MATEMATICA PER L'ELABORAZIONE DEI SEGNALI

COMPITO DEL 29/07/2016

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Esercizio 1. Si definisca $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il segnale a supporto compatto

$$g(t) = t^2 \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\pi}\right),$$

e si consideri $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il segnale periodico seguente

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g\left(t - k\,\pi\right).$$

Si rappresenti graficamente x e si calcoli il suo sviluppo in serie di Fourier.

Esercizio 2. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un segnale causale, ovvero tale che

$$x(t) = 0, \qquad \text{per ogni } t < 0.$$

(1) siano $\lambda > 0$ e $t_0 > 0$, si definisca il nuovo segnale causale

$$x_{\lambda,t_0}(t) = x\left(\lambda\, t - t_0\right).$$

Si enunci una formula che dia il legame tra la trasformata di Laplace di x e quella di x_{λ,t_0}. Si precisi anche la relazione tra le ascisse di convergenza (*Suggerimento*: si usi la definizione di trasformata di Laplace ed un cambio di variabile);

(2) consideriamo il segnale causale

$$x(t) = t\,\cos t\, u(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

dove u è la funzione *gradino unitario* di Heaviside. Si rappresenti graficamente x e si calcoli la sua trasformata di Laplace, precisando il semipiano di convergenza (*Suggerimento*: si determini innanzitutto la trasformata di

Laplace del segnale $t \mapsto \cos t\, u(t)$, ricordando il legame tra la funzione coseno e l'esponenziale);

(3) si calcolino le derivate distribuzionali prima e seconda del segnale al punto precedente;

(4) si calcolino le trasformate di Laplace dei segnali

$$t \mapsto (t+1)\, x(t), \qquad t \mapsto x(2\,t-1) \qquad \text{e} \qquad t \mapsto x \otimes u(t),$$

dove x è ancora il segnale del punto (2). Per ogni caso, si precisino i semipiani di convergenza (*Suggerimento*: si usino l'espressione ricavata al punto (2) ed alcune formule notevoli)

Esercizio 3. Siano $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ due segnali trasformabili secondo Fourier.

(1) Si enunci una formula che dia il legame tra le trasformate di Fourier di x e y e quella della convoluzione $x \otimes y$;

(2) nel caso particolare $x(t) = y(t) = \mathrm{rect}(t)$, si calcoli la trasformata di Fourier della convoluzione $x \otimes y$;

(3) si ripeta il punto precedente, prendendo stavolta $x(t) = \mathrm{rect}(2\,t)$ e $y(t) = \mathrm{rect}(t+1)$.

Esercizio 4. Usando la decomposizione in fratti semplici, si trovi un segnale causale y la cui trasformata di Laplace sia data dalla funzione di variabile complessa

$$F(z) = \frac{1}{z^3 - 1}, \qquad \text{per } \mathrm{Re}(z) > 1.$$