Esercizi sulle sommatorie:

(1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, si tratta della somma dei primi $n$ termini della progressione aritmetica: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \end{cases}$

Calcoliamo

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)$$ per l'inversione degli indici sulla seconda sommatoria.

Quindi:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i + n + n + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = 2n + \sum_{i=1}^{n-1} (i+n-i) =$$

$$2n + \sum_{i=1}^{n-1} (n) = 2n + n \cdot (n-1) = n(n+1)$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$

Calcoliamo, utilizzando la traslazione degli indici e la (1).

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} 2k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k + n = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1) + n = 2 \cdot \left[ \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \right] + n =$$

$$= 2 \cdot \left[ \frac{n(n+1)}{2} - n \right] + n = n^2$$