**Ingegneria Elettronica e Informatica**
**Analisi Matematica 1a (Foschi)**
**Compito del 7.6.2018**

1. Calcola la parte intera della somma $S$ definita dalla seguente sommatoria

$$S := \sum_{k=2}^{102} \left( 1000 \left( -\frac{1}{2} \right)^k + \frac{k}{100} \right).$$

**Soluzione:** Per la proprietà di linearità delle sommatorie abbiamo

$$S = A + B,$$

dove $A := \sum_{k=2}^{102} 1000 \left( -\frac{1}{2} \right)^k$ e $B := \sum_{k=2}^{102} k/100$.

La sommatoria $A$ è la somma di 101 termini consecutivi di una progressione geometrica di ragione $-1/2$ a partire dal termine $1000(-1/2)^2$. La somma dei primi $n$ termini di una progressione geometrica di ragione $q$ e primo termine $b$ è data da

$$b \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dunque nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{aligned} A = 1000 \left( -\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{101}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 250 \cdot \frac{1 + 2^{-101}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{500}{3} \cdot \left(1 + 2^{-101}\right) = \\ = \frac{500}{3} + \frac{5^3}{2^{99} \cdot 3} = 166 + \frac{2}{3} + \frac{5^3}{2^{99} \cdot 3} = 166.\overline{6} + \varepsilon, \end{aligned}$$

con $\varepsilon = 2^{-99} 3^{-1} 5^3 < 10^{-1}$.

La sommatoria $B$ è la somma di 101 termini consecutivi di una progressione aritmetica di passo $1/100$ a partire dal termine $2/100$. La somma dei primi $n$ termini di una progressione aritmetica di passo $p$ e primo termine $b$ è data da

$$(b - p)n + p \cdot \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Dunque nel nostro caso abbiamo:

$$B = \left( \frac{2}{100} - \frac{1}{100} \right) \cdot 101 + \frac{1}{100} \cdot \frac{101 \cdot 102}{2} = \frac{101 \cdot 52}{100} = 52.52$$

Sommando i due valori otteniamo

$$S = A + B = 219.18\overline{6} + \varepsilon,$$

La cui parte intera è: $\lfloor S \rfloor = 219$.

2. Considera l'insieme

$$E := \left\{ \frac{n^2 - 2n + 6}{n^2 + 3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- Determina estremo inferiore ed estremo superiore di $E$.
- Determina i punti di accumulazione di $E$.

**Soluzione:** Considera la funzione

$$\phi(x) := \frac{x^2 - 2x + 6}{x^2 + 3}.$$

L'insieme $E$ non è altro che l'immagine tramite $\phi$ dell'insieme dei numeri naturali,

$$E = \phi(\mathbb{N}) = \{\phi(n) \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

La derivata di $\phi$ è

$$\phi'(x) := \frac{(2x-2)(x^2+3) - (x^2 - 2x + 6)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{2(x^2 - 3x - 3)}{(x^2+3)^2}.$$

Dunque il segno di $\phi'(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 3x - 3$: negativo per $x \in ]x_-, x_+[$ e positivo per $x \notin [x_-, x_+]$, dove

$$x_- := \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \qquad x_+ := \frac{3 + \sqrt{21}}{2}.$$

