

# Metodo di Quine-McCluskey

M. Favalli

Engineering Department in Ferrara



## Sommario

- 1 Calcolo degli implicanti primi
- 2 Copertura
- 3 Funzioni a più uscite

## Sommario

- 1 Calcolo degli implicanti primi
- 2 Copertura
- 3 Funzioni a più uscite

## Algoritmo

- Metodo esatto per la sintesi di reti a 2 livelli
- Fattibile fino a circa 20 ingressi
- In grado di considerare funzioni a più uscite
- Può minimizzare sia il costo degli implicanti che quello dei letterali
- L'algoritmo (facilmente implementabile) opera in due fasi distinte
  - 1 Fase di espansione
  - 2 Fase di copertura
- Si vedrà inizialmente il caso di funzioni con uscita singola

## Descrizione di funzioni completamente specificate

La funzione può essere descritta come una lista di mintermini a ciascuno dei quali è associato un indice

$$f = \sum \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$$

$i$	$xyz$	$f$
0	000	1
1	001	1
2	010	1
3	011	1
4	100	1
5	101	0
6	110	0
7	111	1

(ENDIF)

Reti logiche 5 / 46

Calcolo degli implicanti primi

## Espansione - algoritmo

- 1 Crea una lista con tutti i mintermini e le eventuali condizioni di indifferenza ( $\alpha$ )
- 2 Confronta tutte le coppie ( $\binom{\alpha}{2}$ ) di cubi e di eventuali condizioni di indifferenza che non sono stati esaminati e determina la distanza Hamming ( $h$ )
- 3 Per ogni coppia tale che  $h = 1$ 
  - 1 crea un nuovo cubo (implicante) inserendo il simbolo  $-$  al posto della variabile eliminata (se tale cubo esiste già non viene aggiunto alla lista)
  - 2 marca i cubi che sono stati espansi con  $\star$
- 4 Si torna al passo 2 fino a quando non sono più possibili ulteriori espansioni
- 5 Si eliminano tutti i cubi marcati con  $\star$  e quelli che contengono solo indifferenze
- 6 I cubi rimanenti sono tutti gli implicanti primi della funzione.

(ENDIF)

Reti logiche 7 / 46

## Descrizione di funzioni non completamente specificate

La funzione può essere descritta come una lista di mintermini e condizioni di indifferenza a ciascuno dei quali è associato un indice

$$f_{ON} = \sum \{1, 2, 3, 4, 7\}$$

$$f_{DC} = \sum \{0, 6\}$$

$i$	$xyz$	$f$
0	000	-
1	001	1
2	010	1
3	011	1
4	100	1
5	101	0
6	110	-
7	111	1

(ENDIF)

Reti logiche 6 / 46

Calcolo degli implicanti primi

## Organizzazione della lista di implicanti

- Per ridurre il numero di confronti, si nota che poiché siamo interessati a coppie di mintermini con  $h = 1$ , la differenza fra il numero di 1 in un mintermine e nell'altro deve essere  $|1|$
- Si organizza la lista di mintermini in gruppi contenenti mintermini con lo stesso numero di 1 (i gruppi sono organizzati in ordine crescente)
- Quindi basta confrontare mintermini di un gruppo con quelli del successivo

(ENDIF)

Reti logiche 8 / 46

## Esempio - I

xyz			xyz		
0	000	*	0,1	00-	
1	001	*	0,2	0-0	
2	010	*	0,4	-00	
4	100	*	1,3	0-1	
3	011	*	2,3	01-	
7	111	*	3,7	-11	

I mintermini coinvolti in almeno un raccoglimento (espansione) vengono denotati con \* in quanto sicuramente non corrispondono a implicanti primi

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

(ENDIF)

Reti logiche 9 / 46

Calcolo degli implicanti primi

## Quadro complessivo

Si nota che é possibile che alcuni implicanti siano duplicati, in tale caso vanno eliminati

xyz			xyz			xyz		
0	000	*	0,1	00-	*	0,1,2,3	0--	
1	001	*	0,2	0-0	*	0,2,1,3	0--	
2	010	*	0,4	-00				
4	100	*	1,3	0-1	*			
3	011	*	2,3	01-	*			
7	111	*	3,7	-11				

