Ingegneria Elettronica e Informatica
Analisi Matematica 1a (Foschi)
Compito dell'8.2.2018

1. Determina tutti i punti di accumulazione dell'insieme

$$E := \left\{ \frac{2k}{1+k} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soluzione: L'insieme E è formato dai valori della successione

$$a_k := \frac{2k}{1+k} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right),$$

con $k \in \mathbb{N}$. Siccome il seno di multipli interi di π è zero abbiamo che $a_{2n} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Invece per multipli dispari di $\pi/2$ abbiamo $\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$ e dunque

$$a_{2n-1} = \frac{2(2n-1)}{(2n-1)+1}(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

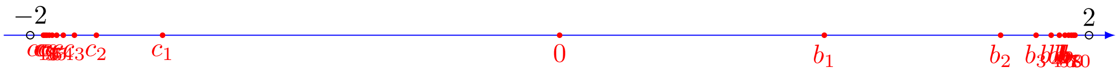
Quando $n = 2m-1$ è dispari otteniamo la successione

$$b_m := a_{4m-3} = 2 - \frac{1}{2m-1};$$

mentre quando $n = 2m$ è pari otteniamo la successione

$$c_m := a_{4m-1} = -2 + \frac{1}{2m}.$$

L'insieme E è dunque l'insieme che contiene 0 e i valori delle successioni b_m e c_m al variare di $m \in \mathbb{N}$. La successione b_m è una successione strettamente crescente e ha come limite 2. La successione c_m è una successione strettamente decrescente e ha come limite -2. Tutti i punti dell'insieme E sono quindi punti isolati e gli unici punti di accumulazione per E sono 2 e -2.



2. Calcola i limiti per $x \to 0$, $x \to 1$ e $x \to +\infty$ della funzione

$$Q(x) := \frac{\sin\big(\pi \cos(2\pi x)\big)}{x \arctan(x)}.$$

Soluzione:

- Vediamo il caso del limite per $x \to 0$. Usando l'approssimazione di McLaurin del secondo ordine per il coseno abbiamo

$$\pi \cos(2\pi x) = \pi \left(1 - \frac{1}{2}(2\pi x)^2 + o(x^2)\right) = \pi - 2\pi^3 x^2 + o(x^2).$$

L'argomento del seno tende dunque a π e siccome $\sin(\pi - t) = \sin(t)$ otteniamo il comportamento del numeratore

$$\sin\big(\pi \cos(2\pi x)\big) = \sin\left(2\pi^2 x^2 + o(x^2)\right) \approx 2\pi^2 x^2.$$

Siccome $\arctan(x) \approx x$ al denominatore abbiamo

$$x \arctan(x) \approx x^2.$$

Il limite per $x \to 0$ risulta quindi essere uguale a $2\pi^2$.

- Vediamo il caso del limite per $x \to 1$. La funzione Q è continua in 1 essendo ottenuta come composizione di funzioni continue e il limite quindi coincide con il valore

$$Q(1) = \frac{\sin(\pi \cos(2\pi))}{\arctan(1)} = 0.$$

- Vediamo il caso del limite per $x \to +\infty$. Il numeratore è una funzione limitata mentre il denominatore tende a $+\infty$ dunque il limite è 0.

