Ingegneria Elettronica e Informatica
Analisi Matematica 1a (Foschi)
Compito del 11.1.2018

1. Tre numeri reali positivi formano una progressione geometrica. La loro media aritmetica è 5, mentre la loro media geometrica è 3. Determina la ragione della progressione.

Soluzione: Siano A, B, C i 3 numeri positivi in progressione. Se indichiamo con q la ragione della progressione, avremo $B = Aq$ e $C = Aq^2$.
La media aritmetica è data da

$$\frac{A+B+C}{3} = \frac{A}{3}\left(1+q+q^2\right).$$

La media geometrica è data da

$$\sqrt[3]{ABC} = Aq.$$

Dalle ipotesi quindi ricaviamo che

$$\frac{A}{3}\left(1+q+q^2\right) = 5, \quad Aq = 3$$

Dalla seconda equazione ricaviamo che $A/3 = 1/q$ e sostituendo nella prima otteniamo

$$\frac{1}{q}(1+q+q^2) = 5,$$

che si riduce all'equazione di secondo grado

$$q^2 - 4q + 1 = 0.$$

Le due soluzioni possibili sono $q_+ = 2+\sqrt{3}$ e $q_- = 2-\sqrt{3}$. Osserviamo che i due valori sono uno il reciproco dell'altro, $q_+q_- = 1$, e generano due sequenze con gli stessi 3 numeri ma ordinati in senso contrario:

$$\begin{array}{llll} q_+: & A = 3(2-\sqrt{3}), & B = 3, & C = 3(2+\sqrt{3}); \\ q_-: & A = 3(2+\sqrt{3}), & B = 3, & C = 3(2-\sqrt{3}). \end{array}$$

2. Calcola, se esistono, i valori dei limiti per $x \to -\infty$, $x \to 0$ e $x \to +\infty$ della funzione

$$x \cdot \arctan\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) \cdot \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x - \arctan(x)}.$$

Soluzione: Siano

$$g_1(x) := \mathrm{e}^x - 1, \quad g_2(x) := \arctan\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right), \quad g_3(x) := \frac{x}{x - \arctan(x)}.$$

La funzione di cui vogliamo calcolare i limiti è data dal prodotto $g_1(x)g_2(x)g_3(x)$.

- Limite per $x \to -\infty$. Abbiamo che $\mathrm{e}^x \to 0^+$ e quindi

$$\lim_{x\to-\infty} g_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1. \tag{1}$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty.$$

Per il limite di funzioni composte abbiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} g_2(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x}{e^x}\right) = \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Essendo l'arcotangente una funzione limitata abbiamo anche che

$$x - \arctan(x) \approx x, \text{ per } x \to -\infty,$$

e dunque

$$\lim_{x\to-\infty} g_3(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-\arctan(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1. \tag{3}$$

Il limite del prodotto è il prodotto dei limiti e quindi mettendo insieme i limiti (1), (2) e (3) otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} g_1(x)g_2(x)g_3(x) = (-1)\left(-\frac{\pi}{2}\right)(1) = \frac{\pi}{2}.$$

- Limite per $x \to 0$. Per il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ abbiamo che

$$g_1(x) = e^x - 1 \approx x, \text{ per } x \to 0. \tag{4}$$

L'approssimazione di McLaurin per la funzione arcotangente ci dice che

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \text{ per } x \to 0.$$

Da essa ricaviamo che $x - \arctan(x) \approx \frac{1}{3}x^3$, e dunque

$$g_3(x) = \frac{x}{x-\arctan(x)} \approx \frac{x}{\frac{1}{3}x^3} = 3/x^2, \text{ per } x \to 0. \tag{5}$$

Inoltre $e^x \approx 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 0$; se $x \to 0$ abbiamo $\arctan(x) \approx x$; sostituendo a x l'infinitesimo x/e^x otteniamo

$$g_2(x) = \arctan\left(\frac{x}{e^x}\right) \approx \frac{x}{e^x} \approx x, \text{ per } x \to 0. \tag{6}$$

Combinando insieme (4), (5) e (6) otteniamo

$$g_1(x)g_2(x)g_3(x) \approx x \cdot x \cdot \frac{3}{x^2} = 3, \text{ per } x \to 0,$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} g_1(x)g_2(x)g_3(x) = 3.$$

- Limite per $x \to +\infty$. In questo caso abbiamo

$$g_1(x) = e^x - 1 \approx e^x, \text{ per } x \to +\infty, \tag{7}$$

e

$$g_3(x) = \frac{x}{x-\arctan(x)} \approx \frac{x}{x} = 1, \text{ per } x \to +\infty. \tag{8}$$