Gli implicanti primi sono quindi  $y'z'$ ,  $yz$ ,  $x'$

Gli implicanti (cubi) che non sono stati marcati sono quelli primi

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

(ENDIF)

Reti logiche 11 / 46

## Esempio - II

- Si procede analizzando la nuova lista per verificare se sono possibili nuove espansioni
- Si noti che deve essere  $h = 1$  e che i don't care devono essere nelle stesse posizioni
- Ci si ferma quanto non sono più possibili nuove espansioni

xyz			xyz		
0,1	00-	*	0,1,2,3	0--	
0,2	0-0	*	0,2,1,3	0--	
0,4	-00				
1,3	0-1	*			
2,3	01-	*			
3,7	-11				

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

(ENDIF)

Reti logiche 10 / 46

Calcolo degli implicanti primi

## Esempi

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

(ENDIF)

Reti logiche 12 / 46

## Sommaro

- 1 Calcolo degli implicanti primi
- 2 Copertura
- 3 Funzioni a piú uscite

## Esempio di copertura

Si supponga di considerare la funzione non completamente specificata

$$f(x, y, z, w) = f_{ON} + f_{DC}$$

Ove  $f_{ON} = \{0, 1, 6, 7, 8, 11, 13\}$  e  $f_{DC} = \{4, 5, 9, 10, 15\}$ , gli implicanti primi sono:

$P_0 = y'z'$	00-	0,1,8,9	$P_4 = x'y$	01--	4,5,6,7
$P_1 = x'z'$	0-0-	0,1,4,5	$P_5 = yw$	-1-0	5,7,13,15
$P_2 = z'w$	--01	0,1,8,9	$P_6 = xw$	1--1	4,5,6,7
$P_3 = x'y'$	00--	0,1,8,9			

## Copertura

- Il problema di copertura si rappresenta graficamente con una tabella di copertura che ha come righe gli implicanti primi e come colonne i mintermini di  $f$
- La casella di indice  $i, j$  ha il simbolo  $\times$  se l'implicante  $P_i$  copre il mintermine  $m_j$
- Si nota che la soluzione qui presentata é indipendente dal metodo utilizzato per gli implicanti primi

## Tabella di copertura

		mintermini di $f$						
		0	1	6	7	8	11	13
implicanti primi id $f$	$P_0$							
	$P_1$							
	$P_2$							
	$P_3$							
	$P_4$							
	$P_5$							
	$P_6$							

## Tabella di copertura iniziale

	mintermini di $f$						
	0	1	6	7	8	11	13
$P_0$	×	×			×		
$P_1$	×	×					
$P_2$		×					×
$P_3$					×	×	
$P_4$			×	×			
$P_5$				×			×
$P_6$						×	×

## Tabella di copertura iniziale

La colonna 6 ha una sola  $\times$  quindi l'implicante  $P_4$  é essenziale

	0	1	6	7	8	11	13
$P_0$	×	×			×		
$P_1$	×	×					
$P_2$		×					×
$P_3$					×	×	
$P_4$			×	×			
$P_5$				×			×
$P_6$						×	×

	0	1	8	11	13
$P_0$	×	×	×		
$P_1$	×	×			
$P_2$		×			×
$P_3$			×	×	
$P_5$					×
$P_6$				×	×

La copertura é  $\mathcal{C}(f) = \{P_4\}$

## Riconoscimento degli implicanti primi essenziali

La tabella di copertura consente di individuare direttamente tutte le condizioni di essenzialità, infatti una colonna con un solo  $\times$  individua immediatamente un implicante primo essenziale

Sia  $\mathcal{C}(f)$  l'insieme degli implicanti primi utilizzato per la copertura

- 1  $\mathcal{C}(f) = \emptyset$
- 2 Si individua un implicante primo essenziale  $P_i$  e lo si aggiunge alla copertura  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(f) \cup \{P_i\}$
- 3 Si eliminano dalla tabella tutte le colonne coperte da  $P_i$  e si elimina la riga  $i$

## Dominanza

Una volta che non si trovino più implicanti primi essenziali, si sfruttano le relazioni di dominanza di riga e di colonna

### Dominanza di riga

Una riga  $i$  ne domina una  $j$  se l'implicante  $P_i$  copre tutti i mintermini coperti da  $P_j$  più almeno uno (in qualsiasi tabella).