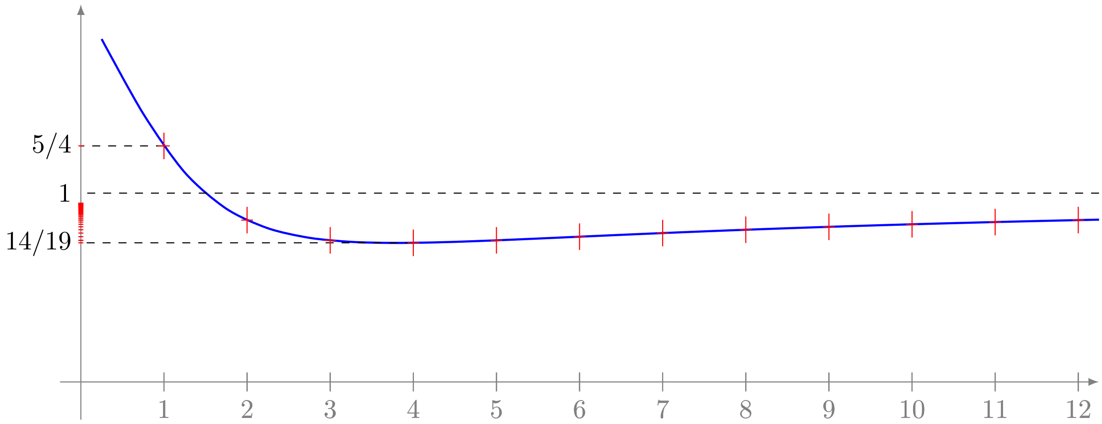
Quindi $\phi(x)$ è strettamente decrescente quando $x \in [x_-, x_+]$ ed è strettamente crescente quando $x \geqslant x_+$. Siccome $x_- < 0$ e $3 < x_+ < 4$, ne segue che la successione $\phi(n)$ inizialmente è decrescente, e poi diventa strettamente crescente per $n \geqslant 4$. Abbiamo,

$$\phi(1) = \frac{5}{4}, \quad \phi(3) = \frac{3}{4}, \quad \phi(4) = \frac{14}{19}, \quad \lim_{n\to\infty} \phi(n) = 1.$$

Dunque

$$\inf E = \min E = \frac{14}{19}, \qquad \sup E = \max E = \frac{5}{4}.$$

Tutti i punti di $E$ sono punti isolati e l'unico punto di accumulazione è dato dal valore del limite della successione $\lim_n \phi(n) = 1$.




3. Considera la funzione

$$f(x) := \frac{\sin(\pi x^4) - \pi x^4}{(\arctan(x) - x)^4}.$$

Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to 0$, per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$.

**Soluzione:**

- Quando $x \to 0$, abbiamo le seguenti approssimazioni di Taylor

$$\begin{aligned}\sin(\pi x^4) &= (\pi x^4) - \frac{1}{3!}(\pi x^4)^3 + o\left((\pi x^4)^4\right) = \pi x^4 - \frac{\pi^3}{6}x^{12} + o\left(x^{16}\right),\\ \arctan(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^4\right),\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\sin(\pi x^4) - \pi x^4 &\approx -\frac{\pi^3}{6}x^{12},\\ (\arctan(x) - x)^4 &\approx \left(-\frac{1}{3}x^3\right)^4 = \frac{1}{81}x^{12}.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{81\pi^3 x^{12}}{6x^{12}} = -\frac{27}{2}\pi^3.$$

- Quando $x \to 1$, essendo $f$ una funzione continua in 1 abbiamo

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \frac{\sin(\pi) - \pi}{(\arctan(1) - 1)^4} = -\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)^4} = -\frac{256\pi}{(4-\pi)^4}.$$

- Quando $x \to \infty$, essendo $\sin(\pi x^4)$ e $\arctan(x)$ due funzioni limitate nelle differenze al numeratore e al denominatore prevalgono le potenze che tendono ad infinito,

$$\begin{aligned}\sin(\pi x^4) - \pi x^4 &\approx -\pi x^4,\\ (\arctan(x) - x)^4 &\approx x^4,\end{aligned}$$

e abbiamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-\pi x^4}{x^4} = -\pi.$$

4. Considera la funzione

$$g(x) := \big|3 - |\log(2+x)|\big|$$

- Disegna il grafico di $g$.
- Determina i punti di massimo e minimo locale di $g$.

