Studia il carattere delle seguenti serie:

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n)}{3n^3+5n}+\frac{\cos(n)}{n^4+7}\right]$ Serie con termini di segno variabile. E' assolutamente convergente,

  infatti: $\left|\frac{\sin(n)}{3n^3+5n}+\frac{\cos(n)}{n^4+7}\right|\le\frac{1}{3n^3+5n}+\frac{1}{n^4+7}\sim\frac{1}{3n^3}$ e $\sum\frac{1}{n^3}$ è convergente.

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\log n}$ Serie con termini di segno alterno. Non è assolutamente convergente, infatti:

  $\left|\frac{(-1)^n}{n-\log n}\right|=\frac{1}{n-\log n}\sim\frac{1}{n}$ e $\sum\frac{1}{n}$ è divergente. E' invece semplicemente convergente per il criterio di Leibniz, essendo: $a_n=\frac{1}{n-\log n}>0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\log n}=0$, la funzione $f(x)=x-\log x$ con $x>0$, crescente per $x>1$ e quindi la successione a_n decrescente.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n-\sqrt{n}}{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\log n}{n+1}$, $a_n=\frac{\sqrt{n}-\log n}{n+1}>0$ e $\frac{\sqrt{n}-\log n}{n+1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge a $+\infty$, quindi la serie diverge a $-\infty$.

- $\sum_{n=100}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{2^n}$, $a_n=\frac{n\sqrt{n}}{2^n}>0$ e $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Criterio radice: $\sqrt[n]{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2^n}}=\frac{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\to\frac{1}{2}<1$. La serie converge.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)}{n\sqrt{n}}$ Serie con termini di segno variabile. Converge assolutamente, infatti:

  $\left|\frac{\cos(2n+1)}{n\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{n\sqrt{n}}$ e $\sum\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge.

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+\sin(n)}{1+n^2}$ Sere con termini di segno positivo. Diverge poiché $\frac{n+\sin(n)}{1+n^2}\sim\frac{1}{n}$ e $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2e^{-n}}$. Serie con termini di segno alterno. Non è assolutamente convergente in quanto

  $\left|\frac{(-1)^n}{n+2e^{-n}}\right|=\frac{1}{n+2e^{-n}}\sim\frac{1}{n}$ e $\sum\frac{1}{n}$ diverge. E' convergente per il criterio di Leibniz in quanto:

  $a_n=\frac{1}{n+2e^{-n}}>0$ e $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Inoltre la funzione $f(x)=x+2e^{-x}$ con $x>0$ è definitivamente crescente e quindi a_n è definitivamente decrescente.

- $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n^{n+1}}$ Serie a termini di segno positivo. Il criterio del rapporto e della radice non funzionano (verificare). $\frac{(n-3)^n}{n^{n+1}} = \left(\frac{1-3}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \sim \frac{1}{e^3 n}$ e $\sum \frac{1}{n}$ diverge, quindi la serie diverge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Serie a termini positivi. Criterio del rapporto: $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$. La serie converge.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot 3^{n+1}}{n!}$. Serie a termini positivi. Criterio del rapporto: $\frac{\sqrt{n+1} \cdot 3^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt{n} \cdot 3^n} \to 0 < 1$. La serie converge.

- $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n-2}{n+1} = -\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n+1}{n-2} = -\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$ .Serie con termini a segno alterno.

  Non converge assolutamente, infatti: $\left|(-1)^n \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)\right| = \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right) \sim \frac{3}{n-2} \sim \frac{3}{n}$ e $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Converge semplicemente per il criterio di Leibniz, infatti $a_n = \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right) > 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, inoltre la funzione $f(x) = \log\left(1+\frac{3}{x-2}\right)$,con $x > 0$ è definitivamente decrescente e quindi lo è la successione a_n.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} \cdot n!}{(2n+1)!}$. Serie con termini disegno positivo. Per il criterio del rapporto converge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$. Poiché $\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = -\infty$, perla condizione necessaria di Cauchy sulla convergenza delle serie, possiamo concludere che la serie non converge. Essendo $a_n = \log \frac{n+1}{n^2} < 0$ definitivamente, possiamo concludere che la serie diverge a $-\infty$.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$. Serie a termini di segno positivo: $a_n = \frac{1}{\log(n+1)} > 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Essendo $\log(n+1) < n$ si ha che: $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n}$, poiché $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la serie diverge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{2}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)$. Serie con termini di segno alterno. Non converge assolutamente, infatti:

  $\left|(-1)^n \left(e^{\frac{2}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)\right| = e^{\frac{2}{n}} - e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sim e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ diverge quindi non vi è convergenza assoluta. La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti $a_n = e^{\frac{2}{n}} - e^{\frac{1}{n}} > 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La funzione $f(x) = e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}}$ è definitivamente decrescente, infatti $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(1 - 2e^{\frac{1}{x}}\right) \sim -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0$ per $x \to +\infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}\right)\log n = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{3n+1}{n^3-3n}\right)\log n$. E' una serie a termini positivi.

