Ingegneria Elettronica e Informatica
Analisi Matematica 1a (Foschi)
Compito del 25.1.2018

1. Calcola la somma delle seguenti sommatorie di tipo Mengoli:

$$S_1 := \sum_{k=22}^{222} \frac{1}{k(k+1)}, \quad S_2 := \sum_{k=22}^{222} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right), \quad S_3 := \sum_{k=22}^{222} \frac{1}{k(k+3)}.$$

Soluzione: Osserviamo che per ogni $k \neq 0$ e $a \neq -k$ vale l'identità

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} = \frac{a}{k(k+a)}.$$

Le somme S_a risultano quindi essere sommatorie di tipo telescopico. Per S_1 abiamo

$$S_1 = \sum_{k=22}^{222} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=22}^{222} \frac{1}{k} - \sum_{m=23}^{223} \frac{1}{m} = \frac{1}{22} - \frac{1}{223} = \frac{201}{4906}.$$

Per S_2 abbiamo

$$S_2 = \sum_{k=22}^{222} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=22}^{222} \frac{1}{k} - \sum_{m=24}^{224} \frac{1}{m} = \frac{1}{22} + \frac{1}{23} - \frac{1}{223} - \frac{1}{224} = \frac{1010829}{12637856}.$$

Per S_3 abbiamo

$$S_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=22}^{222} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=22}^{222} \frac{1}{k} - \sum_{m=25}^{225} \frac{1}{m}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} - \frac{1}{223} - \frac{1}{224} - \frac{1}{225}\right) = \frac{333278569}{8530552800}.$$

2. Scrivi il limite che è descritto dalla seguente scrittura:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} : \forall x < M, \text{ si ha } 0 \leqslant F(x) < \varepsilon.$$

Soluzione: Possiamo riscrivere la frase nel seguente modo

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in]-\infty, M[, \text{ si ha } F(x) \in [0, \varepsilon[.$$

L'intervallo $[0, \varepsilon[$ è sempre un intorno destro di 0, mentre l'intervallo $]-\infty, M[$ è sempre un intorno (bucato) di $-\infty$. Quindi la frase equivale a

$$\forall U \text{ intorno di } 0,\ \exists V \text{ intorno di } -\infty : \forall x \in V \setminus \{-\infty\}, \text{ si ha } F(x) \in U \cap [0, +\infty[.$$

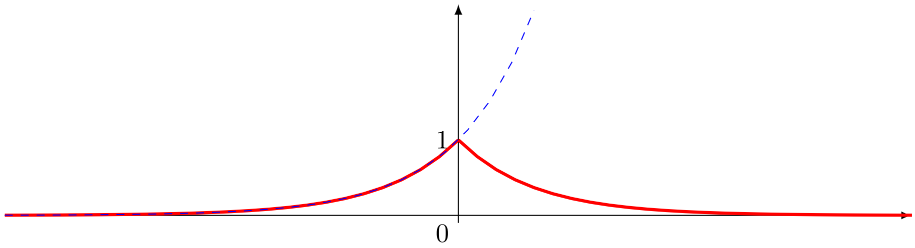
Dunque si tratta del limite

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0^+.$$

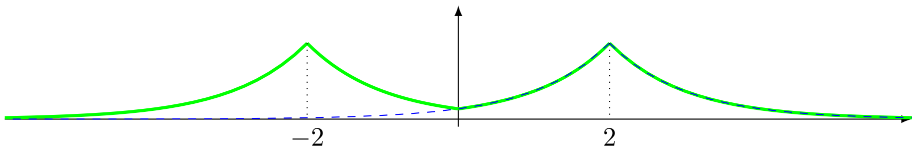
3. Disegna su uno stesso piano cartesiano il grafico delle funzioni f, g, h definite da

$$f(x) := \mathrm{e}^{-|x|}, \qquad g(x) := f\big(|x| - 2\big), \qquad h(x) := \big|f(x) - 2\big|.$$

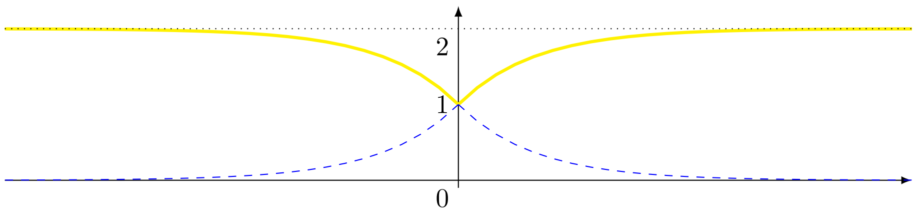
Soluzione: La funzione f è una funzione pari e per $x \leqslant 0$ abbiamo $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dunque il grafico di f si ottiene dal grafico della funzione esponenziale $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, applicando una simmetria rispetto all'asse delle y. Otteniamo un grafico che ha un asintoto orrizontale $y = 0$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$; e un punto angoloso in $(0, 1)$, che è anche punto di massimo, con pendenza 1 a destra e -1 a sinistra. Ecco in rosso il grafico di f:



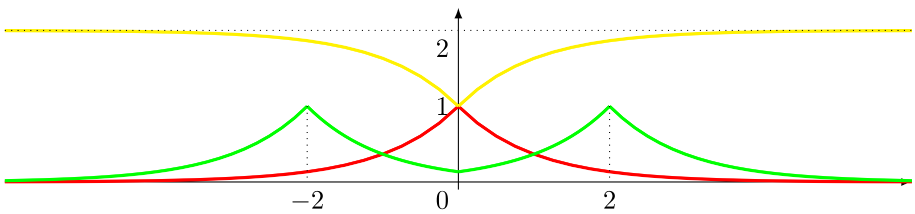
La funzione $f_2(x) := f(x - 2)$ ha grafico che si ottiene traslando quello di f verso destra di un passo 2. La funzione $g(x) = f_2(|x|)$ è una funzione pari il cui grafico coincide con quello di f_2 per $x \geqslant 0$. Otteniamo un grafico che ha sempre $y = 0$ come asintoto orrizontale a $\pm\infty$ e possiede tre punti angolosi in $(-2, 1)$, $(2, 1)$ e $(0, \mathrm{e}^{-2})$. Ecco in verde il grafico di g:



Siccome la funzione f assume valori compresi tra 0 e 1 abbiamo che $h(x) = 2 - f(x)$. Dunque il grafico di h si ottiene ribaltando il grafico di f con una simmetria rispetto all'asse delle x seguita poi da una traslazione verso l'alto di passo 2. Otteniamo un grafico che ha $y = 2$ come asintoto orizzontale a $\pm\infty$ e un punto angoloso in $(0, 1)$. Ecco in giallo il grafico di h:



Mettiamo insieme i tre grafici in uno stesso piano cartesiano:



4. Calcola i limiti per $x \to 0^+$, per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$ della funzione

$$\varphi(x) := \frac{22^{\left(x - \frac{1}{x}\right)} - x^{\left(222 + \frac{1}{x}\right)} + \log x}{22^{\left(x + \frac{1}{x}\right)} + x^{\left(222 - \frac{1}{x}\right)} - \log x}.$$

Soluzione: Vediamo prima il caso $x \to 0^+$. Studiamo il numeratore. Abbiamo che $x - \dfrac{1}{x} \to -\infty$ e quindi $22^{\left(x - \frac{1}{x}\right)} \to 0^+$, inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\left(222 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\left(222 + \frac{1}{x}\right) \log x} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0^+,$$

mentre $\log x \to +\infty$. Dunque abbiamo che il numeratore si comporta come $\log x$:

$$22^{\left(x-\frac{1}{x}\right)} - x^{\left(222+\frac{1}{x}\right)} + \log x \approx \log x \to -\infty.$$

Studiamo il denominatore. Si tratta di una somma di tre termini:

$$\alpha(x) := 22^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}, \qquad \beta(x) := x^{\left(222-\frac{1}{x}\right)}, \qquad \gamma(x) := -\log x.$$

Per il primo abbiamo

$$\alpha(x) = 22^x 22^{\frac{1}{x}} \approx 22^{\frac{1}{x}} \to +\infty;$$

per il secondo abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \beta(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\left(222-\frac{1}{x}\right)\log x} = \mathrm{e}^{+\infty} = +\infty;$$

e anche per il terzo abbiamo $\gamma(x) = -\log x \to +\infty$. Dei tre termini quello dominante è il secondo. Lo possiamo verificare facendo i limiti dei loro rapporti. Abbiamo $\gamma(x) = o\left(\beta(x)\right)$, infatti (tramite sostituzione $t = -\log x$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log x}{x^{\left(222-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{-t(222-\mathrm{e}^t)}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{t(\mathrm{e}^t-222)}} = 0^+;$$

ed abbiamo anche $\alpha(x) = o\left(\beta(x)\right)$, infatti (tramite sostituzione $y = 1/x$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{22^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\left(222-\frac{1}{x}\right)\log x}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{t\log 22}}{\mathrm{e}^{(t-222)\log t}} =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \mathrm{e}^{t\log 22-(t-222)\log t} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0^+.$$