La riga  $j$  può essere rimossa dalla tabella in quanto la scelta di  $P_i$  copre tutti i mintermini coperti da  $P_j$

## Esempio

Si osserva che  $P_0$  domina  $P_1$  e che sia  $P_2$  che  $P_6$  dominano  $P_5$ , quindi  $P_2$  e  $P_5$  possono essere eliminati

	0	1	8	11	13
$P_0$	×	×	×		
$P_1$	×	×			
$P_2$		×			×
$P_3$			×	×	
$P_5$					×
$P_6$				×	×

	0	1	8	11	13
$P_0$	×	×	×		
$P_2$		×			×
$P_3$			×	×	
$P_6$				×	×

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

(ENDIF)

Reti logiche 21 / 46

Copertura

## Espressione di costo minimo di tipo SP

Ora  $P_6$  è diventato essenziale, quindi la copertura è data da

$$C(f) = \{P_4, P_0, P_6\}$$

che corrisponde all'espressione

$$f(x, y, z, w) = y'z' + x'y + xw$$

il numero di implicantì è  $C = 3$  mentre  $I = 6$  (il procedimento utilizzato utilizza  $C$  come cifra di merito)

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

(ENDIF)

Reti logiche 23 / 46

## Esempio

Si osserva che nella nuova tabella  $P_0$  è diventato un implicants primario essenziale secondario perché è l'unico che copre il mintermine 0

	0	1	8	11	13
$P_0$	×	×	×		
$P_2$		×			×
$P_3$			×	×	
$P_6$				×	×

	11	13
$P_2$		×
$P_3$	×	
$P_6$	×	×

  
 $C(f) = \{P_4, P_0\}$ 

Nella nuova tabella  $P_6$  domina sia  $P_3$  che  $P_2$

	11	13
$P_2$		×
$P_3$	×	
$P_6$	×	×

	11	13
$P_6$	×	×

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

(ENDIF)

Reti logiche 22 / 46

Copertura

## Dominanza di colonna

## Dominanza di colonna

Una colonna  $i$  ne domina una  $j$  se la colonna  $j$  è coperta da tutti gli implicantì di  $i$  più almeno uno. In tale caso la colonna  $j$  può essere eliminata

In questo caso, qualsiasi implicants che copre  $i$  copre anche  $j$

$i$	$j$
×	×
×	×
	×

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↺

(ENDIF)

Reti logiche 24 / 46

# Sommario

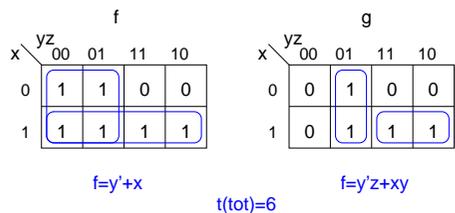
- 1 Calcolo degli implicanti primi
- 2 Copertura
- 3 Funzioni a più uscite

(ENDIF)

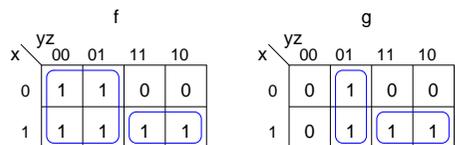
Funzioni a più uscite

## Esempio dei problemi nella sintesi di funzioni a più uscite

Ottimizzazione separata delle due funzioni  $f$  e  $g$



$xy$  é un implicante primo di  $g$ , ma non di  $f$ , comunque può essere utilizzato per coprire gli 1 di  $f$  non coperti da  $y'$ . In questo modo la porta AND che realizza  $xy$  avrà fan-out=2 e il costo dei letterali é inferiore



