

Analisi Matematica 1 - Ingegneria dell'Informazione - (Foschi) - 21.11.2006

nome e cognome:

matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio che ti viene consegnato (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che ti eri preparato).

- (5 punti) Sia $F :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $F(x) := -\int_0^x \log(\cos(\theta)) d\theta$. Calcola le derivate di F fino all'ordine 5, ovvero F' , F'' , F''' , $F^{(iv)}$, $F^{(v)}$.
- (3 punti) Determina il polinomio di Taylor di ordine 4 relativo alla funzione F nel punto $x_0 = 0$ e scrivi il corrispondente resto nella forma di Lagrange.
- (4 punti) Fai una stima ragionevole dell'errore che si commette approssimando il valore dell'integrale $\int_0^{\pi/4} |\log(\cos(\theta))| d\theta = F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ con il valore che il polinomio trovato nel punto precedente assume nel punto $x = \frac{\pi}{4}$.
- (3 punti) Calcola il valore del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F'(x)}{F(x)}$.
- (5 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ determina esplicitamente la forma polare e la forma cartesiana del numero complesso z_n individuato dalle seguenti due condizioni:
 - l'argomento del quadrato di z_n è uguale a $\frac{1}{n^2}$;
 - la parte immaginaria del reciproco del coniugato di z_n è uguale a $\frac{1}{n^2}$.
- (4 punti) Sia a_n la parte reale di z_n e sia b_n la parte immaginaria di z_n . Determina quali tra le successioni (a_n) e (b_n) sono infinitesime.
- (4 punti) Determina il carattere di convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- (3 punti) Sia $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $g(x) := \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$. Verifica che g è integrabile in senso generalizzato su ogni intervallo della forma $]0, L]$, per ogni $L > 0$.
- (3 punti) Calcola il valore medio di g sull'intervallo $]0, \log(5)]$.