SOLUZIONI

COMPITO DEL 17/05/2016

Esercizio 1. (1) si ha

$$\mathcal{L}[x_{\lambda,t_0}](z) = \lambda\, e^{-z\,t_0}\, \mathcal{L}[x]\,(\lambda\, z)$$

(2) il segnale in esame è positivamente periodico, con periodo T (il segnale è un'*onda a dente di sega*). Si ha pertanto

$$\mathcal{L}[x](z) = \frac{1}{1-e^{-z}} \int_0^1 e^{-z\,t}\, t\, dt = \frac{e^z - 1 - z}{(e^z - 1)\, z^2},$$

per $z \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}(z) > 0$ (come per tutti i segnali causali positivamente periodico).

(3) si tratta di un segnale C^1 a tratti, la derivata distribuzionale è data da

$$x'(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-n);$$

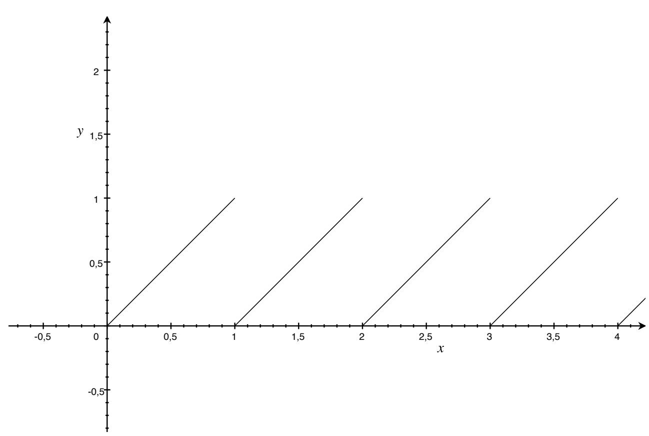

FIGURE 1. Il segnale x dell'Esercizio 1.

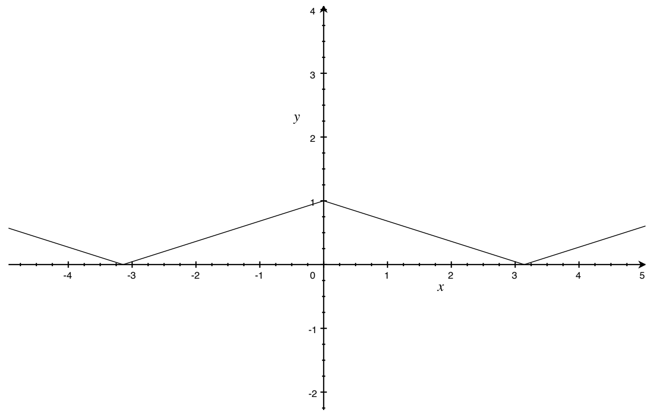

FIGURE 2. Il segnale periodico x dell'Esercizio 2.

(4) usando le ben note formule per la trasformata di Laplace si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^t\,t\,x](z) &= \mathcal{L}[t\,x](z-1) = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}[x](z-1)\\ &= -\frac{(e^{z-1}-1)^2\,(z-1)^2-(e^{z-1}-z)\,\left[e^{z-1}\,(z-1)^2+2\,(e^{z-1}-1)(z-1)\right]}{(e^{z-1}-1)^2\,(z-1)^4}\\ &= \frac{-(e^{z-1}-1)^2\,(z-1)+(e^{z-1}-z)\,\left[e^{z-1}\,z-e^{z-1}\;-2\right]}{(e^{z-1}-1)^2\,(z-1)^3}\end{aligned}$$

valido per $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Per il secondo segnale è decisamente piè semplice, basta usare la formula al punto (1) con $\lambda = 1/2$ e $t_0 = 1/2$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(2\,t-1)](z) &= \frac{1}{2}\,e^{-\frac{z}{2}}\,\mathcal{L}[x]\left(\frac{z}{2}\right)\\ &= e^{-\frac{z}{2}}\,\frac{2\,e^{\frac{z}{2}}-2-z}{(e^{\frac{z}{2}}-1)\,z^2}\end{aligned}$$

definita per $\mathrm{Re}(z) > 0$. Infine, per il terzo segnale, si usa la formula che lega convoluzione e trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[x\otimes u](z) = \mathcal{L}[x](z)\,\mathcal{L}[u](z) = \frac{e^z-1-z}{(e^z-1)\,z^3},$$

ancora per $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Esercizio 2. Il segnale in esame è periodico, con periodo $T = 2\,\pi$. I suoi coefficienti di Fourier sono dati da

$$\begin{aligned}c_n = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{|t|}{\pi}\right)\,e^{-j\,n\,t}\,dt &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{|t|}{\pi}\right)\,\cos(n\,t)\,dt\\ &\quad -\frac{j}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{|t|}{\pi}\right)\,\sin(n\,t)\,dt.\end{aligned}$$

Se si osserva che la funzione $t \mapsto 1 - (|t|/\pi)$ è pari, si ottiene

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{|t|}{\pi}\right)\cos(n\,t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\cos(n\,t)\,dt,$$

e

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{|t|}{\pi}\right)\sin(n\,t)\,dt = 0.$$