(ENDIF)

# Funzioni a più uscite

- Nella maggior parte dei casi le funzioni da considerare hanno più uscite (es. sommatore binario)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

- Si possono avere funzioni completamente specificate  $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^m$  o non completamente specificate  $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1, -\}^m$
- L'ottimizzazione separata delle funzioni a uscita singola non porta, in generale, a un risultato ottimale perché trascura le possibilità offerte dall'utilizzo del fan-out

(ENDIF)

Funzioni a più uscite

## Calcolo degli implicanti primi

- Si parte dai mintermini di ciascuna funzione e si forma una lista unica avendo cura di contrassegnare ciascun mintermine  $j$  con una maschera  $\mu_j$  che denota le funzioni in cui é presente
- Tale maschera, é costituita da una stringa di  $m$  bit, uno per ciascuna uscita  $k$
- $\mu_{jk} = 1$  se il mintermine  $j$  compare nella  $k$ -ma funzione di uscita, mentre vale 0 altrimenti
- Una volta assegnata una maschera a ciascuna configurazione, si può costruire la lista dei mintermini e procedere ai raccoglimenti

(ENDIF)

# Espansione

- In questa fase bisogna tenere in conto che i mintermini possono appartenere a più funzioni e che l'espansione di due mintermini ha significato solo per le funzioni cui entrambi appartengono
- Questa operazione si può fare semplicemente facendo il prodotto logico bit a bit delle rispettive maschere
- Sia, ad esempio,  $m_i = 1110$  e  $m_j = 1111$  con  $\mu_i = 0101$  e  $\mu_j = 0110$ , rispettivamente.
- Da questi si può poi ottenere  $P_k = 111-$  con  $\mu_k = 0100$
- L'eliminazione di implicanti rimane poi subordinata alla relazione che esiste fra la maschera degli implicanti di partenza e di quello espanso

# Esempio

Funzioni completamente specificate:

$$f = \{1, 5, 6, 7\} \quad g = \{0, 1, 2, 3, 6, 7\} \quad h = \{1, 3, 5, 6, 7\}$$

Lista dei mintermini

$i$	$xyz$	$\mu_x\mu_y\mu_z$	$xyz$	$\mu_x\mu_y\mu_z$
0	000	010 *	0,1	00- 010
1	001	111	0,2	0-0 010
2	010	010 *	1,3	0-1 001 *
3	011	001 *	1,5	-01 101
5	101	101 *	2,3	01- 000
6	110	111 *	2,6	-10 010
7	111	111 *	3,7	-11 001 *
			5,7	1-1 101
			6,7	11- 111

$xyz$	$\mu_x\mu_y\mu_z$
0,2,1,3	0- 000
1,3,5,7	-1 001
1,5,3,7	-1 001
2,6,3,7	-1- 000

# Espansione

Sono possibili 5 diversi casi espandendo gli implicanti  $P_i$  e  $P_j$  in  $P_k$

- 1  $\mu_k = 00..0$ : l'implicante ottenuto non ha senso per alcuna funzione e quindi è inutile riportarlo
- 2  $\mu_k = \mu_i$ : l'implicante ottenuto è primo rispetto alle funzioni in cui è utilizzato  $P_i$  quindi  $P_i$  può essere marcato
- 3  $\mu_k = \mu_j$ : l'implicante ottenuto è primo rispetto alle funzioni in cui è utilizzato  $P_j$  quindi  $P_j$  può essere marcato
- 4 di conseguenza se  $\mu_k = \mu_i = \mu_j$  possono essere marcati entrambi
- 5  $\mu_k \neq 0 \wedge (\mu_k \neq \mu_i \wedge \mu_k \neq \mu_j)$ :  $P_k$  è primo solo per l'intersezione delle funzioni in cui compaiono  $P_i$  e  $P_j$ , quindi non si marcano  $P_i$  e  $P_j$  e si mantiene comunque  $P_k$

