.

6 Interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann

Per quanto possa apparire macchinosa la definizione di integrale di Riemann, ricordiamoci che esso ci fornisce uno strumento per il calcolo di aree di regioni del piano. Per alcune semplici tipologie di figure, ad esempio rettangoli, triangoli, trapezi, cerchi, sappiamo già calcolare l'area tramite formule semplici e dirette, lo abbiamo imparato alla scuola primaria. Proviamo a verificare con esempio non banale che l'area calcolata con l'integrale di Riemann coincide effettivamente con quello che si ottiene applicando le note formule del calcolo di aree.

Esempio 6.1. Sappiamo che l'area di un cerchio di raggio R è πR^2. Sebbene un cerchio non sia identificabile con il sottografico di una funzione, possiamo considerare un quarto di cerchio ottenuto come intersezione tra un cerchio con centro nell'origine e il primo quadrante del piano cartesiano. Il settore circolare giallo è il sottografico della funzione che ha come grafico la curva blu nella figura qui sotto.



Dall'equazione cartesiana della circonferenza di centro l'origine e raggio R,

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

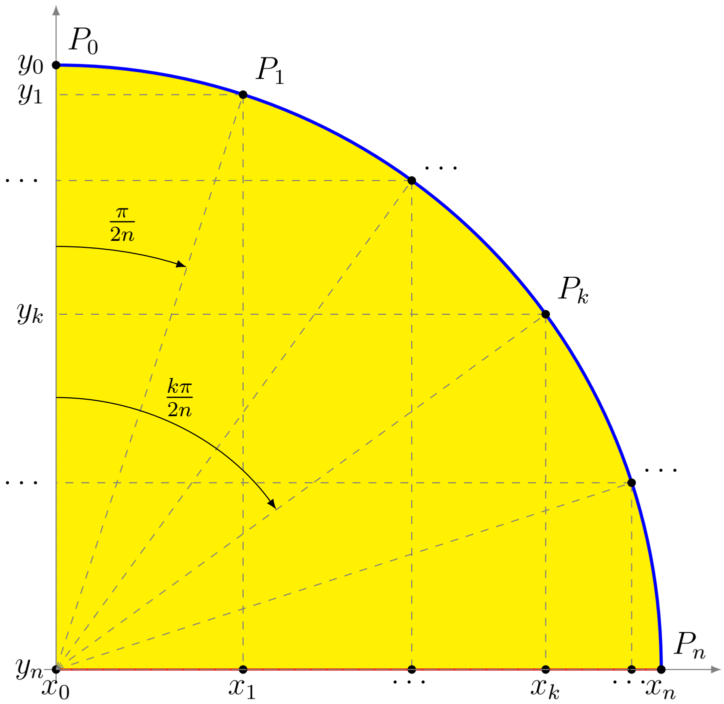
osservando che nel primo quadrante si ha $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, possiamo ricavare l'equazione in forma esplicita della curva blu in figura,

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant R.$$

La regione gialla coincide quindi con il sottografico della funzione $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$ definita per $x \in [0, R]$. L'area della regione gialla deve coincidere con il seguente integrale di Riemann,

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Proviamo a calcolarlo utilizzando approssimazioni con somme di Darboux. Cerchiamo un modo furbo per scegliere suddivisioni di $[0, R]$ in modo da rendere gestibile il calcolo. Dato $n \in \mathbb{N}$, suddividiamo prima l'arco di circonferenza blu in n archi di uguale ampiezza e poi proiettiamo i punti della suddivisione dell'arco ortogonalmente sull'asse delle ascisse in modo da ottenere una suddivisione dell'intervallo $[0, R]$. Per farlo ci basta dividere l'angolo retto in n angoli uguali di ampiezza $\frac{\pi}{2n}$.



Ordinando i punti sull'arco di circonferenza per ascissa crescente troviamo i punti

$$P_k = (x_k, y_k), \quad x_k := R\sin\frac{k\pi}{2n},\, y_k := R\cos\frac{k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Definiamo la suddivisione σ_n di $[0, R]$ prendendo le ascisse x_k dei punti P_k,

$$\sigma_n : 0 = x_0 < x_1 = R\sin\frac{\pi}{2n} < \dots < x_k = R\sin\frac{k\pi}{2n} < \dots < x_n = R.$$

Tale suddivisione scompone $[0, R]$ in n intervalli $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, con $k = 1, \dots, n$. Utilizzando le formule di prostaferesi[1]. troviamo che la lunghezza di I_k è

$$\mathcal{L}(I_k) = x_k - x_{k-1} = R\left(\sin\frac{k\pi}{2n} - \sin\frac{(k-1)\pi}{2n}\right) = 2R\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}.$$