  $0 < \log\left(1 + \frac{3n+1}{n^3-3n}\right)\log n \sim \frac{3n+1}{n^3-3n}\log n \sim \frac{3\log n}{n^2}$. Osserviamo che se maggioriamo $\log n < n$, si ha:

  $0 < \frac{3\log n}{n^2} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$, ma la serie $\sum \frac{1}{n}$ è divergente, quindi non possiamo pervenire ad alcuna conclusione. Se invece maggioriamo $\log n < \sqrt{n}$, allora: $0 < \frac{3\log n}{n^2} < \frac{3\sqrt{n}}{n^2} = \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$ e poiché $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, possiamo concludere che anche la serie di partenza converge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n} + \sin\left(\frac{1}{e^n}\right)\right)$, serie termini di segno positivo. Osserviamo che

  * $-1 \le \sin n \le 1 \to e^{-1} \le e^{\sin n} \le e$. Consideriamo: $\sin\frac{1}{n} + \sin\left(\frac{1}{e^n}\right) \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{e^n} = \frac{e^n+1}{ne^n} \sim \frac{1}{n}$, poiché $\sum \frac{1}{n}$ è divergente, prendo la prima delle due maggiorazioni *

  $a_n = e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n} + \sin\left(\frac{1}{e^n}\right)\right) \ge e^{-1}\left(\sin\frac{1}{n} + \sin\left(\frac{1}{e^n}\right)\right) \sim e^{-1}\cdot\frac{1}{n}$, quindi la serie diverge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)\cos n$, serie con termini di segno variabile. La serie converge assolutamente:

  $\left|e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)\cos n\right| \le e\cdot\sin\frac{1}{n}\cdot\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \sim e\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{e}{n^{\frac{3}{2}}}$, dalla convergenza della serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ si deduce l'assoluta convergenza della serie data.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \sin\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)$. Serie con termini di segno variabile. Converge assolutamente:

  $\left|\sin n \cdot \sin\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)\right| \le \sin\frac{1}{n}\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$, dalla convergenza della serie $\sum \frac{1}{n^2}$ si deduce l'assoluta convergenza della serie data.

- $$\sum_{n=45}^{\infty}\frac{5n+(-1)^n\cdot n^2+\log^4 n}{2n^3}.$$

La serie non è assolutamente convergente, infatti $\left|\frac{5n+(-1)^n\cdot n^2+\log^4 n}{2n^3}\right|\sim\frac{n^2}{2n^3}=\frac{1}{2n}$ e la serie $\sum\frac{1}{n}$ è divergente. La serie è convergente perché la possiamo scrivere come somma di due serie convergenti:

$$\sum_{n=45}^{\infty}\frac{5n+(-1)^n\cdot n^2+\log^4 n}{2n^3}=\sum_{n=45}^{\infty}\frac{5n+\log^4 n}{2n^3}+\sum_{n=45}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{2n^3}.$$

$\sum_{n=45}^{\infty}\frac{5n+\log^4 n}{2n^3}$, è: $\frac{5n+\log^4 n}{2n^3}\sim\frac{5}{2n^2}$ e quindi la prima serie è convergente.

$\sum_{n=45}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{2n^3}=\sum_{n=45}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ convergente per il criterio di Leibniz.

- $\sum_{n=20}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n+\sin n}{n^2\log n}=\sum_{n=20}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}+\sum_{n=20}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2\log n}$ la serie $\sum_{n=20}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$ è convergente per il criterio di Leibniz, la serie $\sum_{n=20}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2\log n}$ è convergente (assolutamente) perché: $0\le\left|\frac{\sin n}{n^2\log n}\right|\le\frac{1}{n^2\log n}\le\frac{1}{n^2}$ e $\sum\frac{1}{n^2}$ convergente. Quindi la serie è convergente perché somma di due serie convergenti.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cdot arctg(n)\cdot arctg\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Serie con termini di segno alterno. La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti: $a_n=arctg(n)\cdot arctg\left(\frac{1}{n}\right)\ge 0$ e $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Sia $f(x)=arctgx\cdot arctg\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\left[arctg\left(\frac{1}{x}\right)-arctgx\right]$ osserviamo che per $x\to+\infty$ è $f'(x)\sim-\frac{\pi}{2x^2}<0$ e quindi la funzione è definitivamente decrescente, quindi a_n definitivamente decrescente, la serie converge.