# Implicanti primi

implicante	mintermini	$xyz$	$\mu_x\mu_y\mu_z$
$P_0$	1	001	111
$P_1$	0,1	00-	010
$P_2$	0,2	0-0	010
$P_3$	1,5	-01	101
$P_4$	2,6	-10	010
$P_5$	5,7	1-1	101
$P_6$	6,7	11-	111
$P_7$	1,3,5,7	-1	001

# Copertura

La tabella di copertura per una funzione a più uscite si costruisce in maniera simile a quella utilizzata per funzioni scalari. In pratica si accostano le diverse tabelle di copertura

	<i>f</i>				<i>g</i>				<i>h</i>						
	1	5	6	7	0	1	2	6	7	1	3	5	6		7
$P_0$	×					×				×					1
$P_1$					×	×									1
$P_2$					×		×								1
$P_3$	×	×								×		×			1
$P_4$							×	×							1
$P_5$		×		×								×		×	1
$P_6$			×	×				×	×				×	×	1
$P_7$										×	×		×	×	1

# Esempio

Si osserva che  $P_6$  è essenziale rispetto ai mintermini 6 di  $f$  e 7 di  $g$  quindi elimino le colonne coperte in  $f$  e  $g$ , ma non la riga perché potrebbe servirmi per  $h$ , poi metto il suo costo a 0

	<i>f</i>				<i>g</i>				<i>h</i>						
	1	5	6	7	0	1	2	6	7	1	3	5	6		7
$P_0$	×					×				×					1
$P_1$					×	×									1
$P_2$					×		×								1
$P_3$	×	×								×		×			1
$P_4$							×	×							1
$P_5$		×		×								×		×	1
$P_6$			×	×				×	×				×	×	0
$P_7$										×	×		×	×	1

# Copertura

- Un implicante primo essenziale può essere tale solo rispetto ad alcune funzioni, una volta scelto, si eliminano le colonne rispetto alle quali è essenziale in tali funzioni
- Se un implicante è stato scelto perché essenziale per un certo insieme di funzioni, può darsi che convenga utilizzarlo anche in altre funzioni in cui è solo primo, infatti si può semplicemente aumentare il fan-out della porta logica AND che lo realizza
- Se il costo è basato sul numero di implicanti, si può associare un costo iniziale pari a 1 per ciascun implicante e se un implicante viene scelto lo si mette a 0 per denotare che può essere usato senza aumentare il costo della copertura

# Esempio

Nella tabella ridotta si osserva che  $P_7$  domina  $P_6$  che può essere eliminata

	<i>f</i>				<i>g</i>			<i>h</i>					
	1	5	6	7	0	1	2	1	3	5	6		7
$P_0$	×					×		×					1
$P_1$					×	×							1
$P_2$					×		×						1
$P_3$	×	×						×		×			1
$P_4$							×						1
$P_5$		×		×						×		×	1
$P_6$			×	×							×	×	0
$P_7$								×	×		×	×	1

$$\mathcal{C}(f) = \{P_6\}$$

# Esempio

Si osserva che  $P_7$  è essenziale rispetto a 3 di  $h$

	$f$		$g$			$h$					
	1	5	0	1	2	1	3	5	6		7
$P_0$	×			×		×					1
$P_1$			×	×							1
$P_2$			×		×						1
$P_3$	×	×				×		×			1
$P_4$					×						1
$P_5$		×						×		×	1
$P_7$						×	×		×	×	1

$$\mathcal{C}(f) = \{P_6, P_7\}$$

# Esempio

Si osserva che  $P_3$  domina  $P_5$  e quindi  $P_5$  è eliminabile (si noti che questa operazione è possibile perché hanno entrambi lo stesso costo)