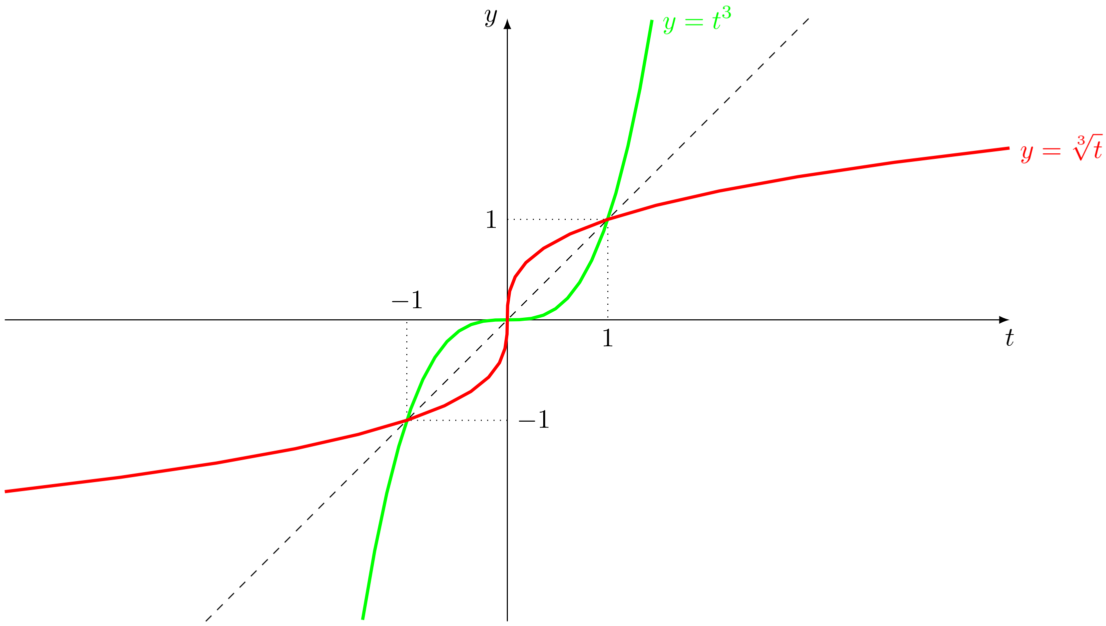
3. Considera la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$. Disegna il grafico delle funzioni $f(x)$, $f(|x|)$ e $|f(x)|$ evidenziandone gli aspetti più peculiari.

Soluzione: Possiamo considerare f come la funzione composta $f(x) = R(S(x))$, dove S è il polinomio

$$S(x) := (x+1)(x-2)^2 = x^3 - 3x^2 + 4,$$

ed R è la funzione radice cubica, $R(t) = \sqrt[3]{t}$.

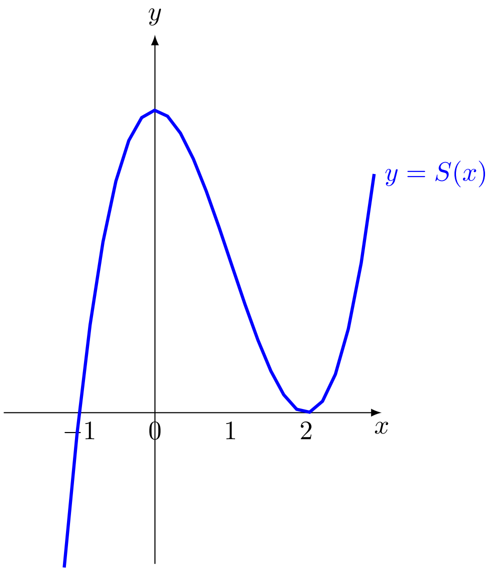
La funzione R è la funzione inversa di $x \mapsto x^3$, è definita su tutto R ed è strettamente crescente. È derivabile in tutti i punti tranne l'origine e la sua derivata è $R'(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$, nell'origine il suo grafico possiede un punto a tangenza verticale. La derivata seconda è $R''(t) = -\dfrac{2}{9t\sqrt[3]{t^2}}$.



Il polinomio $S(x)$ si annulla nei punti -1 e 2; negli altri punti ha lo stesso segno di $x+1$. Tende a $\pm\infty$ quando $x \to \pm\infty$. Le sue derivate sono

$$S'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2), \qquad S''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Quindi $S(x)$ è crescente per $x < 0$ e per $x > 2$, decrescente per $0 < x < 2$, concava per $x < 1$ e convessa per $x > 1$.



