nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e spiegando in modo chiaro e leggibile i passaggi che esegui. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su ogni foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame i fogli che hai usato (compresi il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

Con $\log x$ si intende $\ln x$

1. Studia il carattere delle seguente serie: $A := \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\sin n}\left(\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{e^n}\right)$

2. Risolvi la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\left(z - i\sqrt{3}\right)^4 + 8 - \left(8\sqrt{3}\right)i = 0$

3. Considera la funzione $f(x) = \int_0^{3x} \cos\left(t^2\right)dt$ e calcola $f'(x)$. Utilizza questo risultato per calcolare il $\lim_{x\to 0}\frac{3x - f(x)}{x^5}$.

4. Dal grafico di $y = 1 + \log x$ deduci quello della curva $y = f(x) = \arctan\left(1 + \log x\right)$; determina il dominio di $f(x)$. Spiega perché la funzione è invertibile e ricava l'espressione analitica della sua funzione inversa $g(x)$. Determina il dominio di $g(x)$. Deduci il grafico della curva $y = g(x)$. Scrivi l' equazione della retta tangente alla $y = f(x)$ nel suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse e l'equazione della retta tangente alla $y = g(x)$ nel punto di intersezione con l'asse delle ordinate.

5. Calcola il $\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\sin x - \log(1+x)\right)\cdot x^{3\alpha}\right]$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Rappresenta la curva di equazione $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin|x|$, quindi determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse.

7. Considera la successione così definita: $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$, con $n \geq 1$. Calcola a_1, a_2, a_3. Dimostra che la successione è decrescente e che $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x^2+1} \leq x^n$, $\forall x \in [0,1]$. Deduci che $\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Stabilisci infine se la successione è convergente e, in caso affermativo, determina il valore del limite della successione.

8. Risolvi il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} 4y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$