Siccome x/e^x è infinitesimo anche per $x \to +\infty$ abbiamo

$$g_2(x) = \arctan\left(\frac{x}{e^x}\right) \approx \frac{x}{e^x}, \text{ per } x \to +\infty. \tag{9}$$

Combinando insieme (7), (8) e (9) otteniamo

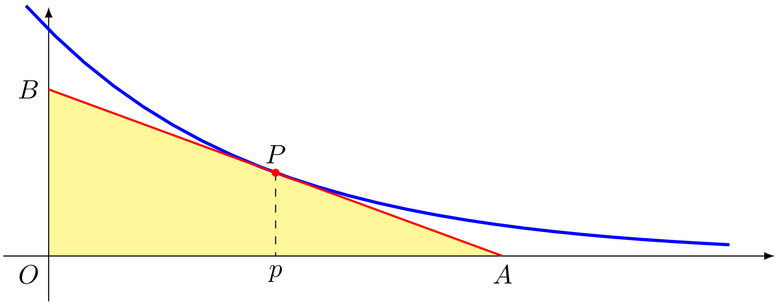
$$g_1(x)g_2(x)g_3(x) \approx e^x \cdot \frac{x}{e^x} \cdot 1 = x, \text{ per } x \to +\infty,$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} g_1(x)g_2(x)g_3(x) = +\infty.$$

3. Dato $p \in \mathbb{R}$ sia r_p la retta tangente al grafico della funzione $y = \mathrm{e}^{-x}$ nel punto $P = (p, \mathrm{e}^{-p})$.

- Determina l'equazione cartesiana della retta r_p.
- Determina in funzione di p le coordinate del punto del punto $A = (a(p), 0)$ in cui r_p interseca l'asse delle x, e le coordinate del punto del punto $B = (0, b(p))$ in cui r_p interseca l'asse delle y.
- Sia $O = (0, 0)$. Determina per quale valore di $p \geqslant 0$ l'area del triangolo AOB risulta essere massima.



Soluzione:

- La derivata di e^{-x} è $-\mathrm{e}^{-x}$, e dunque la retta tangente r_p è la retta che passa per il punto $P = (p, \mathrm{e}^{-p})$ con pendenza $-\mathrm{e}^{-p}$, e ha equazione

$$r_p : \quad y = \mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-p}(x - p).$$

- Se $A = (a(p), 0)$ è l'intersezione di r_p con l'asse x avremo

$$0 = \mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-p}(a(p) - p),$$

da cui ricaviamo $a(p) = p + 1$. Se $B = (0, b(p))$ è l'intersezione di r_p con l'asse y avremo

$$b(p) = \mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-p}(0 - p),$$

da cui ricaviamo $b(p) = \mathrm{e}^{-p}(p + 1)$.

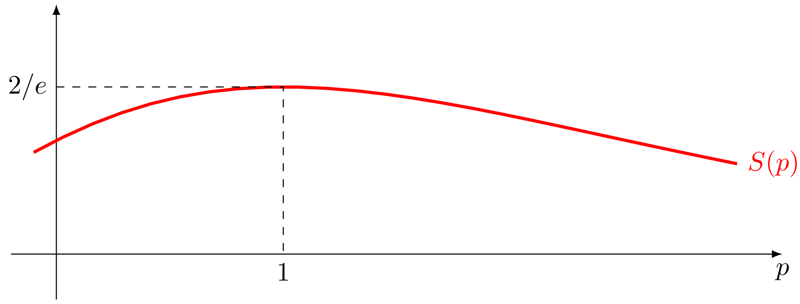
- L'area S del triangolo AOB è descritta dalla funzione

$$S(p) := \frac{1}{2}a(p)b(p) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-p}(p + 1)^2.$$

Si tratta di una funzione derivabile e la sua derivata è

$$S'(p) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-p}\big(-(p + 1)^2 + 2(p + 1)\big) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-p}(1 - p^2).$$

Osserviamo che per valori di p positivi abbiamo che $S'(p)$ è positiva per $0 < p < 1$, ed è negativa per $p > 1$. Quindi $S(p)$ è crescente su $[0, 1]$ e decrescente su $[1, +\infty]$. Il valore massimo dell'area del triangolo si ottiene quindi per $p = 1$, per il quale abbiamo $S(1) = 2/\mathrm{e}$.



