Ingegneria Elettronica e Informatica
Analisi Matematica 1a (Foschi)
Compito del 18.12.2018

1. Utilizzando la formula di Newton per le potenze del binomio calcola il valore della somma

$$\sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 9^k.$$

Soluzione: Ricordiamo la formula di Newton per le potenze del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Per $n = 100$, $a = 1$, $b = 9$, essa diventa

$$(1+9)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 1^{100-k} 9^k,$$

che si semplifica in

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 9^k = 10^{100}.$$

La somma richiesta è dunque

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 9^k = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 9^k - \binom{100}{0} 9^0 - \binom{100}{1} 9^1 = 10^{100} - 1 - 900 = 10^{100} - 901 = \\
&\qquad\qquad = 99999999999999999999999999999999999999999999999999999 \\
&\qquad\qquad\quad 99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999099.
\end{aligned}$$

Si tratta di un numero naturale composto da 99 cifre che sono tutte uguali a 9 tranne la cifra delle centinaia che è uguale a 0.

2. Calcola i limiti per $x \to 0$ e per $x \to 1^-$ della seguente quantità:

$$\frac{\sqrt{1-x^2} - \cos(x)}{\sin(\pi x)\log(1-x^3)}. \tag{1}$$

Soluzione: Per il calcolo del limite per $x \to 0$ utilizziamo approssimazioni polinomiali dei vari termini. Per il coseno sappiamo che

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \quad \text{per } x \to 0.$$

Per la radice, se $R(t) := (1+t)^{1/2}$ abbiamo che $R'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2}$, $R''(t) = -14(1+t)^{-3/2}$ e $R(0) = 1$, $R'(0) = \frac{1}{2}$, $R''(0) = -\frac{1}{4}$; dunque

$$\sqrt{1+t} = R(t) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + o(t^2), \quad \text{per } t \to 0.$$

Sostituendo $t = -x^2$ otteniamo

$$\sqrt{1-x^2} = R(-x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4), \quad \text{per } x \to 0.$$

Il numeratore di (1) quindi si approssima con

$$\sqrt{1-x^2} - \cos(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) =$$
$$= -\frac{7}{24}x^4 + o(x^4) \approx -\frac{7}{24}x^4, \quad \text{per } x \to 0.$$

Inoltre, usando le approssimazioni al primo ordine di $\sin(t)$ e $\log(1+t)$ per $t \to 0$,

$$\sin(t) \approx t, \qquad \log(1+t) \approx t,$$

otteniamo

$$\sin(\pi x) \approx \pi x, \qquad \log(1-x^3) \approx -x^3, \quad \text{per } x \to 0.$$

Il denominatore di (1) quindi si approssima con

$$\sin(\pi x)\log(1-x^3) \approx -\pi x^4, \quad \text{per } x \to 0.$$

Siamo in grado ora di calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos(x)}{\sin(\pi x)\log(1-x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{7}{24}x^4}{-\pi x^4} = \frac{7}{24\pi}.$$

Per il calcolo del limite per $x \to 1^-$ osserviamo che il numeratore di (1) è una funzione continua nel punto $x = 1$ e dunque

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} - \cos(x) = -\cos(1) < 0.$$

Al denominatore invece abbiamo $\sin(\pi x)$ che è infinitesimo moltiplicato per $\log(1-x^3)$ che è un infinito per $x \to 1^-$. Per risolvere la forma indeterminata effettuiamo un cambio di variabile, $x = 1 - t$, per riportarci ad un limite in zero e usare aprrossimazioni e limiti notevoli noti,

$$\lim_{x\to 1^-} \sin(\pi x)\log(1-x^3) = \lim_{t\to 0^+} \sin\big(\pi(1-t)\big)\log\big(1-(1-t)^3\big) =$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \sin(\pi - \pi t)\log\big(t(3-3t+t^2)\big) = \lim_{t\to 0^+} \sin(\pi t)\left(\log(t) + \log(3-3t+t^2)\right) = 0^-,$$

in quanto

$$\sin(\pi t) \approx \pi t, \quad \log(t) + \log(3-3t+t^2) \approx \log(t),$$

e $t\log(t) \to 0^-$ per $t \to 0^+$. Dunque otteniamo che il limite per $x \to 1^-$ di (1) è il limite del rapporto tra un numeratore che tende ad un numero negativo e un denominatore infinitesimo anch'esso negativo, e dunque

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos(x)}{\sin(\pi x)\log(1-x^3)} = +\infty.$$

3. Siano $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Sappiamo che le funzioni f, f', g, g' nei punti $-1, 0, 1$ assumono i valori indicati in tabella.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
-1	1	1	0	2
0	-1	-2	1	1
1	0	3	-1	-3

Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $h(x) := g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 1$.