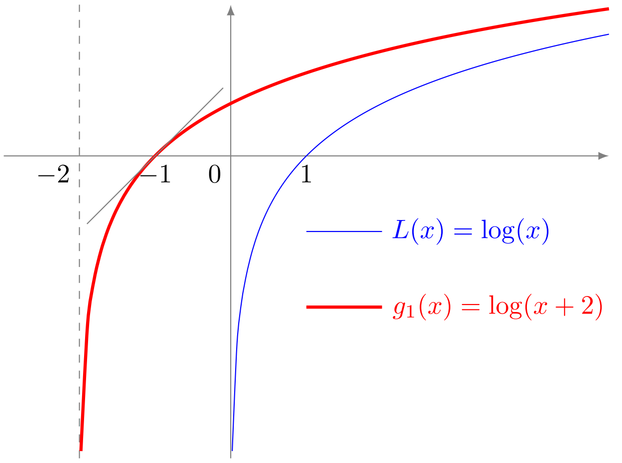
**Soluzione:** Indichiamo con $m(x) := |x|$ la funzione valore assoluto, con $\tau_h(x) := x + h$ la traslazione di passo $h$ e con $L(x) := \log(x)$ la funzione logaritmo. La funzione

$$g(x) = \big||\log(x+2)| - 3\big|$$

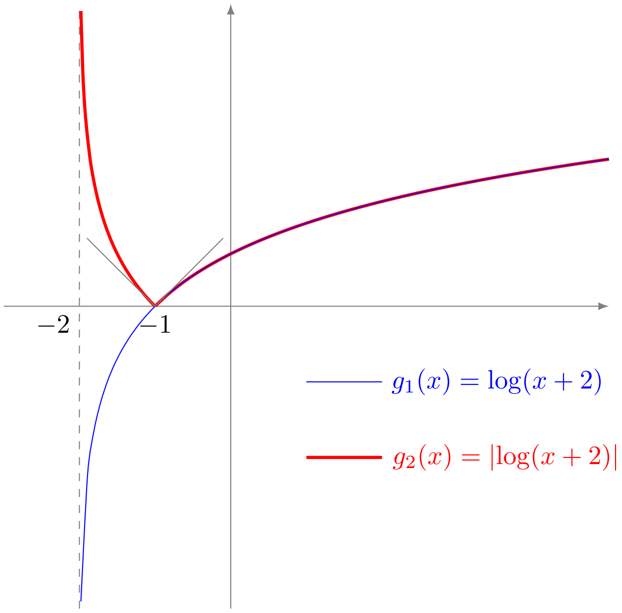
non è altro che la catena di composizioni data da

$$g = m \circ \tau_{-3} \circ m \circ L \circ \tau_2.$$

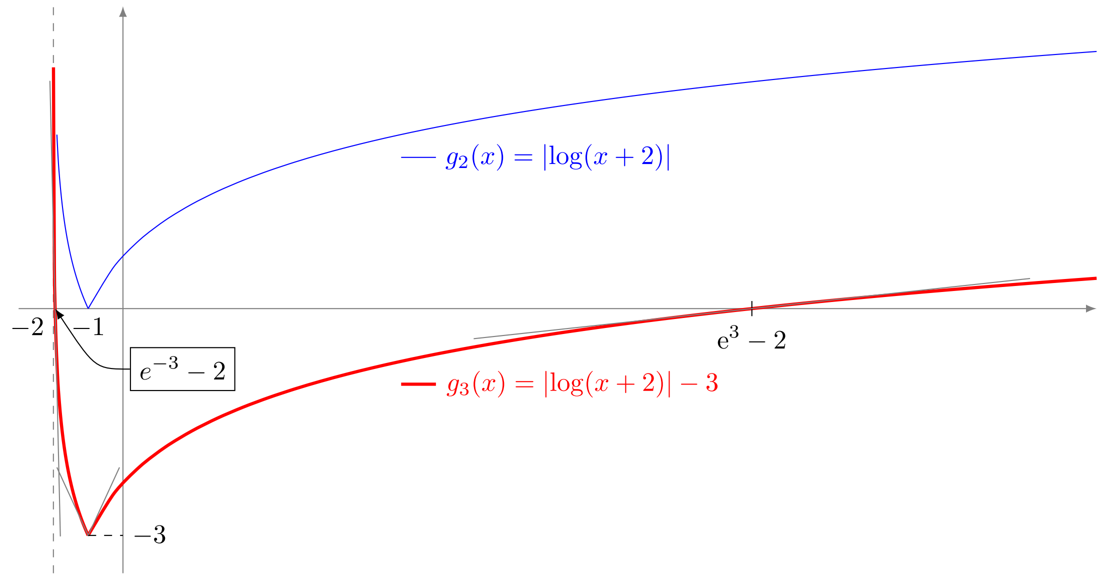
Il grafico di $g_1 := L \circ \tau_2$ si ottiene traslando il grafico del logaritmo $L$ di due unità verso sinistra. Dunque presenta un asintoto verticale per $x \to (-2)^+$, si annulla in $x = -1$ e in tale punto la retta tangente ha coefficiente angolare $g_1'(-1) = 1$.



