nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e spiegando in modo chiaro e leggibile i passaggi che esegui. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su ogni foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame i fogli che hai usato (compresi il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. a. Discuti la convergenza semplice ed assoluta della serie $A := \sum_{n=15}^{\infty} \sqrt{n}\sin(2n)\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2$

   b. Discuti al variare del parametro reale $\alpha > 0$ il carattere della serie $B := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha \cdot n + 2}{4n+1}\right)^n$.

2. Spiega perché la funzione $f(x) = x\cdot(\log x)^2$ è invertibile in $(1,+\infty)$. In questo intervallo di invertibilità indica con g la funzione inversa. Calcola $g'(4e^2)$.

3. Considera la funzione $f(x) = \int_0^{2x}\cos(t^2)\,dt$ e calcola $f'(x)$. Utilizza questo risultato per calcolare il $\lim_{x\to 0}\frac{2x - f(x)}{x^5}$.

4. Rappresenta la curva di equazione $y = f(x) = x + |\log x|$, studia anche il segno della derivata seconda. Spiega in modo esauriente perché la funzione non è derivabile in $x_0 = 1$ e stabilisci la natura di tale punto (punto di flesso a tangente verticale, punto di cuspide o punto angoloso) giustificando in modo esauriente la tua affermazione.

5. Calcola il seguente limite $\lim_{x\to 0}\left(1+\sin(3x)\right)^{\frac{\cos(2x)}{x}}$.

6. Risolvi in $\mathbb{C}$ la seguente equazione $\frac{(z+1)^4}{8} + 1 + i\sqrt{3} = 0$ ed esprimi il risultato in forma algebrica.

7. Dal grafico di $y = \frac{1}{x}$ deduci il grafico di $y = 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Osserva con attenzione le proprietà del grafico per calcolare l'integrale $\int_{-2}^{4} 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

8. Stabilisci se la funzione $f(x) = \frac{x|x|-1}{x+1} + 1$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange in $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$.