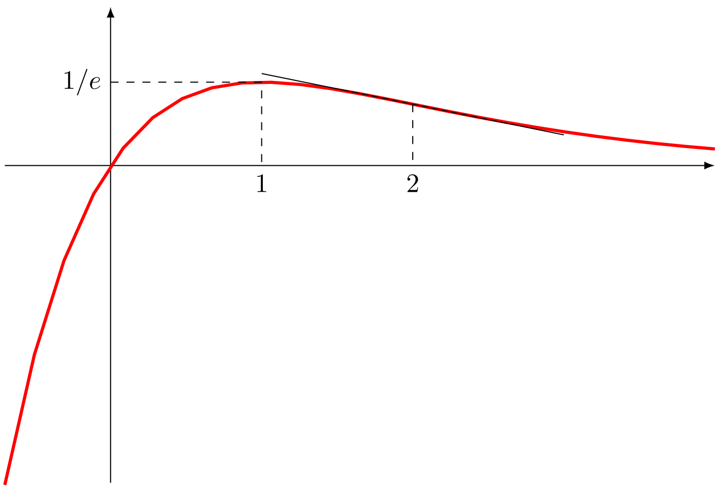
4. Disegna il grafico della funzione
$$f(x) := \left|\arctan\left(\frac{x}{e^x}\right)\right|.$$

Soluzione: Abbiamo $f(x) = |g(x)|$ con $g(x) = \arctan(h(x))$ e $h(x) = xe^{-x}$. Il dominio naturale per tutte e tre le funzioni è tutta la retta reale $\mathbb{R}$.

Studiamo prima il grafico di h. Si tratta di una funzione derivabile e
$$h(x) = xe^{-x}, \quad h'(x) = (1-x)e^{-x}, \quad h''(x) = (x-2)e^{-x}.$$

Abbiamo che $h(x) = xe^{-x}$ è una funzione derivabile e la sua derivata prima è $h'(x) = (1-x)e^{-x}$. Osserviamo che il segno di $h(x)$ coincide con il segno di x, mentre il segno di $h'(x)$ coincide con il segno di $1-x$. e il segno di $h''(x)$ coincide con il segno di $x-2$. Dunque h è negativa per $x < 0$, positiva per $x > 0$, in 0 vale $h(0) = 0$; crescente per $x < 1$, decrescente per $x > 1$, in 1 ha un punto di massimo locale con $h(1) = 1/e$; ha la concavità rivolta verso il basso per $x < 2$, e verso l'alto per $x > 2$, in 2 ha un punto di flesso. Inoltre,
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = -\infty.$$

C'è quindi un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, e non c'è asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Abbiamo così elementi sufficienti per poter tracciare un grafico di h:



La funzione g si ottiene componendo h con la funzione arcotangente. Per la formula della derivata di funzioni composte abbiamo
$$g(x) = \arctan(h(x)), \quad g'(x) = \frac{h'(x)}{1 + (h(x))^2}.$$

Osserviamo che il segno di g coincide con il segno di h e il segno di g' coincide con il segno di h', in particolare la funzione g ha gli stessi intervalli di monotonia della funzione h.

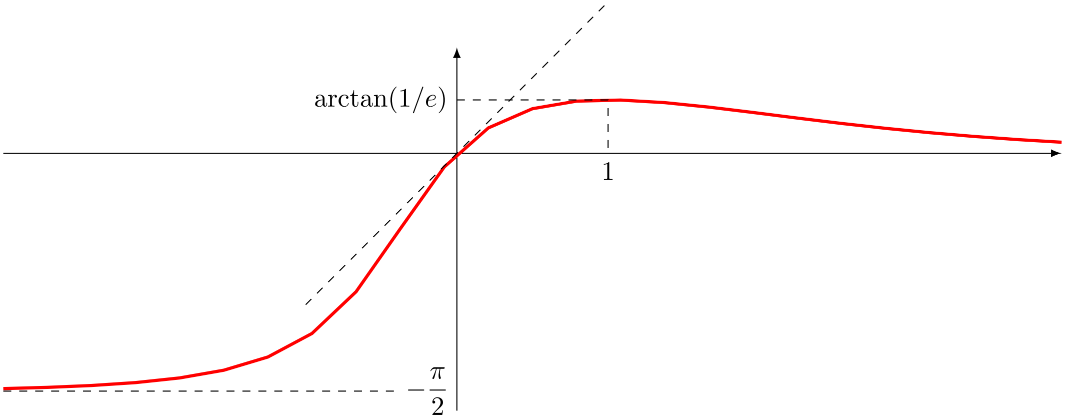
Dunque g è negativa per $x < 0$, positiva per $x > 0$, in 0 vale $g(0) = 0$; crescente per $x < 1$, decrescente per $x > 1$, in 1 ha un punto di massimo locale con $g(1) = \arctan(1/e)$. Inoltre abbiamo
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{y\to 0^+} \arctan(y) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ci sono quindi asintoti orizzontali per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Per la derivata seconda abbiamo invece
$$g''(x) = \frac{h''(x)(1 + (h(x))^2) - 2h(x)(h'(x))^2}{(1 + (h(x))^2)^2}.$$