Quindi si ottiene per $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\cos(n\,t)\,dt &= \cancel{\left[\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(n\,t)}{n}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}} \\ &\quad + \frac{1}{n\,\pi^2}\int_0^{\pi}\sin(n\,t)\,dt \\ &= \frac{1}{n^2\,\pi^2}\,(1-\cos(n\,\pi)), \end{aligned}$$

and

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)dt = \frac{1}{2}$$

In definitiva, per ogni $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ si ha

$$c_n = \frac{1}{n^2\,\pi^2}\begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ pari,} \\ 2, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

e quindi

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{e^{j\,(2\,k+1)\,t}}{(2\,k+1)^2}.$$

Si può anche scriverlo come serie di soli coseni

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\cos\Big((2\,k+1)\,t\Big)}{(2\,k+1)^2}$$

Esercizio 3. (1) la funzione è costante a tratti

(2) si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt &= 2\int_{-1}^{1}dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\int_k^{k+1}dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\int_{-k-1}^{-k}dt \\ &= 2\,+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty, \end{aligned}$$

perché l'ultima serie è convergente;

(3) basta osservare che

$$\begin{aligned} |X(f)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\,2\,\pi\,f\,t}\,x(t)\,dt\right| &\le \int_{-\infty}^{+\infty}|e^{-j\,2\,\pi\,f\,t}\,x(t)|\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt < +\infty. \end{aligned}$$

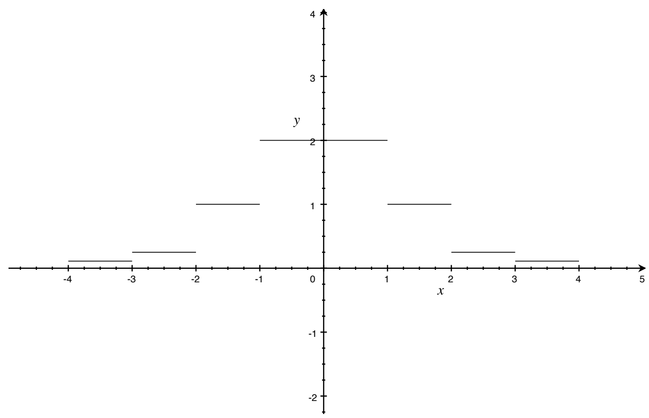

FIGURE 3. Il segnale dell'Esercizio 3

(4) la funzione in esame è costante a tratti, la sua derivata distribuzionale è quindi una somma di funzioni Delta di Dirac in corrispondenza dei punti di salto (che sono $x_k = k$) e con intensità pari al salto. Si ha dunque

$$x'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) (\delta(t+k) - \delta(t-k))$$

(5) ricordando che la trasformata di una Delta di Dirac concentrata in t_0 è

$$X(f) = e^{-j\,2\,\pi\,f\,t_0}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \widehat{x'}(f) &= \left(e^{j\,2\,\pi\,f} - e^{-j\,2\,\pi\,f} \right) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \left(e^{j\,2\,\pi\,f\,k} - e^{-j\,2\,\pi\,f\,k} \right) \\ &= 2\,j\,\sin(2\,\pi\,f) + 2\,j \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \sin(2\,\pi\,f\,k) \end{aligned}$$

(6) usando la relazione

$$\widehat{x}(f) = \frac{\widehat{x'}(f)}{2\,\pi\,j\,f},$$

si ottiene

$$\widehat{x}(f) = 2\,\frac{\sin(2\,\pi\,f)}{2\,\pi\,f} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \frac{\sin(2\,\pi\,f\,k)}{2\,\pi\,f}$$

Il fatto che la trasformata di Fourier è a valori reali poteva essere dedotto fin da subito, osservando che x è reale e pari.

Ovviamente, la trasformata di Fourier di x poteva essere calcolata anche direttamente, ricordando la trasformata della funzione rettangolo.

Esercizio 4. Si osservi che la funzione di trasferimento è data da

$$\mathcal{L}[Y](z) = \frac{1}{z^2-4} = \frac{1}{(z-2)\,(z+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+2}\right)$$

La risposta impulsiva del sistema è data quindi da

$$Y(t) = \frac{e^{2\,t} - e^{-2\,t}}{4}\,u(t).$$

La soluzione y del problema di Cauchy può essere determinata usando la trasformata di Laplace: deve aversi

$$(z^2-4)\,\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f](z),$$

ovvero

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^2-4}\,\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[Y]\,\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[Y \otimes f].$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} y(t) = Y * f(t) &= \int_0^t \frac{e^{2\,s} - e^{-2\,s}}{4}\,e^{2\,(t-s)}\,ds \\ &= \int_0^t \frac{e^{2\,s}}{4}\,e^{2\,(t-s)}\,ds - \int_0^t \frac{e^{-2\,s}}{4}\,e^{2\,(t-s)}\,ds \\ &= \frac{t\,e^{2\,t}}{4} - \frac{e^{2\,t}}{4}\int_0^t e^{-4\,s}\,ds \\ &= \frac{t\,e^{2\,t}}{4} - \frac{e^{2\,t}}{4}\,\frac{1-e^{-4\,t}}{4}. \end{aligned}$$

In definitiva, si ha

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(t\,e^{2\,t} + \frac{e^{-2\,t}}{4} - \frac{e^{2\,t}}{4}\right).$$