Osserviamo che la lunghezza di questi intervalli decresce al crescere di k, pertanto il passo della suddivisione σ_n è dato dalla lunghezza del primo,

$$|\sigma_n| = \mathcal{L}(I_1) = \sin\frac{\pi}{2n},$$

e notiamo che si tratta di una quantità infinitesima per $n \to +\infty$. La funzione f è decrescente e dunque sull'intervallo I_k raggiunge il suo valore minimo in x_k,

$$m_k := \inf_{I_k} f = f(x_k) = y_k = R\cos\frac{k\pi}{2n}.$$

[1]prostaferesi: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Siamo pronti per calcolare le somme inferiori (con l'aiuto delle formule di Werner[2]),

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\sigma_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} R\cos\frac{k\pi}{2n}\cdot 2R\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n} = \\ &= R^2\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n} 2\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4n} = R^2\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n}\right) = \\ &= R^2\sin\frac{\pi}{4n}\left(n\cos\frac{\pi}{4n}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n}\right) = A_n + B_n,\end{aligned}$$

dove

$$A_n := R^2 n\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n}, \qquad B_n := R^2\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n}.$$

Per la formula di duplicazione del seno abbiamo

$$A_n = \frac{R^2 n}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{4n} = \frac{R^2 n}{2}\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{R^2\pi}{4}, \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Per calcolare l'ultima sommatoria che definisce B_n ci riconduciamo alla somma di una progressione geometrica in campo complesso[3]. Consideriamo la sequenza di numeri complessi z_k, con $k=1,\dots,n$, definita da

$$z_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(4k-1)\pi}{4n}}.$$

Si tratta di una progressione geometrica in quanto i rapporti di termini consecutivi sono tutti uguali al variare di k,

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(4k+3)\pi}{4n}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(4k-1)\pi}{4n}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} = \omega,$$

dove la ragione ω non è altro che la radice fondamentale $2n$-esima dell'unità. Calcoliamo la somma dei z_k utilizzando la formula per le somme di progressioni geometriche,

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = z_1\cdot\frac{\omega^n-1}{\omega-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4n}}\cdot\frac{-1-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4n}}\cdot\frac{-2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Siccome abbiamo che $\mathrm{Re}(z_k) = \cos\frac{(4k-1)\pi}{4n}$ otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(4k-1)\pi}{4n} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}(z_k) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big) = -\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$

[2]Werner: $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$.

[3]Per capire questi conti sarebbe bene avere studiato prima la definizione di esponenziale ad esponente immaginario discussa nelle lezioni L03-L04.

e dunque ricaviamo

$$B_n = -R^2 \frac{\left(\sin \frac{\pi}{4n}\right)^2}{\sin \frac{\pi}{2n}} \approx -R^2 \frac{\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = -\frac{R^2 \pi}{8n}, \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Mettendo insieme le stime asintotiche per i due pezzi A_n e B_n e utilizzando la proposizione 5.6, arriviamo finalmente a calcolare il valore dell'integrale,

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f, \sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} A_n + \lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{\pi R^2}{4} + 0 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Il calcolo di questo integrale ci dice che un quarto del cerchio di raggio R ha area pari ad un quarto di πR^2, che è esattamente quello ci aspettavamo.

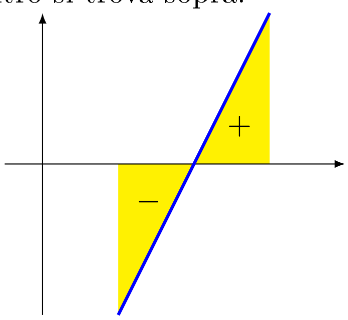
Esercizio 6.2. Considera la funzione $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ definita sull'intervallo $[0, 4]$. Il sottografico di f risulta essere un trapezio. Calcola l'area di tale trapezio utilizzando approssimazioni tramite somme di Darboux dell'integrale di Riemann

$$\int_0^4 \left(1 + \frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x.$$

Verifica che il risultato ottenuto coincide con classica formula per l'area del trapezio:

$$\frac{\text{base maggiore} + \text{base minore}}{2} \cdot \text{altezza}.$$

Esercizio 6.3. Considera la funzione $f(x) = 2x - 4$ sull'intervallo $[1, 3]$. Il suo grafico è il segmento rettilineo che unisce i punti $(1, -2)$ e $(3, 2)$. La porzione di piano compresa tra il grafico e l'asse delle ascisse è formata da due triangoli congruenti, uno di essi si trova sotto l'asse delle ascisse, l'altro si trova sopra.



Sommando le loro aree in modo algebrico (con segno meno per la parte sotto l'asse delle ascisse e con il segno più sopra l'asse delle ascisse) si ottiene una somma nulla. Verifica, utilizzando approssimazioni tramite somme di Darboux, che risulta effettivamente

$$\int_1^3 (2x - 4)\,\mathrm{d}x = 0.$$