	$f$		$g$			$h$	
	1	5	0	1	2	5	
$P_0$	×			×			1
$P_1$			×	×			1
$P_2$			×		×		1
$P_3$	×	×				×	1
$P_4$					×		1
$P_5$		×				×	1

$$\mathcal{C}(f) = \{P_6, P_7\}$$

# Esempio

Eliminando le colonne corrispondenti

	$f$		$g$			$h$					
	1	5	0	1	2	1	3	5	6		7
$P_0$	×			×		×					1
$P_1$			×	×							1
$P_2$			×		×						1
$P_3$	×	×				×		×			1
$P_4$					×						1
$P_5$		×						×		×	1
$P_7$						×	×		×	×	1

$$\mathcal{C}(f) = \{P_6, P_7\}$$

# Esempio

Nella nuova tabella  $P_3$  è diventato essenziale rispetto a 5 (sia per  $f$  che per  $g$ )

	$f$		$g$			$h$	
	1	5	0	1	2	5	
$P_0$	×			×			1
$P_1$			×	×			1
$P_2$			×		×		1
$P_3$	×	×				×	1
$P_4$					×		1
$P_5$		×				×	1

$$\mathcal{C}(f) = \{P_3, P_6, P_7\}$$

# Esempio

La riga  $P_1$  domina  $P_0$  e  $P_2$  domina  $P_4$  che possono essere eliminate

		g					
		0	1	2			
$P_0$			×		1		
$P_1$		×	×		1		
$P_2$		×		×	1		
$P_4$				×	1		

		g			
		0	1	2	
$P_1$		×	×		1
$P_2$		×		×	1

Si osserva ora che  $P_1$  e  $P_2$  sono diventati essenziali, quindi

$$\mathcal{C}(f) = \{P_1, P_2, P_3, P_6, P_7\}$$

# Copertura

Le espressioni delle singole uscite possono essere ricavate analizzando le maschere degli implicanti che compaiono nella copertura  $\mathcal{C}(f) = \{P_1, P_2, P_3, P_6, P_7\}$ , da cui  $f = P_3 + P_6$ ,  $g = P_1 + P_2 + P_6$  e  $h = P_3 + P_6 + P_7$

		f				g				h						
		yz	00	01	11	10	yz	00	01	11	10	yz	00	01	11	10
x	0		0	1	0	0		0	1	1	0		0	1	1	0
x	1		0	1	1	1		0	0	1	1		0	1	1	1

$f = xy + y'z$        $g = x'y' + x'z' + xy$        $h = xy + z$

# Coperture cicliche

- Il metodi visti non tengono in conto del numero di letterali, ma solo della cardinalità dell'insieme di implicanti
- Rispetto al numero di implicanti la soluzione ottenuta è minima indipendentemente dall'ordine con cui sono applicate le proprietà di essenzialità e dominanza sono applicate
- Nel caso di coperture "cicliche" non sono in grado di decidere quali implicanti utilizzare perché nella tabella non si hanno né relazioni essenzialità, né relazioni di dominanza

# Esempio

Si consideri la funzione  $f(a, b, c, d) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13\}$  per la quale sono stati calcolati implicanti primi e copertura

	1	2	3	4	5	6	8	9	12	13
$P_0 = ac'$							×	×	×	×
$P_1 = bc'$				×	×				×	×
$P_2 = c'd$	×				×			×		×
$P_3 = a'b'd$	×		×							
$P_4 = a'b'c$		×	×							
$P_5 = a'cd'$		×					×			
$P_6 = a'bd'$				×			×			

## Esempio

$P_0$  è essenziale rispetto a 8

	1	2	3	4	5	6	8	9	12	13
$P_0 = ac'$							×	×	×	×
$P_1 = bc'$				×	×				×	×
$P_2 = c'd$	×				×			×		×
$P_3 = a'b'd$	×		×							
$P_4 = a'b'c$		×	×							
$P_5 = a'cd'$		×				×				
$P_6 = a'bd'$				×		×				

## Conclusioni

Si osserva che nella tabella ridotta, non esistono condizioni di essenzialità o dominanza

Analizzando la mappa di Karnaugh una buona copertura è evidente, bisogna però trovare un procedimento sistematico

ab \ cd	00	01	11	10
	00	0	1	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0