Osserviamo che la serie non è assolutamente convergente:

$\left|(-1)^n\cdot arctg(n)\cdot arctg\left(\frac{1}{n}\right)\right|=arctg(n)\cdot arctg\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{\pi}{2n}$ per $n\to\infty$ e $\sum\frac{1}{n}$ è divergente.

- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\log(\log n)}{n}$. Non è assolutamente convergente, infatti: $\frac{\log(\log n)}{n}\ge\frac{1}{n}$ definitivamente (essendo: $\log(\log n)\ge 1\Leftrightarrow\log n\ge e\Leftrightarrow n\ge e^e$) e $\sum\frac{1}{n}$ è divergente. La serie converge per il criterio di Leibniz, infatti: $a_n=\frac{\log(\log n)}{n}\ge 0$ e $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Sia $f(x)=\frac{\log(\log x)}{x}$, $x>0$, la derivata prima $f'(x)=\frac{1-\log x\cdot\log(\log x)}{x^2\cdot\log x}\le 0$ definitivamente, quindi a_n definitivamente decrescente.

- Utilizzando la serie geometrica scrivere sotto forma di frazione i seguenti numeri decimali periodici: $0.\overline{4}$ e $0.\overline{35}$.

$0.\overline{4} = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + ... + \frac{4}{10^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10^n} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 4\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right]$ Ricordando che se $|q| < 1$ è $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, si ha: $0.\overline{4} = 4\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right] = 4\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right] = \frac{4}{9}$

$$0.\overline{35} = \frac{35}{100} + \frac{35}{100^2} + \frac{35}{100^3} + ... + \frac{35}{100^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{35}{100^n} = 35\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{100^n} - 1\right] = 35\left[\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\right] = \frac{35}{99}$$

- Determina per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]^{\alpha}$ con $\alpha > 0$ converge.

$\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, quindi: $\left[\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]^{\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$ che converge se e solo se $\alpha > 1$.

Calcola la somma S delle seguenti serie:

- $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ è una serie telescopica. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, la somma parziale è:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + ... + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{9^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left[\left(\frac{2}{9}\right)^0 + \left(\frac{2}{9}\right)^1\right] = \frac{1}{1-\frac{2}{9}} - 1 - \frac{2}{9} = \frac{4}{63}$, quindi: $S = \frac{4}{63}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \cdot 3}{4^n} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$, serie geometrica di ragione $q = -\frac{3}{4}$, convergente essendo $|q| < 1$. Quindi: $S = 3 \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{12}{7}$

Calcola la somma delle seguenti serie riconoscendole come serie di potenze notevole, calcolata in un punto particolare:

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$, ricordiamo che $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, con $|x|<1$. Scriviamo pertanto la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}=-\log\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\log\frac{1}{2}=\log 2$, quindi: $S=\log 2$.

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n e^{-3n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{e^3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{e^3}\right)^n-1=-\frac{2}{2+e^3}$, serie geometrica di ragione $q=-\frac{2}{e^3}$, con $|q|<1$. $S=-\frac{2}{2+e^3}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(2n)!}$, ricordiamo che $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, segue: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{(2n)!}=\cos\frac{1}{\sqrt{2}}$; $S=\cos\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Calcola la somma S delle seguente serie in campo complesso, scrivi S in forma algebrica.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+i)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1+i}{2}\right)^n$, serie geometrica nel campo complesso, con $q=-\frac{1+i}{2}$ e $\left|-\frac{1+i}{2}\right|<1$. Si ha: $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1+i}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1+i}{2}\right)^n-1=\frac{1}{1+\frac{1+i}{2}}-1=-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}i$, $S=-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}i$.

- $\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{(1+2i)^n}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i(1+2i))^n}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-2}{9}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{i-2}{9}}=\frac{9}{11-i}=\frac{9(11-i)}{122}=\frac{99}{122}-\frac{9}{122}i$.

  $S=\frac{99}{122}-\frac{9}{122}i$.