La funzione f è continua in quanto composizione di funzioni continue e il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $S(x)$.

Per le regole di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$f'(x) = R'\big(S(x)\big)S'(x) = \frac{3x(x-2)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}.$$

In particolare osserviamo che $f(x)$ ha gli stessi intervalli di monotonia di $S(x)$: ovvero $f(x)$ è crescente per $x < 0$ e per $x > 2$, decrescente per $0 < x < 2$; e abbiamo un punto di massimo locale per $x = 0$ e un punto di minimo locale per $x = 2$. Osserviamo inoltre che $f(x)$ non è derivabile per $x = -1$ e per $x = 2$ e abbiamo

$$\lim_{x\to -1} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty.$$

Dunque il grafico di f presenta un punto a tangenza verticale in $(-1, 0)$ e un punto di cuspide in $(2, 0)$.

Calcoliamo i limiti di $f(x)/x$ per $x \to \pm\infty$ per verificare la presenza di eventuali asintoti obliqui; presentandosi in forma indeterminata ∞/∞ proviamo ad utilizzare la regola di De L'Hopital:

$$m := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}} = 1.$$

Calcoliamo anche i limiti di $f(x) - 1 \cdot x$ per $x \to \pm\infty$,

$$q := \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{S(x)}{x^3}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{1}{3}\Big(-\frac{3}{x}\Big) + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\right) = -1.$$

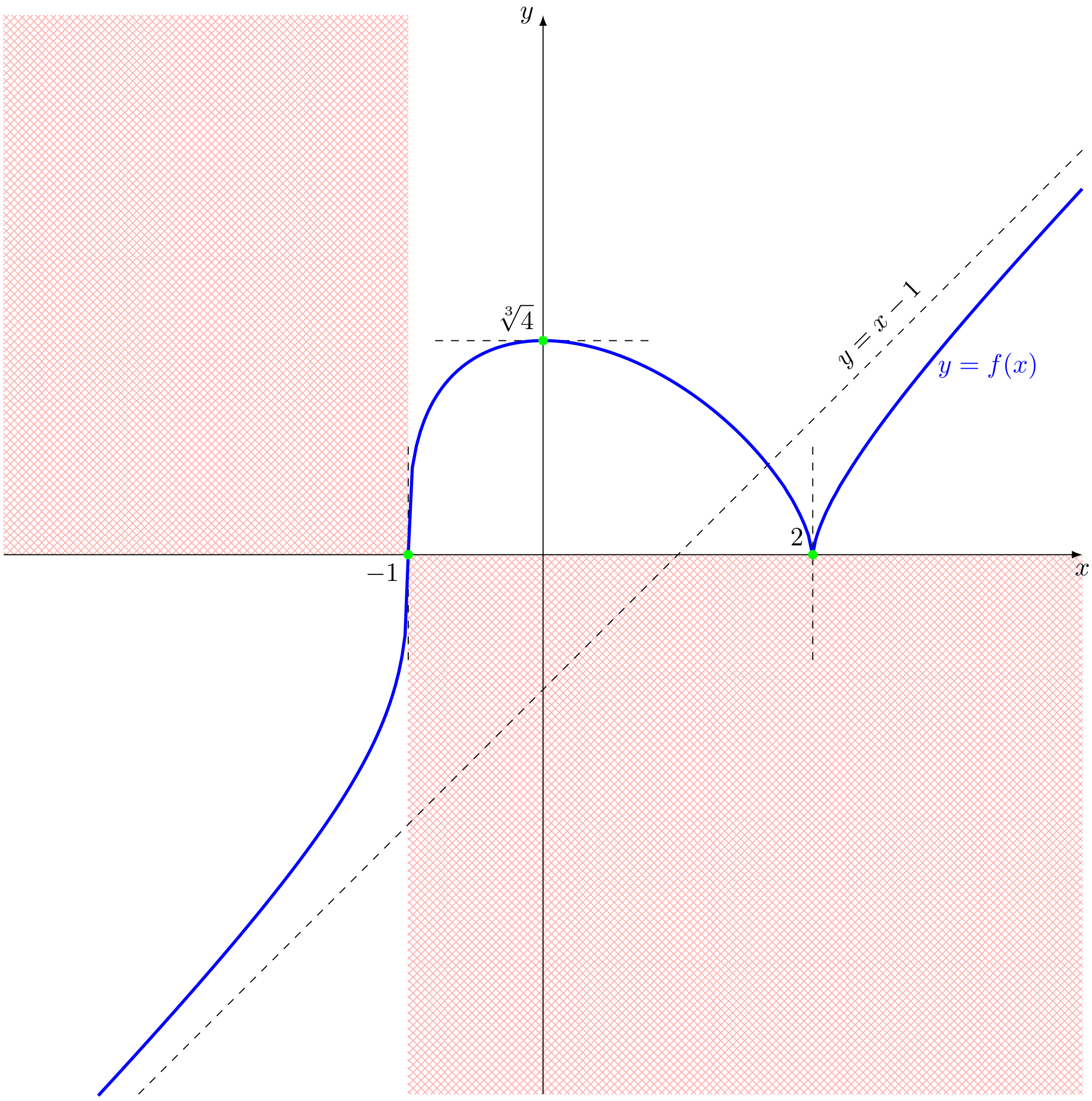
Troviamo così che la retta $y = x - 1$ è un asintoto obliquo per il grafico di $f(x)$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Calcoliamo la derivata seconda di f:

