Corso di Analisi 1
Docente Prof.ssa Elisabetta Lorenzetti
Parte teorica e applicativa.

Gli insiemi. Relazioni tra gli insiemi. L'insieme vuoto e l'insieme delle parti. Gli insiemi numerici. Operazioni su insiemi e proprietà. L'insieme dei numeri naturali e il principio di induzione. Alcuni tipi di dimostrazione: diretta, regola della controinversa, per assurdo. L'importanza dei controesempi. Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.
La dimostrazione per induzione. la disuguaglianza di Bernoulli (dimostrazione). Campi totalmente ordinati, $(\mathbb{Q},\leq)$ è un campo totalmente ordinato. L'insieme $(P(A),\subseteq)$ non è totalmente ordinato. Insiemi limitati, definizione di estremo superiore / inferiore, massimo e minimo. Insiemi non limitati. Assioma di completezza.
Definizione assiomatica di $\mathbb{R}$. Allineamenti decimali. $0,\overline{9}=1$. La retta reale. La cardinalità di un insieme finito. La cardinalità del numerabile e del continuo.
Il valore assoluto di un numero reale. Grafico di $f(x)=|x|$.
Disuguaglianza triangolare e disuguaglianza di Cauchy -Schwarz (dimostrazioni). Media geometrica ed aritmetica e relazione tra esse (dimostrazione). Simbolo di sommatoria e proprietà. Le progressioni aritmetiche e geometriche.
$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}; q \neq 1$ (dimostrazione).
Permutazioni semplici, il simbolo di $n!$ e proprietà di $n!$
Disposizioni semplici e combinazioni semplici. Coefficienti binomiali e proprietà. Il binomio di Newton:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (dimostrazione per induzione).

Sia A un insieme di cardinalità finita n allora la cardinalità di $P(A)$ è 2^n (dimostrazione).
Radice *n*-sime e potenze ad esponente reale.
L'esponenziale e i logaritmi. Grafici e proprietà.

Definizione di funzione. Dominio, codominio e immagine di una funzione. Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. La funzione inversa. Il grafico della funzione inversa. Funzioni limitate e non limitate. Estremo superiore / inferiore, massimo e minimo. Funzioni monotone. Funzioni pari e dispari e loro grafici.
Teorema: se una funzione è strettamente monotona allora è invertibile (dimostrazione), non vale il viceversa (controesempio). La funzione potenza $f(x)=kx^{\alpha}$. Le funzioni esponenziali e logaritmiche. Le funzioni periodiche.
Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche. La curva "catenaria". $Sh(x) \leq \frac{e^x}{2} \leq Ch(x)$ e $(Ch(x))^2-(Sh(x))^2=1$ (con dimostrazioni).

Funzione parte intera e mantissa. Composizione di funzioni e iterate di una funzione. Funzioni inverse delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche.

Definizione di successione numerica. Successioni limitate e non limitate. Successioni monotone. Successioni che soddisfano definitivamente una certa proprietà.
Dimostrazione che le due successioni $a_n=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ e $a_n=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ sono rispettivamente monotona crescente e monotona decrescente. Definizione del numero di Nepero $e=\sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n; n\geq 1\right\}$. Il numero di Nepero e un problema di capitalizzazione. Limite di una successione; successioni convergenti, divergenti e irregolari. Le successioni oscillanti. Il teorema di unicità del limite (dimostrazione).

Limiti di una successione monotona. Teorema: "le successioni monotone sono regolari" (dimostrazione).
$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
Infiniti ed infinitesimi.
Teoremi di permanenza del segno e del confronto.
Corollari del teorema del confronto:

- $|b_n| \le c_n$ e c_n infinitesima, allora anche b_n è infinitesima.
- Se b_n è limitata e c_n infinitesima, allora $(b_n \cdot c_n)$ è infinitesima.

Limiti di una successione geometrica.
Algebra dei limiti e aritmetizzazione parziale dei simboli "$+\infty$" e "$-\infty$".
Forme di indecisione.
Esercizi: calcolo di limiti di successioni.
Confronti di infiniti e di infinitesimi.
Successioni asintotiche.
Criterio del rapporto.
Gerarchia degli infiniti.

Intorni di un punto. Definizione topologica di limite di una funzione $f: I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}^*$ e $c \in \mathbb{R}^*$. esame dei vari casi possibili e grafici. Verifica della correttezza del calcolo di un limite. Limite destro e limite sinistro. Limiti per eccesso e per difetto. Funzione di Heaviside e funzione segno.
Definizione successionale di limite. Non esiste il $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$. Asintoti di una funzione calcolo e grafici.
Definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo. Continuità destra e sinistra. Esempi di funzioni continue e non continue. Continuità delle funzioni elementari.