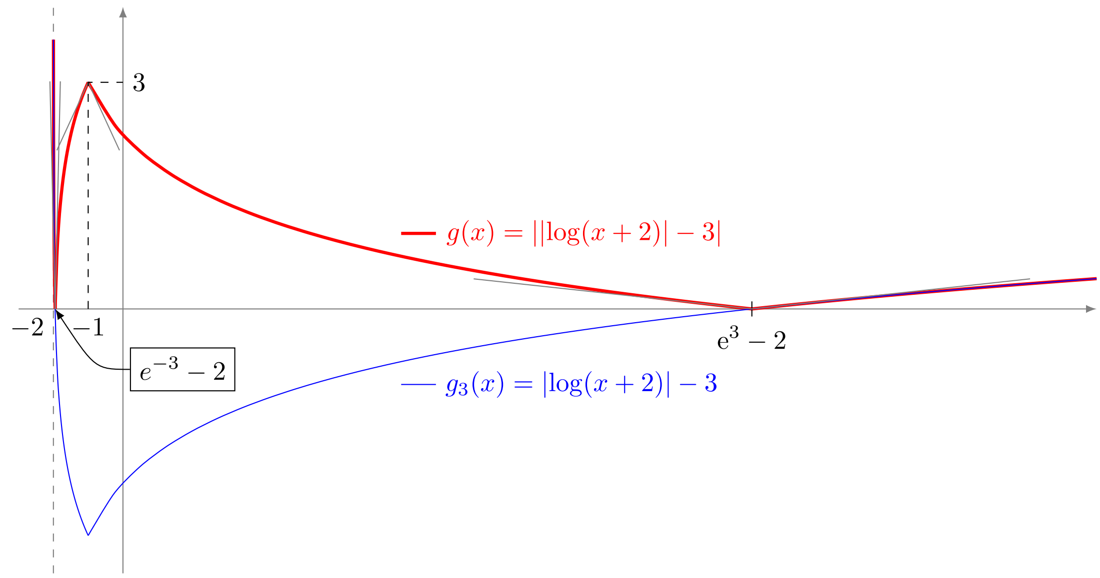

Il grafico di $g_2 := m \circ g_1$ si ottiene ribaltando la porzione del grafico di $g_1$ che si trova sotto l'asse delle $x$. Dunque presenta un asintoto verticale per $x \to (-2)^+$ e un punto di minimo per $x = -1$, in cui si annulla formando un punto angoloso con coefficiente angolare $-1$ a sinistra e $1$ a destra.




