Esercizi per Analisi Matematica 1A

Seconda settimana

7 ottobre 2019

1 Fattoriali, coefficienti binomiali.

Esercizio 1.1. Un gruppo di famiglie si ritrova per una cena. Padri, madri e figli si siedono in tre tavoli distinti preparati per loro. Sapendo che ci sono 7 padri, 5 madri e 9 figli determina in quanti modi distinti è possibile sistemare le persone nella sala.

Esercizio 1.2. Nota la differenza che c'è tra i numeri $(2n)!$ e $2(n!)$. Quale delle due espressioni rappresenta la quantità più grande? Posto $b_n := \frac{(2n)!}{2(n!)}$, per $n \in \mathbb{N}$, semplifica l'espressione corrispondente a $\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Esercizio 1.3. Quanti sono i numeri naturali composti da 5 cifre tutte distinte?

Esercizio 1.4. Le targhe delle automobili sono composte da due lettere dell'alfabeto, seguite da tre cifre decimali, seguite da altre due lettere dell'alfabeto. Sono ammesse anche i casi con lettere o cifre ripetute. Qual è il numero massimo di targhe distinte che si possono produrre in questo modo? Qual è il numero massimo di targhe distinte che si possono produrre escludendo ripetizioni di lettere o cifre nella stessa targa?

Esercizio 1.5. Quante cinquine si possono fare con i novanta numeri del lotto?

Esercizio 1.6. All'inizio di una riunione tutti partecipanti si stringono la mano reciprocamente. Se le strette di mano sono state in totale 36, qual'è il numero dei partecipanti?

Esercizio 1.7. Calcola a mano (senza calcolatrice) le prime dieci righe del triangolo di Tartaglia.

Esercizio 1.8. Verifica che i coefficienti binomiali godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= 1; \quad \binom{n}{1} = n; \\
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \qquad \text{per } k = 1, 2, \ldots, n; \\
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}, \qquad \text{per } k = 0, 1, \ldots, n; \\
\binom{n}{k+1} &= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}; \\
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= 2^n.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.9. Calcola (a mano) il valore dei seguenti coefficienti binomiali (cercando di fare il minor numero di operazioni possibili):

$$\binom{5}{2}, \quad \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \quad \binom{7}{3}, \quad \binom{8}{3}, \binom{8}{4}, \binom{8}{5}, \quad \binom{9}{4}, \binom{9}{5}.$$

Esercizio 1.10. Siano $n, k \in \mathbb{N}$. Semplifica il rapporto

$$\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n-1}{k-1}}$$

e calcola il suo valore nel caso in cui $n = 1000$ e $k = 500$.

Esercizio 1.11. Determina quali delle seguenti uguaglianze sono sempre verificate e quali sono false:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}, \qquad \binom{n+1}{2} = n^2 - \binom{n}{2},$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-1}{k+1}\binom{n}{k}, \qquad (k+1)\binom{n}{k+1} + k\binom{n}{k} = n\binom{n}{k}.$$

2 Estremo superiore, estremo inferiore

Esercizio 2.1. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di numeri reali determina gli insiemi dei loro maggioranti e dei loro minoranti, stabilisci se sono superiormente o inferiormente limitati, se ammettono massimo o minimo, e determina i loro estremi superiori e inferiori:

$$E = \mathbb{R}; \qquad E = \left\{x \in \mathbb{Q} \colon x^2 \leqslant 2\right\};$$
$$E = \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}; \qquad E = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\};$$
$$E = \{0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots\}; \qquad E = \left\{(-1)^n - \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\};$$
$$E = \left\{|x| : x \in \mathbb{R},\ x^2 + x < 2\right\}; \qquad E = \left\{x = n^2 - 5n + 3 \colon n \in \mathbb{N}\right\};$$
$$E =]0,1] := \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x \leqslant 1\}; \qquad E = \{x \in]0,1] \colon \sin(1/x) \geqslant 0\}.$$

Esercizio 2.2. Dimostra con un controesempio che non è sempre vero che

$$\max\{a,b\} + \max\{c,d\} \geqslant \max\{a,b,c,d\}.$$

Esercizio 2.3. Dimostra che se A e B sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ allora valgono le seguenti regole:

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\},$$
$$\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}, \qquad \inf(A \cap B) \geqslant \max\{\inf A, \inf B\}.$$

Costruisci inoltre un esempio che mostri come si possono effettivamente avere delle disuguaglianze strette per l'intersezione.

3 Radici n-esime

Esercizio 3.1. Dimostra che se m/n e p/q sono due numeri razionali (con $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$) tali che $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ allora vale $\sqrt[n]{2^m} < \sqrt[q]{2^p}$.

Esercizio 3.2. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}; \qquad \sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[6]{5}; \qquad \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt[10]{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{10}};$$
$$\sqrt[4]{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}}; \qquad \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}; \qquad \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^6}}};$$
$$\sqrt[2n]{x^{4n} y^n / 2^{3n}}; \qquad \sqrt[k+1]{x^{2k+2} y^{k^2-1}}.$$

Esercizio 3.3. Porta sotto il segno di radice radice i fattori esterni nei seguenti prodotti:

$$2\sqrt{\frac{3}{2}}; \qquad \frac{1}{2}\sqrt{8}; \qquad 5\sqrt{\frac{1}{10}}; \qquad 3\sqrt[4]{\frac{1}{27}};$$
$$(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2 - b^2}}; \qquad \frac{a-b}{\sqrt{a^2 - b^2}}; \qquad a\sqrt[4]{\frac{b^2}{a}}; \qquad \frac{a-1}{a+3}\sqrt{\frac{a^2 - 9}{a^2 - 1}}.$$