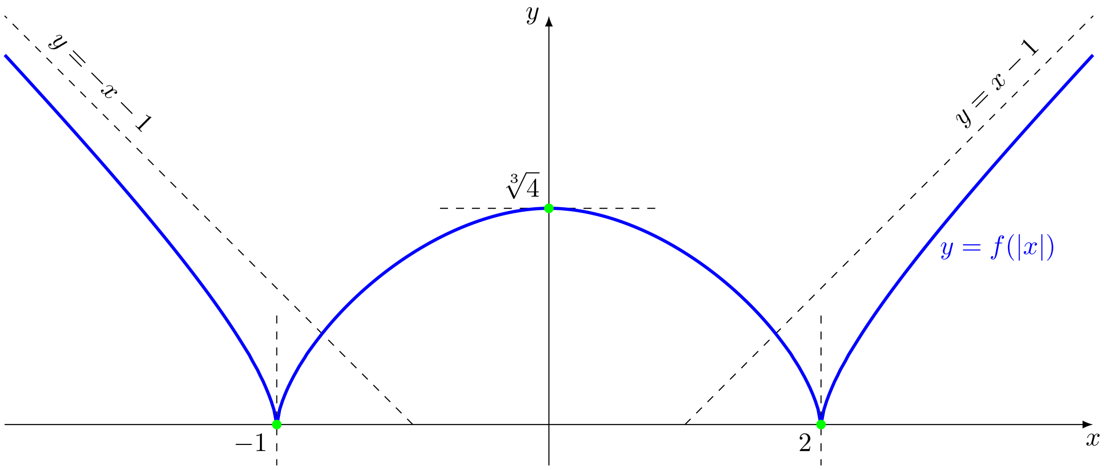
$$f''(x) = R''\big(S(x)\big)\big(S'(x)\big)^2 + R'\big(S(x)\big)S''(x) = -\frac{2}{9}\cdot\frac{\big(3x(x-2)\big)^2}{S(x)\sqrt[3]{S(x)^2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6(x-1)}{\sqrt[3]{S(x)^2}} = \\ = -\frac{2}{(x+1)\sqrt[3]{S(x)^2}}.$$

La derivata seconda esiste finita per $x \neq -1$ e $x \neq 2$ ed ha lo stesso segno di $x+1$. Quindi il grafico di $f(x)$ presenta concavità verso il basso nell'intervallo $]-\infty, -1[$, e concavità verso l'alto sugli intervalli $]-1, 2[$ e $]2, +\infty[$.