Il grafico di $g_3 := \tau_{-3} \circ g_2$ si ottiene traslando il grafico di $g_2$ di tre unità verso il basso. Dunque presenta un asintoto verticale per $x \to (-2)^+$ e un punto di minimo per $x = -1$ con $g_3(-1) = -3$ nel quale presenta un punto angoloso con coefficiente angolare $-1$ a sinistra e $1$ a destra. Inoltre $g_3(x)$ si annulla nei punti in cui si ha $g_2(x) = 3$, ovvero nei punti in cui $\log(x+2) = \pm 3$, ovvero per $x = x_1 := -2 + \mathrm{e}^{-3}$ e $x = x_2 := -2 + \mathrm{e}^{3}$. Intorno al punto $x_1$ abbiamo $g_3(x) = -\log(x+2) - 3$ e dunque la pendenza della retta tangente al grafico di $g_3$ in $(x_1, g_3(x_1))$ vale $m_1 := -\dfrac{1}{x_1+2} = -\mathrm{e}^3$. Intorno al punto $x_2$ abbiamo $g_3(x) = \log(x+2) - 3$ e dunque la pendenza della retta tangente al grafico di $g_3$ in $(x_2, g_3(x_2))$ vale $m_1 := \dfrac{1}{x_2+2} = \mathrm{e}^{-3}$.




Infine il grafico di $g := m \circ g_3$ si ottiene ribaltando la porzione del grafico di $g_3$ che si trova sotto l'asse delle $x$. Dunque presenta un asintoto verticale per $x \to (-2)^+$ e un punto di massimo locale per $x = -1$ con $g(-1) = 3$ nel quale presenta un punto angoloso. Inoltre $g(x)$ si annulla nei punti $x = x_1$ e $x = x_2$. In corrispondenza di tali punti $g(x)$ assume il suo valore minimo $g(x_1) = g(x_2) = 0$ e il grafico presenta due punti angolosi.




5. Tra tutte le rette del piano passanti per il punto $(1, -2)$ determina quelle che sono tangenti al grafico della funzione $y = 1/x$.

**Soluzione:** La funzione $h(x) = 1/x$ ha come derivata la funzione $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Se la retta di equazione $y = mx + q$ è tangente al grafico di $h$ nel punto $P = (p, 1/p)$ (con $p \neq 0$) allora il punto $P$ deve appartenere alla retta, ovvero

$$\frac{1}{p} = mp + q, \tag{1}$$

ed il coefficiente angolare della retta deve coincidere con la derivata di $h$ nel punto $p$, ovvero

$$m = -\frac{1}{p^2}.$$

Inoltre, se la retta passa per il punto $Q = (1, -2)$ allora deve valere anche

$$-2 = m \cdot 1 + q.$$

Dunque

$$q = -2 - m = -2 + \frac{1}{p^2}.$$

Sostituendo le espressioni di $m$ e $q$ in funzione di $p$ nell'equazione (1) troviamo

$$\frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}p - 2 + \frac{1}{p^2}.$$

Moltiplicando entrambi i lati dell'equazione per $p^2$ e portando tutto dalla stessa parte otteniamo l'equazione di secondo grado

$$2p^2 + 2p - 1 = 0,$$

che ha come soluzioni $p = (-1 \pm \sqrt{3})/2$.