Esercizio 3.4. Porta fuori dal segno di radice tutti i possibili fattori dai seguenti radicali:

$$\sqrt{81}; \qquad \sqrt[3]{40}; \qquad \sqrt{12}; \qquad \sqrt{a^2(1+b^2)}; \qquad \sqrt{x^4 - x^6}.$$

Esercizio 3.5. Razionalizza le seguenti espressioni (ovvero elimina i radicali dai denominatori)

$$\frac{4}{\sqrt[3]{7}}; \quad \frac{1}{1-\sqrt{2}}; \quad \frac{1-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{1+\sqrt{\sqrt{2}+1}}; \quad \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}; \quad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}; \quad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}.$$

4 Media aritmetica e media geometrica

Definizione 4.1. Data una sequenza di n numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$, la loro *media aritmetica* è data da

$$\mu := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Esercizio 4.2. Calcola la media aritmetica dei primi 123 termini di una progressione aritmetica di passo 10 e primo termine 7.

Definizione 4.3. Data una sequenza di n numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$, non negativi, la loro *media geometrica* è data da

$$\gamma := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

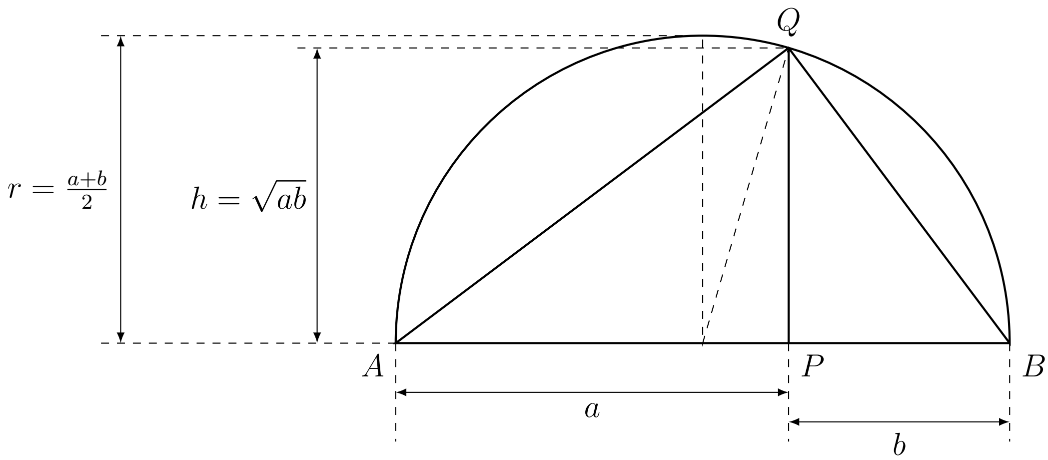
Esercizio 4.4. Calcola la media aritmetica e la media geometrica dei primi 123 termini di una progressione geometrica di ragione 10 e primo termine 7.

Teorema 4.5. *Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ dei numeri non negativi, allora la loro media geometrica è sempre minore o uguale alla loro media aritmetica,*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{1}$$

Le due medie coincidono se e solo se tutti i numeri sono uguali tra loro.

Dimostrazione. Diamo una dimostrazione geometrica valida solo per il caso di due numeri ($n = 2$).



Siano a e b due numeri non negativi. Consideriamo un segmento AB di lunghezza $a+b$ e sia P un punto di AB scelto in modo che la lunghezza di AP sia a e la lunghezza di PB sia b. Costruiamo poi una semicirconferenza poggiata sul diametro AB; il raggio della semicirconferenza risulta essere uguale a $r = \frac{a+b}{2}$, ovvero alla media aritmetica di a e b. Dal punto P tracciamo un segmento perpendicolare ad AB che incontra la semicirconferenza nel punto Q. Il triangolo ABQ essendo inscritto in una semicirconferenza risulta essere rettangolo in Q. Per il secondo teorema di Euclide l'altezza PQ relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni AP e PB dei due cateti sull'ipotenusa; se indichiamo con h la misura dell'altezza PQ abbiamo dunque che $a : h = h : b$, da cui si ricava che $h = \sqrt{ab}$, che è la media geometrica di a e b. Si vede immediatamente che l'altezza PQ non può mai essere più lunga del raggio: $h \leqslant r$, ovvero

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2};$$

inoltre osserviamo che si ha uguaglianza, $h = r$, se e solo se il punto P coincide con il centro della circonferenza, ovvero quando $a = b$. □

Esercizio 4.6. Sfruttando le identità

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}, \qquad \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2},$$

dimostra il teorema 4.5 nel caso di medie di quattro numeri ($n = 4$). Da esso cerca poi di dedurre anche il caso di medie di tre numeri ($n = 3$) unendo ai tre numeri dati un quarto numero pari alla loro media aritmetica.

Esercizio 4.7. Siano $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Determina quali disuguaglianze puoi ricavare dalla disuguaglianza (1) tra media geometrica e media aritmetica nei seguenti casi speciali:

1. $x_1 = a, \quad x_2 = \cdots = x_n = 1;$
2. $x_1 = 1 + n(a-1), \quad x_2 = \cdots = x_n = 1;$
3. $x_1 = n, \quad x_2 = \cdots = x_n = 1;$
4. $x_1 = 1, \quad x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}.$

Utilizza tali disuguaglianze per dimostrare che

1. l'estremo inferiore dei valori di $\sqrt[n]{a}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ è 1;
2. l'insieme dei valori di a^n al variare di $n \in \mathbb{N}$ non è superiormente limitato;
3. l'insieme dei valori di $\sqrt[n]{n}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ è superiormente limitato;
4. se poniamo $e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ allora $e_n \leqslant e_{n+1}$.