Teoremi sui limiti (senza dimostrazioni):Unicità - Confronto e corollari 1-2, permanenza del segno 1-2 e permanenza del segno per funzioni continue. Cambiamento di variabile nel calcolo del limite: considerazioni sull'ipotesi $t_0 \ne g(x)$ definitivamente per $x \to c$, esame del caso $g(x) = 0;\ f(x) = [\cos x]$. Continuità delle funzioni composte di funzioni continue. Limiti fondamentali dell'analisi: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (con dimostrazione) e $\lim\limits_{x\to+\infty/-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, già introdotto nello studio delle successioni.
Calcolo dei seguenti limiti ed eventuali stime asintotiche: $\lim\limits_{x\to+\infty/-\infty} P(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty/-\infty} \frac{N(x)}{D(x)}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty/-\infty} \left[x \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$, $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Funzioni continue in un intervallo. Gli zeri di una funzione. Teorema degli zeri (con dimostrazione). Approssimazione di soluzioni di equazioni tramite il metodo di bisezione. Teorema di Wierstrass e considerazioni sulla necessità delle ipotesi. Teorema dei valori intermedi. Importanza di lavorare in $\mathbb{R}$ e non in $\mathbb{Q}$: il teorema non vale in $\mathbb{Q}$. Funzioni monotone, non necessariamente continue. Una funzione definita su un intervallo e continua è invertibile se e solo se è strettamente monotona. Calcolo di $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ e di $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x}$. Asintotici.

Definizione di funzione derivabile in un punto e in un intervallo. Funzione derivata prima e derivate successive. Applicazioni alla determinazione dell'equazione della retta tangente ad una curva in un suo punto e applicazioni cinematiche. Rapporto incrementale come tasso di variazione medio, derivata come tasso di variazione puntuale. Derivate delle funzioni elementari. Esame del comportamento del grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $(0,0)$. Flessi a tangente verticale.
Derivata destra e sinistra. Continuità e derivabilità in un punto. Teorema (con dimostrazione): $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, f derivabile in $x_0 \in (a,b) \Rightarrow f$ continua in x_0. Non vale il viceversa. Punti angolosi, di flesso a tangente verticali e di cuspide. Calcolo delle derivate. Derivata della funzione composta (con dimostrazione). Regola della catena di Leibniz: $\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\omega}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Derivata della funzione inversa (con giustificazione della regola).

Massimi e minimi relativi ed assoluti.
Teorema di Fermat (con dimostrazione). Significato geometrico e necessità delle ipotesi.
Punti stazionari.

Teorema di Lagrange (con dimostrazione).
Interpretazione geometrica della media aritmetica (funzione $f(x)=x^2; x\in[a,b]$) e della media geometrica (funzione $f(x)=\frac{1}{x}; x\in[a,b]$ con $a>0$).
Interpretazione fisica.
Il teorema di Rolle.

Monotonia di funzioni derivabili.
Se f derivabile con $f'(x)>0, \forall x\in(a,b)$ allora f è invertibile in (a,b) e la sua inversa è strettamente crescente. Analogamente se $f'(x)<0, \forall x\in(a,b)$.

Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla. Necessità di operare su intervalli. La funzione $f(x)=arctgx-arctg\frac{1}{x}$.
Teorema: $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, f continua in $[a,b)$ e derivabile in (a,b), se esiste il $\lim_{x\to a^+} f'(x)=l\in\mathbb{R}$ allora la funzione è derivabile in a e $f'_+(a)=l$ (senza dimostrazione).

Studio degli estremi di una funzione.

Funzioni derivabili due volte su un intervallo (a,b).
f' crescente /decrescente se e solo se $f''(x)\geq 0/\leq 0, \forall x\in(a,b)$. Dimostrazione.
Significato geometrico di derivata seconda.
Funzioni convesse / concave. Punti di flesso. Esempi.
Funzioni convesse /concave e grafico della funzione rispetto alle tangenti e alle secanti.

Teorema (con dimostrazione): Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile due volte e $x_0\in(a,b)$ punto di flesso.
Allora $f''(x_0)=0$.
Non vale il viceversa.

Punti di flesso a tangente verticale.

Teorema (con dimostrazione): Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile due volte e $x_0\in(a,b)$ punto stazionario.
Se $f''(x_0)>0$ allora x_0 è punto di minimo relativo
Se $f''(x_0)<0$ allora x_0 è punto di massimo relativo

Osservazione: se $f''(x_0)=0$ non si può trarre alcuna conclusione per x_0.
Esempi: $f(x)=x^3; f(x)=x^4; f(x)=-x^4$.
Punti di flesso a tangente orizzontale.

Teorema di De L'Hospital (senza dimostrazione)
Applicazione nel calcolo di limiti. Esame di alcuni casi nei quali il teorema non può essere applicato o che complica il calcolo stesso.
Studio del grafico di funzioni.

Introduzione al calcolo integrale. Problema di determinare l'area di una regione piana a contorno "curvilineo".
Calcolo dell'area della regione finita di piano situata nel primo quadrante, compresa tra le rette $x=0; x=1$ e il grafico della curva $y=x^2$.
Integrale definito: la somma S_n di Cauchy-Riemann e la definizione di integrale di Riemann. La funzione di Dirichlet è limitata in $[0,1]$ ma non è integrabile. Interpretazione geometrica e fisica di integrale. Le proprietà dell'integrale.
Teorema della media integrale (con dimostrazione). Significato geometrico.
Definizione di integrale indefinito e teorema che caratterizza le primitive di una funzione definita su un intervallo (con dimostrazione).

Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione).
Calcolo di aree e applicazione del teorema della media integrale.
Ricerca della primitive di una funzione continua in un intervallo.
Primitive fondamentali.
Proprietà dell'integrale indefinito.
Regole di integrazione: per scomposizione e per sostituzione,

Integrali definiti: risoluzione per sostituzione.
La funzione integrale.
Il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.
Integrazione per parti e procedimenti iterativi.
Integrazione della funzioni razionali con denominatore di primo e secondo grado.
Integrazione di funzioni trigonometriche.
Integrazione delle funzioni irrazionali.
Integrazione di particolari funzioni discontinue.
Integrali generalizzati: integrazione di funzioni non limitate.
Criteri di integrabilità per funzioni non limitate.

$$\int_0^1 x^\alpha dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

Integrazione su intervalli illimitati.

Criteri di integrabilità su intervalli non limitati.

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ è convergente ma non assolutamente convergente.

Introduzione alle serie numeriche: esame del paradosso di Zenone (Achille e la tartaruga)
La successione $\{a_n\}$ e la successione $\{S_n\}$ .Definizione di serie convergente - divergente e irregolare.

Studio del carattere della serie geometrica. Le serie telescopiche e la serie di Mengoli.
Condizione necessaria per la convergenza di una serie (con dimostrazione).
La condizione non è sufficiente: la serie armonica.
Serie a termine non negativo e loro carattere.
La serie armonica e la serie armonica generalizzata.
Studio del carattere della serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ attraverso il confronto con l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.
Il criterio integrale per le serie a termini non negativi.
Criterio del confronto, criterio del confronto asintotico, criterio della radice e criterio del rapporto.

Serie con termini a segno variabile.
Assoluta convergenza. L'assoluta convergenza implica la convergenza.
Serie con termini a segno alterno.
Criterio di Leibniz per la convergenza.

Il campo dei numeri complessi: $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}$ può considerarsi un'estensione di $\mathbb{R}$.
La forma algebrica dei numeri complessi e la rappresentazione sul piano complesso.
parte reale e parte immaginaria.
Non esiste una relazione d'ordine in $\mathbb{C}$.
Operazione di addizione - moltiplicazione - divisione e di elevamento a potenza $n \geq 0$.
Il coniugato e proprietà.
Modulo di un numero complesso e proprietà (con dimostrazione).
Forma trigonometrica di un numero complesso.
Prodotto, quoziente e potenza di un numero complesso scritto in forma trigonometrica.
Radice n-sima dell'unità e di un numero complesso. Interpretazione geometrica.

Il teorema fondamentale dell'algebra(senza dimostrazione).
L'esponenziale complesso.
Il logaritmo complesso.
Elevamento a potenza complessa.
Risoluzione di equazioni di secondo grado in campo complesso.

Differenziale e approssimazione lineare.

Il simbolo di "*o piccolo*" e la sua algebra.
La relazione tra "*o piccolo*" e gli asintotici.
Formula di Taylor - MacLaurin all'ordine n con il resto di Peano.
Sviluppi di MacLaurin di alcune funzioni elementari.
Formula di Taylor - MacLaurin con il resto di Lagrange (il teorema di Lagrange).
Stima dell'errore nella approssimazione.
Calcolo di limiti con lo sviluppo in polinomi di Taylor.
Risoluzione approssimata di una equazione: il metodo di Newton.
Serie di Taylor. Sviluppo in serie di Taylor delle funzioni e^x, $\sin x$, $\cos x$ (dimostrazione).
Sviluppi in serie di Taylor di $\log(1+x)$ e di $(1+x)^\alpha$
Proprietà delle serie di Taylor

Serie in campo complesso: serie geometrica ed esponenziale complesso.
Utilizzo del criterio di Leibniz per determinare un valore approssimato (approssimazione di $\sin(0.8)$).
Successioni e serie di funzioni, convergenza puntuale e convergenza uniforme.
Esempi di funzioni che convergono puntualmente e non uniformemente.
Criterio per la convergenza uniforme di una successione di funzioni:
Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $D\subseteq\mathbb{R}$ e f il suo limite puntuale. Se esiste una successione infinitesima $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n\in\mathbb{R}$ tale che $\left|f_n(x)-f(x)\right|\le a_n$, $\forall x\in D$, allora f_n converge uniformemente a f.
Criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme di serie di funzioni.
Teoremi di passaggio al limite (senza dimostrazioni).

Serie di potenze.
L'insieme di convergenza di una serie di potenze è sempre un intervallo (dimostrazione).
Raggio di convergenza di una serie di potenze.
Criteri di convergenza.
Riordinamento.
Le serie di potenze e le serie di Taylor.
Continuità della funzione somma.
Integrazione termine a termine.
Derivazione termine a termine.
Sviluppo in serie di Taylor
Esempi di calcolo di integrali attraverso sviluppi in serie di potenze.

Risoluzione di esercizi.