Svolgendo i calcoli per la derivata seconda si trova che

$$g''(x) = \frac{e^x}{x^2 + e^{2x}} \left((x-2)e^{2x} - x\left(1 + (x-1)^2\right) \right).$$

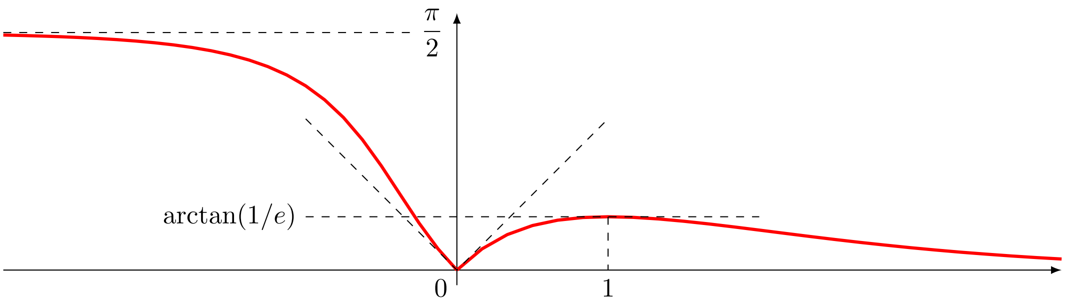
Lo studio completo del segno della derivata seconda di g risulta complicato e lo tralasciamo. Osserviamo solamente che risulta $g''(x) > 0$ definitivamente per $x \to \pm\infty$. Per $x = 0$ abbiamo $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ e $g''(0) = -2$, quindi g ha la concavità rivolta verso il basso intorno a $x = 0$. Abbiamo così elementi sufficienti per poter tracciare un grafico qualitativo di g:



La funzione f si ottiene applicando il valore assoluto ai valori della funzione g. Dunque il grafico di $f(x)$ coincide con quello di $g(x)$ per $x \geqslant 0$, mentre risulta essere simmetrico rispetto all'asse x a quello di $g(x)$ per $x \leqslant 0$. Nel punto $x = 0$ si forma dunque un punto angoloso, con derivata destra e sinistra di valore opposto,

$$f'(0^-) = -g'(0) = -1, \quad f'(0^+) = g'(0) = 1.$$

Abbiamo così elementi sufficienti per poter tracciare un grafico qualitativo di f:



5. Usando solo numeri razionali e le 4 operazioni $+, -, \cdot, /$ determina una approssimazione della radice cubica di 65 con un errore inferiore a 10^{-3}.

Soluzione: Consideriamo la funzione $R(x) := \sqrt[3]{x}$. Vogliamo calcolare un valore approssimato di $R(65)$. Osserviamo che $R(64) = \sqrt[2]{2^6} = 4$. Utilizziamo i polinomi di Taylor che approssimano R intorno al punto $p = 64$. Abbiamo

$$\begin{aligned} R(x) &= x^{1/3}, & R(64) &= 4, \\ R'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3}, & R'(64) &= \frac{1}{48}, \\ R''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-5/3}, & R''(64) &= -\frac{1}{4608}. \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor di ordine 1 è

$$P(x) := R(64) + R'(64)(x-64) = 4 + \frac{1}{48}(x-64).$$

L'errore $E := P(65) - R(65)$ che si commette approssimando la radice cubica con il polinomio di Taylor può essere stimato con la formula del resto nella forma di Lagrange:

$$|E| \leqslant \frac{1}{2!} \sup_{64<\xi<65} |R''(\xi)| \, (65-64)^2 = \frac{1}{9} \sup_{64<\xi<65} \xi^{-5/3} = \frac{1}{9} \cdot 64^{-5/3} = \frac{1}{4608} < 10^{-3}.$$

Dunque l'approssimazione del primo ordine è sufficiente a garantire la precisione richiesta e abbiamo

$$\sqrt[3]{65} \approx P(65) = 4 + \frac{1}{48} = \frac{193}{48} = 4,0208\overline{3}.$$