Soluzione: Per la regola di derivazione delle funzioni composte abbiamo $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Ricaviamo i valori di h e h' nel punto $x = 1$ utilizzando le informazioni della tabella:

$$h(1) = g(f(1)) = g(0) = 1, \qquad h'(1) = g'(f(1))f'(1) = g'(0)f'(1) = 1 \cdot 3 = 3.$$

La retta tangente al grafico di h nel punto di ascissa $x = 1$ ha equazione

$$y = h(1) + h'(1)(x-1),$$

ovvero

$$y = 1 + 3(x-1) = 3x - 2.$$

4. Disegna il grafico della funzione $F(x) := \mathrm{e}^{-x^2}\sqrt{|9-x|}$, avendo cura di determinare i punti estremali locali, i punti singolari ed eventuali asintoti.

Soluzione: La funzione F è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è una funzione continua in quanto ottenuta tramite composizioni e prodotti con funzioni continue. Assume valori sempre non negativi in quanto sia l'esponenziale che la radice quadrata assumono valori non negativi.

Per $x \to \pm\infty$ abbiamo che il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{|9-x|}}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0^+,$$

in quanto $\sqrt{|9-x|} \approx |x|^{1/2}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|^{1/2}}{\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1/4}}{\mathrm{e}^{t}} = 0^+.$$

Il grafico di F presenta quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.

Per eliminare il valore assoluto possiamo scrivere

$$F(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2}(9-x)^{\frac{1}{2}}, & \text{per } x \leqslant 9, \\ \mathrm{e}^{-x^2}(x-9)^{\frac{1}{2}}, & \text{per } x \leqslant 9. \end{cases}$$

Si tratta di una funzione sicuramente derivabile per $x \neq 9$; quando $x < 9$ abbiamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= D\left[\mathrm{e}^{-x^2}\right](9-x)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{-x^2} D\left[(9-x)^{\frac{1}{2}}\right] = \\ &= \mathrm{e}^{-x^2}\left(-2x(9-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(9-x)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2\sqrt{9-x}}\left(-4x(9-x)-1\right) = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2\sqrt{9-x}}\left(4x^2 - 36x - 1\right); \end{aligned}$$

mentre per $x > 9$ abbiamo

$$\begin{aligned}F'(x) &= D\left[e^{-x^2}\right](x-9)^{\frac{1}{2}} + e^{-x^2} D\left[(x-9)^{\frac{1}{2}}\right] = \\ &= e^{-x^2}\left(-2x(x-9)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x-9)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x-9}}\left(-4x(x-9)+1\right) = \\ &= -\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x-9}}\left(4x^2-36x-1\right).\end{aligned}$$

Per $x \to 9$ abbiamo i seguenti limiti della derivata:

$$F'(9^-) = \lim_{x\to 9^-} F'(x) = -\infty, \quad F'(9^+) = \lim_{x\to 9^+} F'(x) = +\infty,$$

e dunque nel punto del grafico di F con ascissa $x = 9$ abbiamo un punto di cuspide.

Il segno di $F'(x)$ coincide con il segno di $4x^2 - 36x - 1$ per $x < 9$ e con l'opposto del segno di $4x^2 - 36x - 1$ per $x > 9$. Le radici del trinomio $4x^2 - 36x - 1$ sono

$$\begin{aligned}x_1 &:= \frac{18-\sqrt{18^2+4}}{4} = \frac{9-\sqrt{82}}{2} = -\frac{1}{2\left(9+\sqrt{82}\right)} \in]1/36, 0[, \\ x_2 &:= \frac{18+\sqrt{18^2+4}}{4} = \frac{9+\sqrt{82}}{2} \in]9, 19/2[.\end{aligned}$$

Dunque abbiamo che $F(x)$ è crescente (ovvero $F'(x) > 0$) quando $x < x_1$ o $9 < x < x_2$, ed è decrescente quando $x_1 < x < 9$ o $x > x_2$. Nei punti critici x_1 e x_2 abbiamo dei massimi locali con valori

$$F(x_1) = e^{-x_1^2}\sqrt{9-x_1} = e^{-\frac{163-18\sqrt{82}}{4}}\sqrt{\frac{27-\sqrt{82}}{2}}, \tag{2}$$

$$F(x_2) = e^{-x_2^2}\sqrt{x_2-9} = e^{-\frac{163+18\sqrt{82}}{4}}\sqrt{\frac{\sqrt{82}-9}{2}}. \tag{3}$$

Osserviamo che $F(x_1) > F(x_2)$. Nel punto di cuspide $x = 9$ abbiamo un punto di minimo con $F(9) = 0$.

