Permutazioni - disposizioni e combinazioni semplici. Il simbolo di fattoriale e proprietà. I coefficienti binomiali e proprietà. Il simbolo di sommatoria. Le progressioni geometriche.

Proprietà delle sommatorie. Le progressioni geometriche. Somma dei primi n+1 termini di una progressione geometrica.

Binomio di Newton. Dimostrazioni dirette e indirette. Dimostrazione che radice di 2 non è un numero razionale.

La dimostrazione per induzione. Esempi: disuguaglianza di Bernoulli e binomio di Newton.

Gli insiemi numerici. Il campo totalmente ordinato dei razionali, proprietà archimedea e di densità.

Gli allineamenti decimali propri, limitati e periodici. Dimostrazione che 0,9 periodico è uguale a 1.

Approssimazioni di radice di 2 attraverso allineamenti decimali propri limitati. Definizione del campo totalmente ordinato $\mathbb{R}$, proprietà archimedea e di densità. Gli irrazionali: allineamenti decimali propri illimitati e non periodici. Definizione di $\mathbb{R}$ attraverso gli allineamenti decimali propri. Maggioranti, massimo ed estremo superiore di un insieme. Unicità del massimo. Assioma di completezza di $\mathbb{R}$. L'assioma di completezza non vale nel campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Esercizi sui maggioranti - minoranti - massimi - minimi- estremi superiori ed inferiori. Definizione di radice n-esima, potenza e logaritmo e loro proprietà. La curva esponenziale e logaritmica.

Valore assoluto di un numero reale. Disequazioni con i valori assoluti. Disuguaglianze notevoli.

Definizione, dominio naturale, codominio, Im(f) e Graf(f). Restrizione di una funzione. Funzioni limitate, massimo e minimo assoluto. Funzioni composte. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive; determinazione della funzione inversa e del suo grafico. Grafico delle funzioni logaritmo ed esponenziale.

Funzioni monotone. Teorema: se una funzione è strettamente monotona, allora è invertibile, non vale il viceversa.

Rapporto incrementale e segno del rapporto incrementale di una funzione monotona. Rappresentazione grafica.

Funzioni circolari e loro funzioni inverse. Funzioni pari / dispari e funzioni periodiche. Operazioni con le funzioni e grafici deducibili. Funzioni parte intera - la funzione gradino di Heaviside - la funzione segno e la funzione mantissa.

Le funzioni potenza, polinomiali e razionali fratte.

Funzioni iperboliche e relativi grafici (la curva catenaria in fisica). La disequazione: $Cosh(x) \le \frac{e^x}{2} \le Sinh(x)$ e l'equazione: $Cosh^2(x) - Sinh^2(x) = 1$. Le funzioni inverse delle funzioni iperboliche e relativi grafici.

Analisi di fenomeni vibratori. Rappresentazione di $y = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$; $y = t \cdot \sin(\omega t)$ e $y = e^{-t} \cdot \sin(\omega t)$

Risoluzione grafica di disequazioni.

Definizione di successione numerica. Successioni che godono definitivamente di una certa proprietà.

I "simboli" di +∞ e - ∞, $\mathbb{R}*$.Successioni convergenti e divergenti.

Definizione di limite per una successione. L'unico limite che si può calcolare per una successione è per n tendente a +∞ .Teorema di unicità del limite. Verifica della correttezza del calcolo di alcuni limiti.

Successioni irregolari.

Teorema: ogni successione convergente è limitata. Passaggio al valore assoluto nel calcolo di limiti. Convergenza per difetto e per eccesso. La successione geometrica. Successioni monotone. Teorema di monotonia: ogni successione monotona ammette limite. Algebra dei limiti.

Teoremi di permanenza del segno - I teoremi non possono essere invertiti. Corollari di ordinamento. Teorema del confronto e corollari . Forme di indecisione. Il numero di Nepero e : esame di un caso finanziario. Valgono le seguenti limitazioni: $2 < e < 3$. Limite fondamentale $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ e limiti riconducibili.

La gerarchia degli infiniti, le stime asintotiche e il criterio del rapporto. Il criterio della radice.

Risoluzione di esercizi ed esame di situazioni particolari.

Limiti di funzioni. Intorni di un punto e intorni di +∞ e - ∞. Definizione topologica di limite. Verifica del calcolo di limite. Limite destro e limite sinistro . Limite per eccesso e per difetto.

Limite di funzione attraverso il limite di successioni. Non esiste il limite per x tendente a +∞ di sin(x).