Dunque abbiamo che il numeratore si comporta come $-\gamma(x)$, mentre il denominatore si comporta come $\beta(x)$ e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim_{x 0^+} \frac{-\gamma(x)}{\beta(x)} = 0^-.$$

Vediamo ora il caso $x \to 1$. Essendo $\phi(x)$ una funzione continua in 1 abbiamo semplicemente che

$$\lim_{x\to 1} \phi(x) = \phi(1) = \frac{22^0 - 1^{223} + \log 1}{22^2 + 1^{221} - \log 1} = \frac{0}{485} = 0.$$

Infine consideriamo il caso $x \to +\infty$. Abbiamo i seguenti comportamenti asintotici

$$22^{\left(x\pm\frac{1}{x}\right)} = 22^x 22^{\pm\frac{1}{x}} \approx 22^x,$$
$$x^{\left(222\pm\frac{1}{x}\right)} = x^{222}\mathrm{e}^{\pm(\log x)/x} \approx x^{222}.$$

Ed inoltre abbiamo che $\log x = o\left(22^x\right)$ e $x^{222} = o\left(22^x\right)$. Quindi sia numeratore che denominatore si comportano asintoticamente come 22^x. Ne segue che

$$\lim_{x\to +\infty} \phi(x) = 1.$$

5. (6 points) Dati tre parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ considera la funzione

$$k(x) := A + \sqrt{B\cos(x) + C\sin(x)}.$$

Considera inoltre il polinomio $p(x) := 1 + 2x - x^2$.

- Calcola la derivata prima $k'(x)$ e la derivata seconda $k''(x)$.

- Determina per quali valori di A, B, C si ha che $p(x)$ è un'approssimazione locale di $k(x)$ all'ordine 2 per $x \to 0$.

Soluzione: Scriviamo la funzione k nel seguente modo.

$$k(x) = A + r(x)^{\frac{1}{2}}, \qquad r(x) := B\cos(x) + C\sin(x).$$

Abbiamo

$$r'(x) = -B\sin(x) + C\cos(x), \qquad r''(x) = -B\cos(x) - C\sin(x) = -r(x).$$

La derivata prima di k è

$$k'(x) = \frac{1}{2}r(x)^{-\frac{1}{2}}r'(x) = \frac{-B\sin(x) + C\cos(x)}{2\sqrt{B\cos(x) + C\sin(x)}}.$$

La derivata seconda è un po' più elaborata

$$\begin{aligned}
k''(x) =& \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)r(x)^{-\frac{3}{2}}r'(x)r'(x) + \frac{1}{2}r(x)^{-\frac{1}{2}}r''(x) = \\
=& -\frac{1}{4}r(x)^{-\frac{3}{2}}r'(x)^2 - \frac{1}{2}r(x)^{\frac{1}{2}} \\
=& -\frac{\big(-B\sin(x) + C\cos(x)\big)^2}{4\sqrt{\big(B\cos(x) + C\sin(x)\big)^3}} - \frac{1}{2}\sqrt{B\cos(x) + C\sin(x)}.
\end{aligned}$$

In particolare abbiamo

$$k(0) = A + \sqrt{B}, \qquad k'(0) = \frac{C}{2\sqrt{B}}, \qquad k''(0) = -\frac{C^2}{4\sqrt{B^3}} - \frac{1}{2}\sqrt{B}.$$

Per il polinomio p invece abbiamo

$$p(0) = 1, \qquad p'(0) = 2, \qquad p''(0) = -2.$$

Le funzioni k e p si approssimano localmente tra loro all'ordine 2 se e solo se $k(0) = p(0)$, $k'(0) = p'(0)$, $k''(0) = p''(0)$, ovvero quando i parametri A, B, C verificano il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases}
A + \sqrt{B} = 1, \\
\dfrac{C}{2\sqrt{B}} = 2, \\
-\dfrac{C^2}{4\sqrt{B^3}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{B} = -2.
\end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo che $\sqrt{B} = C/4$, da cui deduciamo che deve essere $C > 0$; sostituendo nella terza otteniamo l'equazione

$$-\frac{16}{C} - \frac{C}{8} = -2,$$

che si riduce all'equazione di secondo grado

$$C^2 - 16C + 128 = 0.$$

Il discriminante di tale equazione è

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 128 = -256 < 0.$$

Essendo il discriminante negativo, l'equazione non ammette soluzioni reali. Dunque non esistono valori per A, B, C che realizzano l'approssimazione cercata.