Lo studio del segno della derivata a mano seconda risulta piuttosto elaborato, ecco un possibile modo di affrontarlo. Quando $x < 9$ abbiamo

$$\begin{aligned}F''(x) = \frac{1}{2}D\left[e^{-x^2}(9-x)^{-\frac{1}{2}}\left(4x^2-36x-1\right)\right] &= \\ = \frac{1}{2}e^{-x^2}(-2x)(9-x)^{-\frac{1}{2}}\left(4x^2-36x-1\right) &+ \\ + \frac{1}{2}e^{-x^2}\frac{1}{2}(9-x)^{-\frac{3}{2}}\left(4x^2-36x-1\right) &+ \\ + \frac{1}{2}e^{-x^2}(9-x)^{-\frac{1}{2}}(8x-36x) &= \\ = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}}{(9-x)^{\frac{3}{2}}}\left((-2x)(9-x)\left(4x^2-36x-1\right) + \frac{1}{2}\left(4x^2-36x-1\right) + (9-x)(8x-36)\right).\end{aligned}$$

Quando $x > 9$ abbiamo

$$F''(x) = -\frac{1}{2} D \left[\mathrm{e}^{-x^2} (x-9)^{-\frac{1}{2}} \left(4x^2 - 36x - 1\right) \right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\,(x-9)^{-\frac{1}{2}} \left(4x^2 - 36x - 1\right) +$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x-9)^{-\frac{3}{2}} \left(4x^2 - 36x - 1\right) +$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}(x-9)^{-\frac{1}{2}} (8x - 36x) =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{(x-9)^{\frac{3}{2}}} \left((-2x)(x-9)\left(4x^2 - 36x - 1\right) - \frac{1}{2}\left(4x^2 - 36x - 1\right) + (x-9)(8x-36) \right).$$

In definitiva per ogni $x \neq 9$ abbiamo

$$F''(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \left|9 - x\right|^{-\frac{3}{2}} Q(x),$$

dove abbiamo posto

$$Q(x) := (-2x)(9-x)\left(4x^2 - 36x - 1\right) + \frac{1}{2}\left(4x^2 - 36x - 1\right) + (9-x)(8x-36). \tag{4}$$

Dunque il segno di $F''(x)$ per $x \neq 9$ coincide sempre con il segno del polinomio $Q(x)$ definito in (4). Studiamo allora il segno di $Q(x)$. Essendo un polinomio di quarto grado Q si può annullare in al più quattro punti. Se Q cambia di segno su un intervallo, per il teorema dello zero, Q si deve annullare almeno una volta in quell'intervallo. Calcolando alcuni valori di Q osserviamo che:

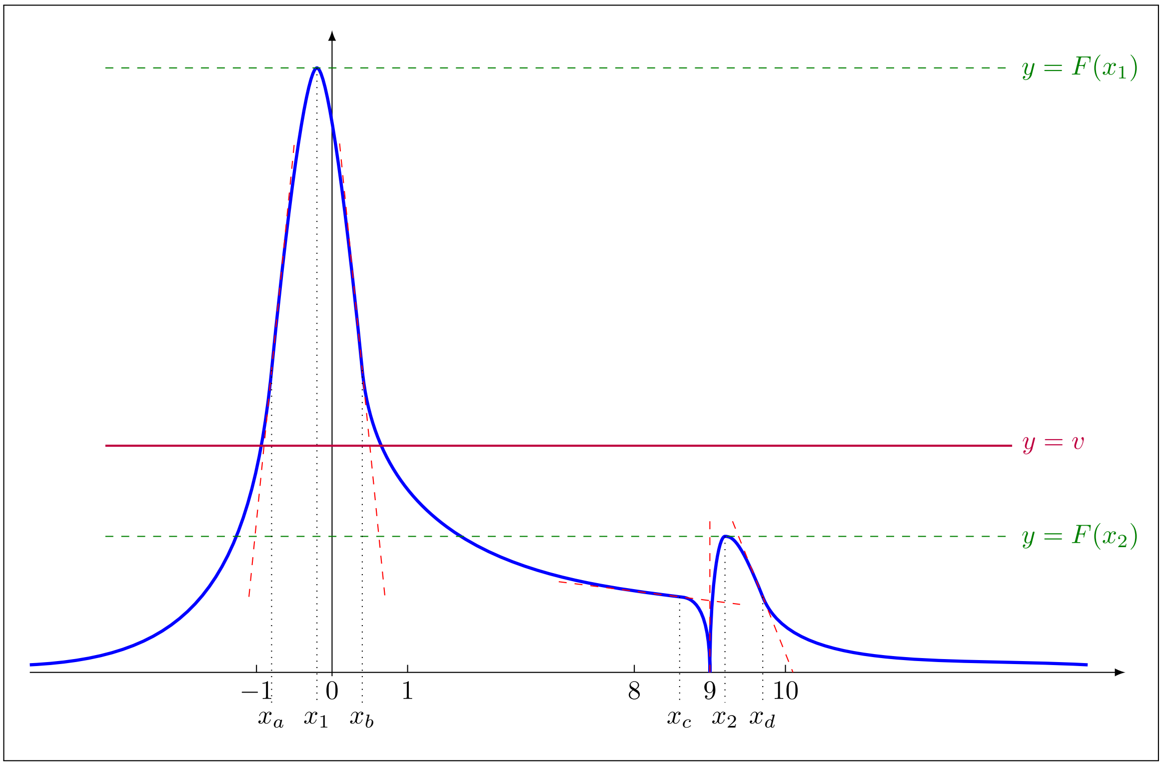
$$Q(-1) = 20 \cdot 39 + \frac{1}{2} \cdot 39 - 10 \cdot 44 > 0, \qquad Q(x_1) = (9 - x_1)8\left(x_1 - \frac{9}{2}\right) = -\left(9 + \sqrt{82}\right)\sqrt{82} < 0,$$
$$Q(0) = -\frac{1}{2} - 9 \cdot 36 < 0, \qquad Q(1) = 16 \cdot 33 - \frac{1}{2} \cdot 33 - 8 \cdot 28 > 0,$$
$$Q(8) = 16 \cdot 33 - \frac{1}{2} \cdot 33 + 28 > 0, \qquad Q(9) = -\frac{1}{2} < 0,$$
$$Q(x_2) = (9 - x_2)8\left(x_2 - \frac{9}{2}\right) = \left(9 - \sqrt{82}\right)\sqrt{82} < 0, \quad Q(10) = 20 \cdot 39 + \frac{1}{2} \cdot 39 - 44 > 0.$$

In questo modo individuiamo almeno quattro cambi si segno per Q e dunque Q si annulla in esattamente 4 punti distinti, che indichiamo con x_a, x_b, x_c, x_d che si trovano localizzati nei seguenti intervalli:

$$x_a \in]-1, x_1[, \quad x_b \in]0, 1[, \quad x_c \in]8, 9[, \quad x_d \in]x_2, 10[.$$

In corrispondenza di tali ascisse il grafico della funzione F presenta dei punti di flesso e abbiamo che $F(x)$ è convessa per $x \in]-\infty, x_a]$, per $x \in [x_b, x_c]$ e per $x \in [x_d, +\infty[$ mentre è concava per $x \in [x_a, x_b]$, per $x \in [x_c, 9]$ e per $x \in [9, x_d]$.

Abbiamo sufficienti elementi per tracciare un grafico *qualitativo* della funzione F (che riportiamo nella seguente figura senza tenere conto delle reali proporzioni)



5. Determina per quali valori $v \in \mathbb{R}$ si ha che l'equazione $F(x) = v$, dove F è la funzione definita nell'esercizio precedente, possiede esattamente due soluzioni distinte.

Soluzione: Fissiamo $v \in \mathbb{R}$. Notiamo che la retta orizzontale di equazione $y = v$ presenta esattamente due intersezioni con il grafico di F se e solo se v è compreso tra i due valori dei massimi locali $F(x_1)$ e $F(x_2)$ che sono stati calcolati in (2).