Funzioni infinitesime ed infinite per x tendente a c; il simbolo di o piccolo per funzioni infinitesime.

Funzione continua in un punto e in un intervallo. Continuità destra e sinistra ed esempi.

Esempi di funzioni continue nel loro dominio naturale. La funzione sin(x) è continua in R.

Esempi di funzioni che presentano discontinuità: la funzione di Heaviside, la funzione segno e la funzione parte intera di x. Funzioni che soddisfano definitivamente una certa proprietà per x tendete a c. Teoremi sui limiti:

Unicità, teoremi della permanenza del segno e del confronto e conseguenze.

Cambiamento di variabile nei limiti. Considerazioni sulla necessità dell'ipotesi $f(x)\neq y_0$ definitivamente per x tendente a c: analisi della composizione delle funzioni f(x)=0 e g(x)= [x], con x tendente a 0. Limiti fondamentali dell'analisi, dimostrazione che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Stime asintotiche. Ordini di infinito e di infinitesimo. Gerarchia degli infiniti. Calcolo di limiti.

Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

Operazioni fondamentali sulle funzioni continue. Applicazione delle funzioni continue al calcolo dei limiti.

Prolungamento con continuità di una funzione. Teorema degli zeri. Massimi e minimi assoluti. Teorema di Weierstrass sulle funzioni continue. Teorema dei valori intermedi. Continuità della funzione inversa.

Introduzione al calcolo differenziale. Esame dei seguenti problemi: retta tangente ad una curva in un suo punto, velocità istantanea.

Rapporto incrementale e significato geometrico e fisico (velocità media). Definizione di derivata e significato geometrico e fisico (velocità istantanea). Derivata come velocità (tasso) di variazione.

Funzione derivata prima e derivate successive.

La derivabilità implica la continuità, non vale il viceversa (con dimostrazione).

Calcolo di derivate delle funzioni elementari. Da derivata ennesima di x^n è $D^{(n)}\left(x^n\right) = n!$

Equazione della retta tangente ad una curva in un suo punto.

Derivata destra e derivata sinistra.

Punti di continuità e di non derivabilità: punti angolosi, punti a tangente verticale: di flesso a tangente verticale e punti di cuspide.

Operazioni fondamentali con le derivate. Esame di equazioni differenziali che regolano fenomeni vibratori: $y'' = k \cdot y$ (oscillatore armonico semplice) e che regolano fenomeni nei quali la velocità di crescita di una funzione è proporzionale alla funzione stessa: $y' = k \cdot y$.

Derivata della funzione composta (senza dimostrazione) e della funzione inversa (con dimostrazione).

Le funzioni di classe $C^n(I)$ su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Punti di massimo e di minimo relativi. Punti stazionari.

Il teorema di Fermat (con dimostrazione). Il teorema di Lagrange (con dimostrazione) e il teorema di Rolle (con dimostrazione). Applicazioni del teorema di Lagrange di $f(x)=x^2$ con $x \in [a,b]$ (media aritmetica) e di $f(x)=\frac{1}{x}$ con $x \in [a,b]$ e $a,b>0$ (media geometrica). Caratterizzazione della monotonia di una funzione: $f'(x) \geq 0$ o $f'(x) \leq 0$ se e solo se $f(x)$ è crescente (decrescente). Se $f'(x)>0$ o $f'(x)<0$ allora $f(x)$ è strettamente crescente (strettamente decrescente). Non vale il viceversa.

La monotonia di funzioni (derivabili e invertibili) si conserva nella funzione inversa.

Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla e delle funzioni che hanno la stessa derivata. (con dimostrazione).

L'importanza di operare in un intervallo (caso $y = arctgx + arctg\frac{1}{x}$)

Applicazione del teorema di Lagrange per calcolare la derivata di una funzione in un punto.

Determinazione di massimi e minimi relativi e assoluti.

Funzioni convesse e concave.

Teorema: se una funzione è derivabile due volte in x_0 e x_0 è punto di flesso, allora $f''(x_0)=0$ (con dimostrazione). Non vale il viceversa.

Teorema sui punti stazionari con derivata seconda diversa da zero (con dimostrazione).

Il teorema di De l'Hospital.

Applicazioni, in particolare la gerarchia degli infiniti.

Lo studio del grafico di una funzione.

Approssimazione della soluzione di una equazione con il metodo di bisezione.

Grafici con parametri.

Definizione di o piccolo.

o piccolo e stime asintotiche. Limiti sull'utilizzo delle stime asintotiche. Algebra degli o piccolo.

Polinomi di Taylor e di MacLaurin.