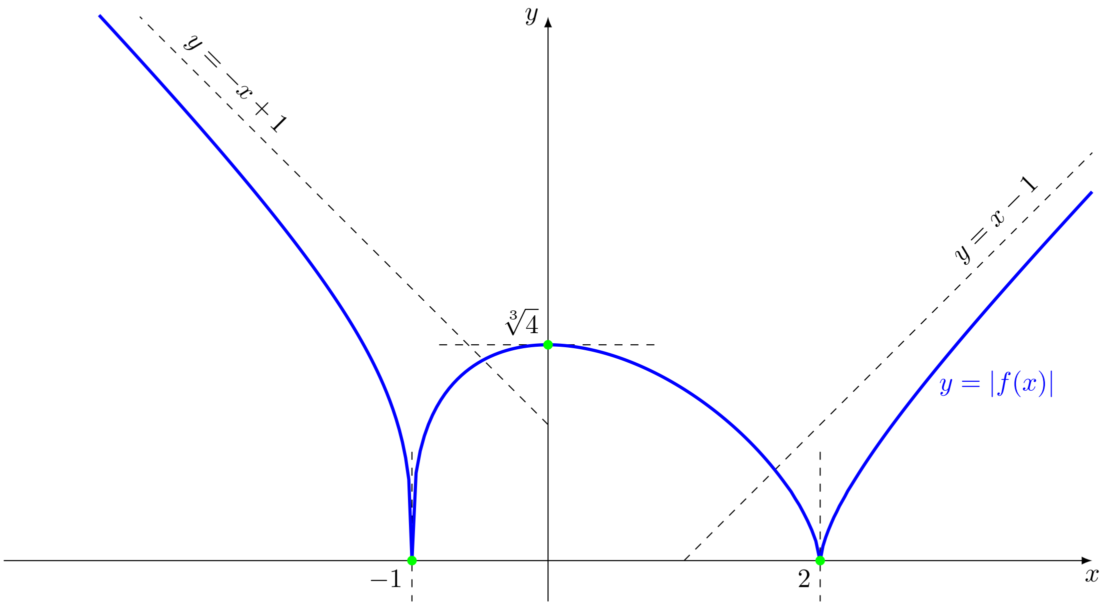
Abbiamo raccolto abbastanza informazioni per poter tracciare il grafico di $f(x)$:



La funzione $f(|x|)$ è una funzione pari che coincide con $f(x)$ per $x \geqslant 0$; dunque il suo grafico si ottiene tramite una simmetria rispetto all'asse y dalla porzione del grafico di $f(x)$ corrispondente a $x \geqslant 0$:



La funzione $|f(x)|$ coincide con $f(x)$ quando $f(x) \geqslant 0$, ovvero per $x \geqslant -1$, mentre è uguale a $-f(x)$ quando $f(x) \leqslant 0$, ovvero per $x \leqslant -1$; dunque il suo grafico si ottiene dal grafico di f ribaltando tramite una simmetria rispetto all'asse x la porzione del grafico di $f(x)$ corrispondente a $x \leqslant -1$:



4. Considera la funzione $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) := \begin{cases} ax, & \text{se } x \in [0,1], \\ x^2 + bx + c, & \text{se } x \in]1,2]. \end{cases}$$

Determina per quali valori dei parametri reali a, b, c la funzione g soddisfa tutte le ipotesi per poter applicare, sul suo intervallo di definizione, il teorema di Rolle.

Soluzione: Per poter applicare il teorema di Rolle la funzione g deve soddisfare le seguenti condizioni: deve essere continua su $[0,2]$, deve essere derivabile su $]0,2[$, e deve assumere gli stessi valori agli estremi dell'intervallo $g(0) = g(2)$.