In corrispondenza di $p = p_+ := (-1 + \sqrt{3})/2$ troviamo

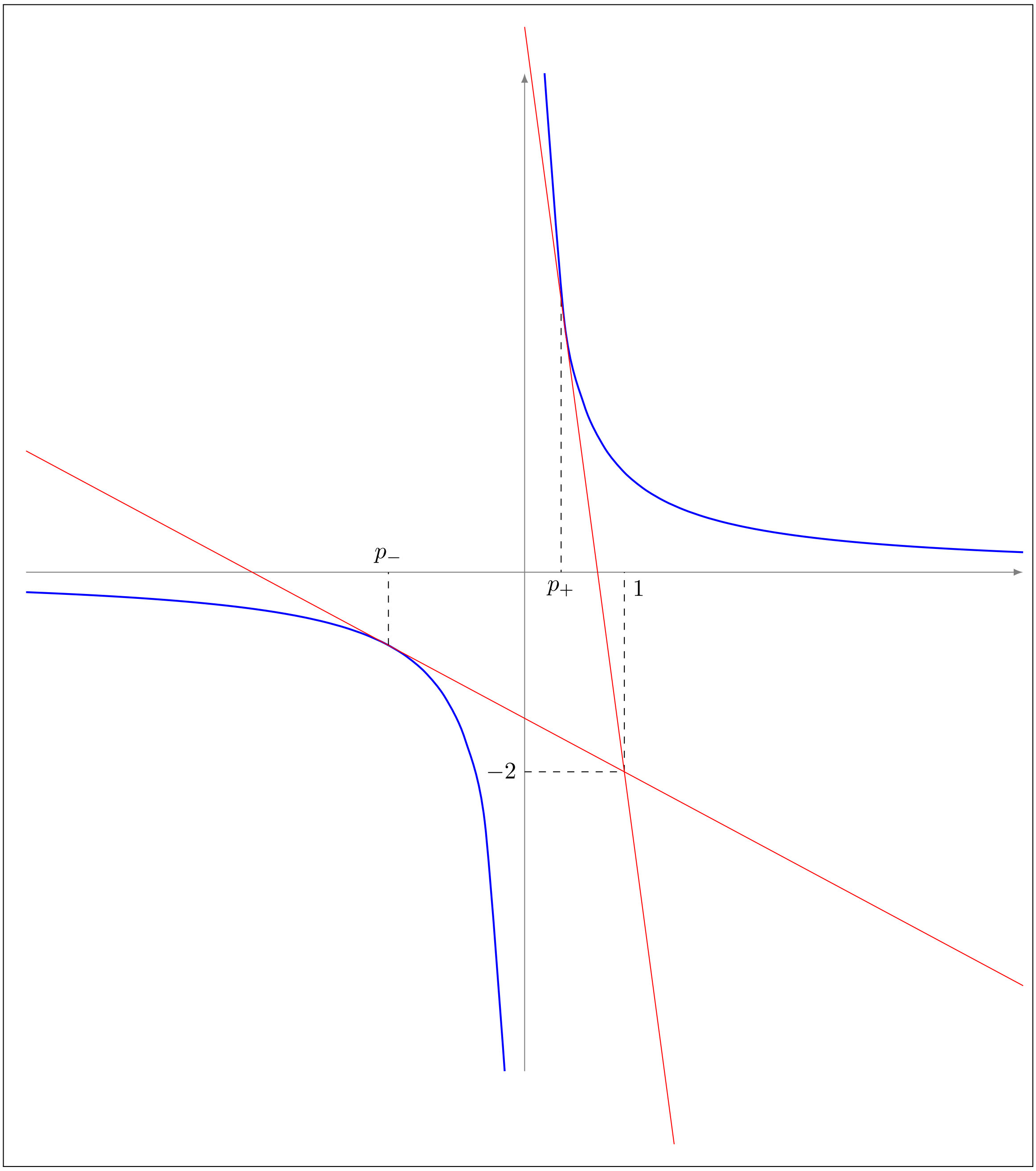
$$m = -\frac{4}{\left(-1 + \sqrt{3}\right)^2} = -\frac{4}{4 - 2\sqrt{3}} = -4 - 2\sqrt{3}, \qquad q = -2 - (-4 - 2\sqrt{3}) = 2 + 2\sqrt{3}.$$

In corrispondenza di $p = p_- := (-1 - \sqrt{3})/2$ troviamo

$$m = -\frac{4}{\left(-1 - \sqrt{3}\right)^2} = -\frac{4}{4 + 2\sqrt{3}} = -4 + 2\sqrt{3}, \qquad q = -2 - (-4 + 2\sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{3}.$$

Troviamo così due rette tangenti al grafico di $h$ passanti per il punto $Q$ le cui equazioni sono

$$y = (-4 - 2\sqrt{3})x + 2 + 2\sqrt{3},$$
$$y = (-4 + 2\sqrt{3})x + 2 - 2\sqrt{3}.$$


$p_-$
$p_+$
$1$
$-2$