Approssimazione di una funzione con polinomi di Taylor e resto di Peano.

Approssimazione al primo ordine e differenziale. Notazione di Leibniz per la derivata.

Polinomi di Taylor con il resto di Lagrange. Calcolo approssimato di radice di e.

Applicazione delle approssimazioni di una funzione con polinomi di Taylor nel calcolo di limiti.

Sviluppi di Taylor di funzioni composte e calcolo di limiti.

Esercizi di applicazione dei polinomi di Taylor.

Integrale definito secondo Riemann e sua interpretazione geometrica (aree).

La funzione di Dirichlet non è integrabile (dimostrazione).

Proprietà dell'integrale definito.

Teorema della media integrale e suo significato geometrico (con dimostrazione)

Funzioni primitive di una funzione continua. L'integrale indefinito. Caratterizzazione delle primitive di una funzione.

Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione)

Se $f(x) \in C^1[a,b] \to \int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$

Calcolo di integrali indefiniti immediati o riconducibili ad essi.

Calcolo di integrali indefiniti: metodo di sostituzione e per parti.

Integrazione delle funzioni razionali.

Funzione integrale e secondo teorema fondamentale del calcolo integrale (dim.)

Integrazione di funzioni goniometriche. Formule parametriche e di prostaferesi.

Integrazione delle funzioni irrazionali.

Lunghezza dell'arco di una curva.

Integrali contenenti valori assoluti.

Integrazione di funzioni non continue.

Integrali generalizzati.

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

Criteri di integrabilità al finito e all'infinito. Assoluta integrabilità. L'assoluta integrabilità implica l'integrabilità ma non vale il viceversa. Esempio: convergenza di $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx < +\infty$ mentre $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = +\infty$

L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} < +\infty$

Il campo dei numeri complessi.

L'unità immaginaria. Forma algebrica ed operazioni.

Forma trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi. Definizione di seno e coseno di un angolo.

Operazioni di prodotto, divisione e potenza. Formule di De Morgan

Interpretazione geometrica della somma e del prodotto di numeri complessi.

Radici di un numero complesso e interpretazione geometrica.

Risoluzione di equazioni, in particolare formula risolutiva di equazioni di secondo grado.

Logaritmo e potenza di un numero complesso.

Distanza di due punti nel piano complesso. Polinomi in $\mathbb{C}$ e radici di un polinomio.

Teorema fondamentale dell'algebra e conseguenze (un polinomio è sempre fattorizzabile in $\mathbb{C}$)

Polinomi a coefficienti reali: se z è uno zero lo è anche $\bar{z}$. Conseguenza: ogni polinomio di grado dispari in $\mathbb{R}$ ha almeno uno zero reale.

Serie numeriche: definizione. Serie convergenti, divergenti e irregolari.

Resto n-simo di una serie, il carattere di una serie non cambia sostituendo alla serie il suo resto n-esimo.

Serie geometrica.

Serie armonica e le serie armoniche generalizzate.

Serie telescopica.

Condizione necessaria (e non sufficiente) di Cauchy per la convergenza di una serie (dim.). Osservazioni.

Serie a termini non negativi.

Le serie a termini non negativi non sono mai irregolari. (dim.)

Serie a termini non negativi: criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio del rapporto e della radice.

La serie armonica generalizzata $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge se $\alpha > 1$, diverge se $\alpha \leq 1$ (con dim.).

Serie a termini di segno variabile.

La convergenza assoluta. L'assoluta convergenza implica la (semplice) convergenza, non vale il viceversa, esempio la serie $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz per la convergenza. Considerazioni sull'utilizzo di eventuali asintotici.

Serie di Taylor.

Le funzioni e^x, $\cos x$ e $\sin x$ sono sviluppabili in serie di Taylor in $\mathbb{R}$ (dimostrazione).

Altri sviluppi: $\log(1+x)$, con $|x|<1$, $(1+x)^{\alpha}$ con $|x|<1$, Shx, Chx, etc.

Serie nel campo complesso. Definizione di serie convergente nel campo complesso. $e^{ix} = \sin x + i \cos x$ (dimostrazione). Serie geometriche nel campo complesso.

Equazioni differenziali, generalità. Il problema di Cauchy. Le soluzioni massimali.

Equazioni differenziali lineari e a variabili separabili.

Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costante: omogenee e non omogenee con termine forzante del tipo $P(x)e^{\alpha x}$ e $e^{\alpha x}\left(P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\sin(\beta x)\right)$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Problema di Cauchy.