Entrambi i polinomi ax e $x^2 + bx + c$ sono funzioni continue; per avere continuità di g basterà imporre che $\lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$, ovvero che

$$1 + b + c = a. \tag{1}$$

Entrambi i polinomi ax e $x^2 + bx + c$ sono funzioni derivabili; per avere derivabilità di g basterà imporre che $\lim_{x\to 1^+} g'(x) = g'(1^-)$, ovvero che

$$2 + b = a. \tag{2}$$

La condizione $g(0) = g(2)$ si traduce in

$$0 = 4 + 2b + c. \tag{3}$$

Le tre equazioni (1), (2), (3) formano un sistema lineare di tre equazioni con tre incognite la cui unica soluzione è:

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{5}{2}, \quad c = 1.$$

5. Cosidera la funzione $h(x) := \log\big(\cosh(2x)\big)$.
   - Calcola il polinomio di McLaurin di ordine 6 per la funzione $h(x)$.
   - Calcola il valore delle derivate $h^{(k)}(0)$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Soluzione: L'approssimazione di McLaurin di e^t di ordine 6 è:

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + o(t^6), \quad \text{per } t \to 0.$$

Sostituendo $t = 2x$ otteniamo

$$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + o(x^6), \quad \text{per } x \to 0.$$

Se mettiamo $-x$ al posto di x otteniamo

$$\mathrm{e}^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + o(x^6), \quad \text{per } x \to 0.$$

Se facciamo la media aritmetica delle ultime due espressioni si cancellano i termini di grado dispari e troviamo che

$$\cosh(2x) = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + o(x^6), \quad \text{per } x \to 0. \tag{4}$$

Abbiamo che $\cosh(2x)$ tende a 1 per $x \to 0$ ed inoltre osserviamo che dalla formula (4) si ricava che $\cosh(2x) - 1 \approx 2x^2$ per $x \to 0$.
La nostra funzione h è

$$h(x) = \log\big(\cosh(2x)\big) = \log\big(1 + \big(\cosh(2x) - 1\big)\big) = \log\big(1 + t(x)\big),$$

dove abbiamo posto $t(x) := \cosh(2x) - 1$ e sappiamo che $t(x) \approx 2x^2 \to 0$ per $x \to 0$.
L'approssimazione di McLaurin di $\log(1 + t)$ di ordine 3 è:

$$\log(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3), \quad \text{per } t \to 0. \tag{5}$$

Vogliamo effettuare la sostituzione $t = t(x)$. Usando l'approssimazione del sesto ordine di $\cosh(2x) - 1$ troviamo che

$$
\begin{aligned}
t &= 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + o(x^6),\\
t^2 &= \left(2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2 = 4x^4 + \frac{8}{3}x^6 + o(x^6),\\
t^3 &= \big(2x^2 + o(x^2)\big)^3 = 8x^6 + o(x^6) \approx 8x^6,
\end{aligned}
$$

per $x \to 0$. Dunque sostituendo in (5) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\log\big(\cosh(2x)\big) =& \log\big(1 + t(x)\big) =\\
=& \left(2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6\right) - \frac{1}{2}\left(4x^4 + \frac{8}{3}x^6\right) + \frac{1}{3}\left(8x^6\right) + o(x^6) =\\
=& 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{64}{45}x^6 + o(x^6), \quad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}
$$

Il polinomio di McLaurin di ordine 6 per la funzione $h(x)$ è dunque

$$
2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{64}{45}x^6 = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k,
$$

dove

$$
a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{4}{3}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{64}{45}.
$$

Sappiamo che $h^{(k)}(0) = k!\, a_k$ e dunque

$$
h(0) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad h''(0) = 4, \quad h^{(3)}(0) = 0, \quad h^{(4)}(0) = -32, \quad h^{(5)}(0) = 0, \quad h^{(6)} = 1024.
$$